C. POSSE

Sur les quadratures

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 14 (1875), p. 49-62

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1875_2_14__49_0>

SUR LES QUADRATURES;

PAR M. C. POSSE,
Privat-docent à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Les propriétés connues des fractions continues algébriques permettent d'obtenir sur-le-champ une formule générale pour l'évaluation approximative des intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

et dont la formule célèbre de Gauss n'est qu'un cas particulier. En faisant des hypothèses particulières sur la forme de la fonction donnée $f(x)$, on tombe, dans le cas de $f(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, sur la formule connue

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{n}[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)] + \ldots$$

ou

$$(z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z).$$

Cette formule, déjà démontrée de diverses manières (*), occupe un rang tout particulier parmi les autres formules du même genre : d'un côté, elle appartient à celles que donne la théorie des fractions continues avec le degré d'approximation qui leur est propre ; d'un autre, elle est une formule des quadratures à *coefficients égaux* (**).

(*) *Voir* M. CH. HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 452 ; M. MEHLER, *Journal de Crelle*, t. 63, p. 152.

(**) Voir *Sur les Quadratures*, par M. P. TCHEBICHEFF (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XVIII).

Je démontre qu'elle est la seule jouissant de cette double propriété, en me proposant de résoudre directement la question suivante :

Trouver la forme de la fonction $f(x)$ qui, restant positive entre les limites -1 *et* $+1$ *de la variable, donne*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x)dx = k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)]$$
$$+ a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots,$$

k étant indépendant de la forme de $\varphi(x)$, et

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots.$$

En faisant $\varphi(x) = \frac{1}{z-x}$, intégrant les deux membres de l'égalité précédente par rapport à z, et passant ensuite des logarithmes aux nombres, on aperçoit immédiatement que la question proposée est équivalente à cette autre :

Trouver la fonction $f(x)$, positive entre les limites -1 *et* $+1$ *de la variable, pour laquelle*

$$e^{\int_{-1}^{+1} f(x)\log(z-x)dx} = F(z) + \frac{\varepsilon}{z^n} + \frac{\varepsilon'}{z^{n+1}} + \ldots,$$

$F(z)$ *désignant une fonction entière de degré* n.

D'autres cas particuliers, qu'on trouve développés dans cette Note, m'ont paru dignes d'attention, à cause de leur simplicité et de la facilité avec laquelle on les déduit de la formule générale.

1. La fonction $f(x)$ restant positive entre les limites -1 et $+1$ de la variable, on sait que le développement

en fraction continue de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{z-x}$$

peut être mis sous la forme

$$\cfrac{k}{z+a+\cfrac{1}{\alpha z+\beta+\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1+\ldots}}},$$

tous les quotients incomplets étant linéaires par rapport à z.

Désignant par $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite du rang $n^{ième}$, nous aurons

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{z-x} = \frac{P_n}{Q_n} + \frac{\varepsilon}{z^{2n+1}} + \frac{\varepsilon'}{z^{2n+2}} + \ldots.$$

Soit

$$Q_n = C(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

C étant une constante et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des quantités réelles, inégales et comprises entre les limites -1 et $+1$; nous obtiendrons

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{P_n(x_i)}{Q'_n(x_i)} \frac{1}{z-x_i}\right].$$

Posant $\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{2n} z^{2n} + \ldots$, multipliant les deux membres de la formule (1) par $\varphi(z)$ et égalant de part et d'autre les coefficients de $\frac{1}{z}$, nous aurons la formule générale des quadratures

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_n(x_i)}{Q'_n(x_i)} \varphi(x_i) + \Delta,$$

où Δ est de la forme $a_{2n}\,\varepsilon + a_{2n+1}\,\varepsilon' + \ldots$ et s'annule, par conséquent, chaque fois que $\varphi(x)$ est une fonction entière d'un degré inférieur à $2n$.

Remarquant que

$$\mathrm{P}_n(x_i) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,\mathrm{Q}_n(x)\,dx}{x - x_i}$$

et dénotant par A_i le coefficient $\dfrac{\mathrm{P}_n(x_i)}{\mathrm{Q}_n(x_i)}$, nous aurons

$$(2) \qquad \mathrm{A}_i = \frac{1}{\mathrm{Q}'_n(x_i)} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,\mathrm{Q}_n(x)\,dx}{x - x_i},$$

et la formule précédente prend la forme

$$(3) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i\,\varphi(x_i) + \Delta.$$

La formule de Gauss correspond au cas de $f(x) = 1$.

