

WORONTZOFF

Sur les nombres de Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 12-19

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__12_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. WORONTZOFF, à Minsk.

I.

Si l'on représente par C_k^n le nombre des combinaisons de n objets k à k et par B_k le coefficient de $\frac{x^k}{1.2.3\dots k}$ dans le développement de la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$, suivant les puissances croissantes de x , c'est-à-dire

$$\left(\frac{d^k \frac{x}{e^x - 1}}{dx^k} \right)_{x=0},$$

on a, d'après des formules bien connues,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{k=n} C_k^n [(\Delta^k B_x)_{x=0} \Delta^{n-k} f(x+k) \\ - (-1)^{n-k} B_k f(x+k)] = 0, \end{array} \right.$$

Δx étant égal à l'unité.

Mais, en ayant égard à la relation

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k = \left(\frac{d^n x}{dx^n} \right)_{x=0},$$

on trouve

$$(\Delta^k B_x)_{x=0} = B_k + (-1)^k k.$$

Donc, en remplaçant $(\Delta^k B_x)_{x=0}$ par sa valeur, dans la formule (1), on obtient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^n n f(x+1) \\ + \sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k [\Delta^{n-k} f(x+k) - (-1)^{n-k} f(x+k)] = 0, \end{array} \right.$$

et aussi

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n B_k (2^{k-1} - 1) = B_n$$

pour n impair et $x = -1$.

3° Soit

$$f(x) = a^x,$$

et posons, pour abrégér,

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k a^{n-k} = \varphi(a).$$

De la formule (4) on déduit, pour $x = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(a) - \varphi(a-1) &= n(a-1)^{n-1}, \\ \varphi(a-1) - \varphi(a-2) &= n(a-2)^{n-1}, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(1) - \varphi(0) &= n0^{n-1}. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k a^{n-k} = \sum_{a=1}^{a=a} n(a-1)^{n-1},$$

résultat bien connu.

4° Prenons

$$f(x) = \frac{B_x}{a^x}.$$

Comme

$$\left(\Delta^n \frac{B_x}{a^x} \right)_{x=0} = \frac{B_n}{a^n} + (-1)^n \left(\frac{n}{a} + a^{-n} \sum_{s=1}^{s=n-1} s^{n-1} \right),$$

la formule (4), pour $x = 0$, donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} B_k a^k \sum_{s=1}^{s=n-1-k} s^{n-1-k} = a(1 - a^{n-2}) B_{n-1}.$$

5° Soit enfin

$$f(x) = \sin \theta x.$$

Au moyen de la formule (5), on trouve, pour $x = 0$,

$$\begin{aligned} & \lambda = E\left(\frac{n-1}{2}\right) \\ & \sum_{k=0}^{\lambda} (\sqrt{-1})^{2k} C_{2k}^n B_{,k} \varrho^{2k} \sin^{2k} \theta \sin(n - 2k)\theta \\ & = n \sin \theta \cos(n-1)\theta, \end{aligned}$$

$E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ désignant le plus grand entier contenu dans $\frac{n-1}{2}$.

II.

Désignons par $[s-h, s-2h, \dots, s-(m-1)h]_k$ la somme des produits des nombres $s-h, s-2h, \dots, s-(m-1)h$ combinés k à k et posons, pour abrégé,

$$\frac{hx}{e^{hx} - 1} = u, \quad \frac{B_n}{n} = \mathfrak{b}_n.$$

Comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^n e^{sx} u^m}{dx^n}\right)_{x=0} &= \frac{1}{m-1} \left\{ n[s-(m-1)h] \frac{d^{n-1} e^{sx} u^{m-1}}{dx^{n-1}} \right. \\ & \quad \left. - (n-m+1) \frac{d^n e^{sx} u^{m-1}}{dx^n} \right\}_{x=0}, \end{aligned}$$

on obtient

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^n e^{sx} u^m}{dx^n}\right)_{x=0} &= (-1)^{m-1} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \\ & \times \left\{ \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(-1)^k}{n-k} [s-h, s-2h, \dots, s-(m-1)h]_k \frac{d^{n-k} e^{sx} u}{dx^{n-k}} \right\}_{x=0} \end{aligned} \right.$$

et, pour $s = 0$,

$$\left(\frac{d^n u^m}{dx^n} \right)_{x=0} = (-1)^{m-1} h^n \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2.3\dots(m-1)} \\ \times \left[\sum_{k=0}^{k=m-1} (1, 2, 3, \dots, m-1)_k \frac{B_{n-k}}{n-k} \right],$$

ou, sous la forme symbolique,

$$\left(\frac{d^n u^m}{dx^n} \right)_{x=0} = (-1)^{m-1} h^n \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2.3\dots(m-1)} \\ \times \mathfrak{B}^{n-m+1} (\mathfrak{B} + 1)(\mathfrak{B} + 2)\dots(\mathfrak{B} + m - 1) \quad (*),$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n B_k B_{n-k} = - [(n-1)B_n + nB_{n-1}], \\ \sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k [(n-1-k)B_{n-k} + (n-k)B_{n-1-k}] \\ = B_n - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \left(\frac{B_n}{n} + 3 \frac{B_{n-1}}{n-1} + 2 \frac{B_{n-2}}{n-2} \right), \\ \dots \dots \dots$$

D'un autre côté

$$\left(\frac{d^n e^{sx} u^m}{dx^n} \right)_{x=0} = h^m \frac{d^m \Delta^{-m} s^n}{ds^m},$$

où $\Delta s = h$, et, par suite,

$$h^m \frac{d^m \Delta^{-m} f(x)}{dx^m} = f(x) + \left(\frac{du^m}{dx} \right)_{x=0} \frac{df(x)}{dx} \\ + \frac{1}{1.2} \left(\frac{d^2 u^m}{dx^2} \right)_{x=0} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots$$

(*) Dans le developpement du second membre de cette formule, les exposants de \mathfrak{B} doivent être remplacés par des indices de même valeur.

