B. NIEWENGLOWSKI

Sur un théorème de Jacques Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 127-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__127_1>

SUR UN THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

L'énoncé du théorème de J. Bernoulli, dont M. H. Brocard a donné une démonstration dans le numéro de juillet dernier, a été donné par Jacques BERNOULLI, non-seulement pour le cône droit, mais aussi pour le cône oblique à base circulaire. En voici l'énoncé que je transcris de l'*Aperçu historique :*

Que l'on mène un plan parallèle à la base du cône, et situé à la même distance de son sommet que le plan de la section conique proposée, ce plan coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre sera le latus rectum *de la conique.*

Voici une démonstration du théorème relatif au cône oblique :

Soit SAB le *triangle par l'axe* (*), c'est-à-dire la section du cône par le plan mené suivant la droite qui joint le sommet au centre de la base, et perpendiculaire au plan de la base; soient, en outre, EF la trace du plan sécant, sur le plan du triangle par l'axe, auquel il est supposé perpendiculaire, et CD la trace d'un plan parallèle à la base et à la même distance du sommet que le plan sécant.

On voit, sans difficulté, que le *latus rectum* ou $\frac{2b^2}{a}$ est égal à

$$\frac{\mathrm{EF.KC.KD}}{\mathrm{KE.KF}},$$

K étant le point de rencontre de CD et EF; il suffit de remarquer que les deux sections CD et EF ont une corde commune (réelle ou idéale). La question revient donc à prouver que

$$\mathrm{CD} = \frac{\mathrm{EF.KC.KD}}{\mathrm{KE.KF}}.$$

Or, les deux triangles SCD, SEF, ayant même hauteur et un angle commun, on a

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{SC.SD}}{\mathrm{SE.SF}};$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

mais, si h désigne la hauteur commune,

$$SC = \frac{h}{\sin C}, \quad SD = \frac{h}{\sin D}, \quad SE = \frac{h}{\sin E}, \quad SF = \frac{h}{\sin F};$$

donc

$$\frac{SC.\ SD}{SE.\ SF} = \frac{\sin E}{\sin C} \times \frac{\sin F}{\sin D} = \frac{KC}{KE} \times \frac{KD}{KF}.$$

Le théorème est donc démontré.