

LAGUERRE

**Sur les lignes géodésiques des surfaces  
du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 10-11

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__10_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES  
DU SECOND ORDRE ;**

PAR M. LAGUERRE.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Ch. Brisse.)

---

En désignant, en un point d'une ellipse, par  $\rho$  le rayon de courbure de cette ellipse, et par  $\frac{d\rho}{ds}$  la dérivée de ce rayon par rapport à l'arc, Maclaurin a montré comment la valeur de cette dérivée pouvait se déduire de l'angle que fait la normale à l'ellipse au point considéré avec le diamètre qui passe en ce point. On peut, si l'on veut, énoncer de la façon suivante le théorème de Maclaurin :

*En un point M d'une ellipse, portons sur la tangente une longueur égale à  $\frac{1}{\rho}$  et sur la normale une longueur égale à  $-\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} \frac{1}{\rho}$ , la résultante de ces deux longueurs, composées comme des forces, est perpendiculaire au diamètre OM.*

Les lignes géodésiques des surfaces du second ordre jouissent d'une propriété semblable :

*Si, en un point M d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, nous portons sur la tangente MT à cette courbe une longueur égale à  $\frac{1}{\rho}$ , sur la normale principale une longueur égale à  $-\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} \frac{1}{\rho}$ , et sur la normale au plan osculateur une longueur égale à  $\frac{1}{r}$  ( $r$  désignant le rayon de torsion au point con-*

sideré), la résultante de ces trois longueurs composées comme des forces est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la direction MT.

J'ai considéré ici, pour simplifier l'énoncé, les composantes  $\frac{1}{\rho}$ ,  $-\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} \frac{1}{\rho}$  et  $\frac{1}{r}$ ; mais il est plus convenable, dans d'autres applications, de considérer les composantes proportionnelles  $\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}$ ,  $-\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} \frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}$  et  $\frac{\sqrt[3]{\rho}}{r}$ , ces composantes conservant d'ailleurs les directions que j'ai indiquées.

Pour abrégé, appelons, si vous voulez, pour un instant, *axe de courbure* au point M la composante ainsi définie; on pourra énoncer la proposition suivante :

*Si MT et M'T' désignent deux droites quelconques touchant une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre aux points M et M', la projection de l'axe de courbure en M sur la tangente en M' est égale à la projection de l'axe de courbure en M' sur la tangente en M.*

Si MT et M'T' étaient tangentes à deux lignes géodésiques différentes, tracées sur une même surface du second ordre, le rapport des deux projections dont je viens de parler demeurerait constant lorsque les droites se déplaceraient tangentielllement aux lignes géodésiques; à quoi j'ajouterai que les projections sont encore égales si les deux lignes géodésiques sont tangentes à une même ligne de courbure.

---