

B. NIEWENGLOWSKI

Sur un théorème de Jacques Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 127-129

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__127_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

L'énoncé du théorème de J. Bernoulli, dont M. H. Brocard a donné une démonstration dans le numéro de juillet dernier, a été donné par Jacques BERNOULLI, non-seulement pour le cône droit, mais aussi pour le cône

oblique à base circulaire. En voici l'énoncé que je transcris de l'*Aperçu historique* :

Que l'on mène un plan parallèle à la base du cône, et situé à la même distance de son sommet que le plan de la section conique proposée, ce plan coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre sera le latus rectum de la conique.

Voici une démonstration du théorème relatif au cône oblique :

Soit SAB le *triangle par l'axe* (*), c'est-à-dire la section du cône par le plan mené suivant la droite qui joint le sommet au centre de la base, et perpendiculaire au plan de la base; soient, en outre, EF la trace du plan sécant, sur le plan du triangle par l'axe, auquel il est supposé perpendiculaire, et CD la trace d'un plan parallèle à la base et à la même distance du sommet que le plan sécant.

On voit, sans difficulté, que le *latus rectum* ou $\frac{2b^2}{a}$ est égal à

$$\frac{EF \cdot KC \cdot KD}{KE \cdot KF},$$

K étant le point de rencontre de CD et EF; il suffit de remarquer que les deux sections CD et EF ont une corde commune (réelle ou idéale). La question revient donc à prouver que

$$CD = \frac{EF \cdot KC \cdot KD}{KE \cdot KF}.$$

Or, les deux triangles SCD, SEF, ayant même hauteur et un angle commun, on a

$$\frac{CD}{EF} = \frac{SC \cdot SD}{SE \cdot SF};$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

mais, si h désigne la hauteur commune,

$$SC = \frac{h}{\sin C}, \quad SD = \frac{h}{\sin D}, \quad SE = \frac{h}{\sin E}, \quad SF = \frac{h}{\sin F};$$

donc

$$\frac{SC \cdot SD}{SE \cdot SF} = \frac{\sin E}{\sin C} \times \frac{\sin F}{\sin D} = \frac{KC}{KE} \times \frac{KD}{KF}.$$

Le théorème est donc démontré.