2. Passant aux applications, nous ferons d'abord

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dans ce cas, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(z - x)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\pi}{z + \left(\sqrt{z^2 - 1} - z\right)}$$
$$= \cfrac{\pi}{z - \cfrac{1}{2z + \left(\sqrt{z^2 - 1} - z\right)}},$$

d'où le développement suivant :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(z - x)\sqrt{1 - x^2}} = \cfrac{\pi}{z - \cfrac{1}{2z - \cfrac{1}{2z - \ldots}}}$$

Les expressions de Q_n et de la racine x_i sont ici

$$Q_n = \cos(n \arccos z) = \cos n\varphi, \quad \text{pour } z = \cos\varphi,$$

et

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) = \cos\alpha, \quad \text{pour } \alpha = \frac{2i-1}{2n}\pi.$$

La formule (2) donne

$$A_i = \frac{\sin\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)}{n\sin\left(\frac{2i-1}{2}\pi\right)} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi - \cos\alpha}$$

ou, observant que $\cos n\alpha = 0$,

$$A_i = \frac{\sin\alpha}{n\sin n\alpha} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi - \cos n\alpha}{\cos\varphi - \cos\alpha}\, d\varphi.$$

Or, il est aisé de vérifier la relation suivante :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos n\varphi - \cos n\alpha}{\cos\varphi - \cos\alpha}\sin\alpha &= \sin(n\alpha) + 2\cos\varphi\sin(n-1)\alpha + \ldots \\ &\quad + 2\cos(n-1)\varphi\sin\alpha, \end{aligned} \right.$$

où le nombre des termes à retenir dans le second membre est égal à n; elle est évidemment vraie pour $n = 1$ et $n = 2$, et se généralise de la manière ordinaire, en partant de ce que

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi.$$

D'après cela, l'expression de A_i devient simplement

$$A_i = \frac{1}{n\sin n\alpha}\int_0^\pi \sin n\alpha\, d\varphi = \frac{\pi}{n}.$$

La formule (3) se réduit donc, dans le cas considéré, à la formule connue

$$(5)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \varphi(x_i) + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots,$$

où

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right).$$

3. On aura deux autres formules très-simples, en posant

$$1^\circ \qquad f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

et

$$2^\circ \qquad f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

1° Pour $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{z-x} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}+z} = \frac{\pi}{2z-(z-\sqrt{z^2-1})}$$

$$= \frac{\pi}{2z - \cfrac{1}{\sqrt{z^2-1}+z}},$$

d'où le développement

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{z-x} = \cfrac{\pi}{2z - \cfrac{1}{2z - \cfrac{1}{2z - \ldots}}}$$

Posant $z = \cos\varphi$, on aura, comme il est aisé de voir,

$$Q_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}, \quad x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) = \cos\alpha.$$

L'expression de A_i devient alors

$$A_i = -\frac{\sin^2\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)}{(n+1)\cos i\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\varphi\sin\varphi d\varphi}{\cos\varphi - \cos\alpha}$$

ou, observant que $\sin(n+1)\alpha = 0$,

$$A_i = -\frac{\sin^2\alpha}{(n+1)\cos(n+1)\alpha}\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\varphi\sin\varphi - \sin(n+1)\alpha\sin\alpha}{\cos\varphi - \cos\alpha}d\varphi.$$

Or

$$\sin(n+1)\varphi\sin\varphi - \sin(n+1)\alpha\sin\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\cos n\varphi - \cos n\alpha - [\cos(n+2)\varphi - \cos(n+2)\alpha]\};$$

d'où l'on tire, à l'aide de la formule (4), après de simples réductions,

$$A_i = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\left(\frac{i\pi}{n+1}\right).$$

Ainsi l'on obtient cette formule très-simple

$$(6)\quad \int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=1}^{i=n}(1-x_i^2)\varphi(x_i) + \Delta,$$

où

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right).$$

2° Pour

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

n a

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{z-x} = \pi\left(1-\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right)$$

$$= \cfrac{2\pi}{2z+1-\cfrac{1}{2z-\cfrac{1}{2z-\ldots}}}$$

Posant $z = \cos\varphi$, on obtient

$$Q_n = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \quad x_i = \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right) = \cos\alpha$$

et

$$A_i = -\frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha}{(2n+1)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}\int_1^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi - \cos\alpha}.$$

Comme

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) = 0,$$

on peut substituer sous le signe d'intégration, au lieu de

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{1}{2}\varphi,$$

l'expression

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)\sin\frac{1}{2}\varphi - \sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)\sin\frac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos n\varphi - \cos n\alpha - [\cos(n+1)\varphi - \cos(n+1)\alpha]\right\},$$

et de là, en vertu de la relation (4), on tire sans difficulté

$$A_i = \frac{4\pi}{2n+1}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n+1}\right) = \frac{2\pi}{2n+1}\left[1 - \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Donc, dans le cas actuel, la formule (3) se réduit à la suivante :

$$(7) \quad \int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\varphi(x)\,dx = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{i=1}^{i=n}(1-x_i)\varphi(x_i) + \Delta,$$

où

$$x_i = \cos\left(\frac{2i\pi}{2n+1}\right).$$

Les expressions si simples des éléments de ces formules les rendent très-commodes dans les applications.