Donc on a

$$\begin{aligned}
 \Delta^{-m} f(x) &= \frac{1}{h^m} \int^{(m)} f(x) dx^m \\
 &- \frac{1}{h^{m-1}} \frac{[1, 2, 3, \dots, (m-1)]_1}{m-1} \int^{(m-1)} f(x) dx^{m-1} \\
 &+ \frac{1}{h^{m-2}} \frac{[1, 2, 3, \dots, (m-1)]_2}{(m-1)(m-2)} \int^{(m-2)} f(x) dx^{m-2} + \dots \\
 &+ \frac{(-1)^{m-1}}{h} \int f(x) dx + \frac{(-1)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \\
 &\times \left\{ \sum_{k=0}^{k=m-1} [1, 2, 3, \dots, (m-1)]_k \frac{B_{m-k}}{m-k} \right\} f(x) \\
 &+ h \left\{ \sum_{k=0}^{k=m-1} [1, 2, 3, \dots, (m-1)]_k \frac{B_{m+1-k}}{m+1-k} \right\} \frac{df(x)}{dx} \\
 &+ \frac{h^2}{1 \cdot 2} \left\{ \sum_{k=0}^{k=m-1} [1, 2, 3, \dots, (m-1)]_k \frac{B_{m+2-k}}{m+2-k} \right\} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dots \Big\},
 \end{aligned}$$

ou, sous la forme symbolique,

$$\begin{aligned}
 \Delta^{-m} f(x) &= \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^{m-1} \frac{h^{k-m} k(k-1)\dots(k-m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m)} \\
 &\times \mathfrak{B}^{k-m+1} (\mathfrak{B} + 1) \dots (\mathfrak{B} + m - 1) D^{k-m} f(x),
 \end{aligned}$$

formule générale de l'intégration successive.

Prenons la fonction

$$f(x) = (x+1, x+2, \dots, x+p-1)_n$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
 &\Delta^k (x+1, x+2, \dots, x+p-1)_n \\
 &= (p-1)(p-2)\dots(p-k) \\
 &\times (x+k+1, x+k+2, \dots, x+p-1)_{n-k},
 \end{aligned}$$

où $\Delta x = 1$, et

$$\begin{aligned} & \frac{d^k(x+1, x+2, \dots, x+p-1)_n}{dx^k} \\ &= (p-n)(p-n+1)\dots(p-n+k-1) \\ & \quad \times (x+1, x+2, \dots, x+p-1)_{n-k}, \end{aligned}$$

on tire de la formule précédente

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{k=n} C_k^{p-n+k-1} B_k[1, 2, 3, \dots, (p-1)]_{n-k} \\ &= (B+1, B+2, \dots, B+p-1)_n \\ &= \frac{p-n}{p} [1, 2, 3, \dots, (p-1)]_n, \\ & \dots \dots \dots, \\ & \sum_{k=0}^{k=n} C_k^{p-n+k-1} [1, 2, 3, \dots, (p-1)]_{n-k} \\ & \quad \times \sum_{s=0}^{s=m-1} [1, 2, 3, \dots, (m-1)]_s \frac{B_{m+k-s}}{m+k-s} \\ &= \mathfrak{B}(\mathfrak{B}+1)(\mathfrak{B}+2)\dots(\mathfrak{B}+m-1) \\ & \quad \times (\mathfrak{B}+1, \mathfrak{B}+2, \dots, \mathfrak{B}+p-1)_n \\ &= (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)}{p(p+1)\dots(p+m-1)} \\ & \quad \times [-1, -2, \dots, -(m-1), 1, 2, 3, \dots, (p-1)]_{n+m} \\ & \quad + \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^{m+k} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-k-1)}{(p-n-1)(p-n-2)\dots(p-n-m+k)} \\ & \quad \times [1, 2, 3, \dots, (m-1)]_k [1, 2, 3, \dots, (p-1)]_{n+m-k}. \end{aligned}$$

Remarque. — L'égalité (6) peut aussi s'obtenir au moyen de la formule

$$\begin{aligned} \Delta^{p-m} f(x) &= \frac{1}{h^{m-1}(p-1)\dots(p-m+1)} \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^k [x-h, \dots, x-(m-1)h]_k \\ & \quad \times \Delta^{p-1} [x-(m-1)h]^{m-1-k} f[x-(m-1)h], \end{aligned}$$

(19)

qui donne, pour $p = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta^{-m} f(x) &= \frac{(-1)^{m-1}}{h^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \\ &\times \sum_{k=0}^{h=m-1} (-1)^k [x-h, \dots, x-(m-1)h]_k \\ &\times \Delta^{-1} x^{m-1-k} f(x). \end{aligned}$$