La formule (5) diffère des autres en ce que l'expression de A_i est indépendante de la racine correspondante x_i; nous allons voir tout de suite qu'elle est la seule qui, jouissant de cette propriété, donne à l'erreur Δ la forme assignée.

4. Pour le faire voir, proposons-nous de résoudre directement la question suivante :

Trouver la fonction $f(x)$ qui, restant positive entre les limites -1 et $+1$ de la variable, donne

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,\varphi(x)\,dx = k\sum_{i=1}^{i=n}\varphi(x_i) + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots,$$

k désignant une quantité indépendante de la forme de $\varphi(x)$, et

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n+1} + \ldots.$$

Supposant pour un moment $\varphi(x) = 1$, on aura

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = nk;$$

désignant la valeur de $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ par C, et introduisant la fonction $f_1(x) = \frac{1}{C}f(x)$, nous réduirons la question proposée à la détermination de $f_1(x)$, remplissant la condition suivante :

$$(8)\quad \int_{-1}^{+1} f_1(x)\varphi(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\varphi(x_i) + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots.$$

Mettons pour $\varphi(x)$ la fonction $\frac{1}{z-x}$, et posons

$$F(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

la formule (8) donnera

$$\int_{-1}^{+1} f_1(x)\,\frac{dx}{z-x} = \frac{F'(z)}{nF(z)} + \frac{\varepsilon}{z^{2n+1}} + \ldots,$$

d'où il résulte immédiatement que la fraction irréductible $\frac{F'(z)}{nF(z)}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue

$$\cfrac{1}{z+a+\cfrac{1}{\alpha z+\beta+\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1+\ldots}}} = \int_{-1}^{+1}\frac{f_1(x)\,dx}{z-x}.$$

Cherchons donc à déterminer les constantes inconnues $\alpha, a, \beta, \alpha_1, \ldots$, de manière à vérifier la condition identique par rapport à z

$$nP_n = Q'_n,$$

pour toute valeur entière et positive de n, P_n et Q_n désignant, comme plus haut, le numérateur et le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite.

Calculant les réduites des trois premiers rangs, nous aurons

$$P_1 = 1,\quad P_2 = \alpha z + \beta,\quad P_3 = (\alpha_1 z + \beta_1)P_2 + P_1,$$

$$Q_1 = z + a,\quad Q_2 = \alpha z^2 + (a\alpha + \beta)z + a\beta + 1,$$

$$Q_3 = (\alpha_1 z + \beta_1)Q_2 + Q_1.$$

La condition $2P_2 = Q'_2$ donne

$$2\alpha z + \beta = 2\alpha z + a\alpha + \beta,$$

d'où

$$\beta = a\alpha$$

et, par suite,

$$P_2 = \alpha(z + a), \quad Q_2 = \alpha z^2 + 2a\alpha z + a^2\alpha + 1,$$
$$P_3 = \alpha\alpha_1 z^2 + \alpha(\beta_1 + a\alpha_1)z + a\alpha\beta_1 + 1,$$

et enfin

$$Q = \alpha\alpha_1 z^3 + \alpha(\beta_1 + 2\alpha\alpha_1)z^2 + (a^2\alpha\alpha_1 + 2a\alpha\beta_1 + 1)z + a^2\alpha\beta_1 + a.$$

La condition $3P_3 = Q'_3$ fournit deux équations

$$3(\beta_1 + a\alpha_1) = 2(\beta_1 + 2a\alpha_1), \quad 3(a\alpha\beta_1 + 1) = a^2\alpha\alpha_1 + 2a\alpha\beta_1 + 1,$$

d'où

$$\beta_1 = a\alpha_1, \quad \alpha_1 = 2;$$

ainsi l'on aura, en posant $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, les relations

$$P_2 = \alpha(z + a)P_1 + P_0, \quad Q_2 = \alpha(z + a)Q_1 + Q_0,$$
$$P_3 = 2(z + a)P_2 + P_1, \quad Q_3 = 2(z + a)Q_2 + Q_1.$$

Il est facile de voir que, en poursuivant de la même manière, on aura généralement

$$\beta_k = a\alpha_k, \quad \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 2, \quad \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots = \alpha,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9) \qquad \begin{cases} Q_{2m} = 2(z + a)Q_{2m-1} + Q_{2m-2}, \\ Q_{2m+1} = 2(z - a)Q_{2m} + Q_{2m-1}. \end{cases}$$

En effet, ayant

$$Q_n = (\alpha_{n-2}z + \beta_{n-2})Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

et supposant que

$$Q'_{n-1} = (n-1)P_{n-1}, \quad Q'_{n-2} = (n-2)P_{n-2},$$

on aura

$$Q'_n = \alpha_{n-2} Q_{n-1} + (\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) Q'_{n-1} + Q'_{n-2},$$

ou

$$Q'_n = \alpha_{n-2} Q_{n-1} + (n-1)(\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) P_{n-1} + (n-2) P_{n-2}.$$

Pour calculer α_{n-2} et β_{n-2}, on prendra la relation $n P_n = Q'_n$, qui se réduit, en vertu de la précédente, à

$$(10) \qquad \alpha_{n-2} Q_{n-1} = (\alpha_{n-2} z + \beta_{n-2}) P_{n-1} + 2 P_{n-2}.$$

Le nombre n étant $\overline{>} 3$, la comparaison des coefficients de z^{n-2} et z^{n-3} dans les deux membres de la relation (10) fournira deux équations, qui ne peuvent être identiques par rapport à α_{n-2} et β_{n-2}, vu que les coefficients de z^{n-2} dans P_{n-1} et de z^{n-3} dans P_{n-2} ne sont pas nuls. Donc les constantes a et α sont les seules qui restent arbitraires.

Il nous reste à montrer que les relations supposées, savoir les formules (9), entraînent comme conséquence nécessaire l'identité $n P_n = Q'_n$, pour toute valeur entière et positive de n.

Ayant vérifié, par ce qui précède, l'exactitude de la formule (11) pour $n = 2$ et $n = 3$, nous la supposerons vraie pour $n = 2m$ et $n = 2m + 1$, et nous allons voir qu'elle le sera aussi pour $n = 2m + 2$ et $n = 2m + 3$.

En effet, en vertu de (9), la formule (10) donne

$$\alpha Q_{2m+1} = \alpha (z + a) P_{2m+1} + 2 P_{2m} = P_{2m+2} + P_{2m},$$
$$2 Q_{2m} = 2 (z + a) P_{2m} + 2 P_{2m-1} = P_{2m+1} + P_{2m-1}.$$

Or

$$Q_{2m+2} = 2 (z + a) Q_{2m+1} + Q_{2m},$$

donc

$$Q'_{2m+2} = \alpha Q_{2m+1} + \alpha (z + a) Q'_{2m+1} + Q'_{2m},$$

ou

$$Q'_{2m+2} = \alpha Q_{2m+1} + x(z+a)(2m+1)P_{2m+1} + 2m P_{2m}$$
$$= (2m+2)P_{2m+2}.$$

Absolument de la même manière, on trouverait

$$Q'_{2m+3} = (2m+3)P_{2m+3}.$$

Ainsi il est démontré que la condition identique (11) n'est vérifiée que pour la fraction continue de la forme

$$u = \cfrac{1}{z+a+\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+\ldots}}}}}$$

Soit v la fraction périodique

$$\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+\cfrac{1}{\alpha(z+a)+\ldots}}},$$

on aura

$$v = \cfrac{1}{\alpha(z+a)+\cfrac{1}{2(z+a)+v}},$$

d'où

$$v = -(z+a) + \sqrt{(z+a)^2 + \frac{2}{\alpha}}$$

et enfin

$$u = \frac{1}{z+a+v} = \frac{1}{\sqrt{(z+a)^2+\frac{2}{\alpha}}}.$$

Posant, pour abréger,

$$a_1 = -a - \sqrt{\frac{-2}{\alpha}}, \quad a_2 = -a + \sqrt{\frac{-2}{\alpha}},$$

on a

$$u = \frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} = \frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(a_2-x)}\,(z-x)}.$$

Donc, si l'on fait

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{(z-x)\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x)\,dx}{z-x},$$

on conclut nécessairement que

$$a_1 = -1, \quad a_2 = +1,$$

d'où

$$a = 0, \quad \alpha = -2$$

et

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

car autrement on pourrait assigner à z une valeur qui ne rendrait pas infinis simultanément les deux membres de l'égalité précédente.

La forme générale de la fonction cherchée $f(x)$ est donc

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

C étant une constante.

On voit, d'après cela, qu'on ne saurait trouver une formule des quadratures, à coefficients égaux, différente de la formule (5), en assignant à l'erreur Δ la forme

$$a_{2n}\,\varepsilon + a_{2n+1}\,\varepsilon' + \ldots.$$