Nouvelles annales de mathématiques

Rouquet

Note sur la continuité des racines des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 154-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__154_1>

NOTE SUR LA CONTINUITÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ;

PAR M. ROUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Marseille.

LEMME. — *Lorsque dans l'équation à coefficients réels ou imaginaires, mais finis,*

$$(1)\quad f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

les k derniers coefficients $p_m, p_{m-1}, \ldots, p_{m-k+1}$ *tendent* *vers zéro, de manière que p_{m-k} conserve une valeur différente de zéro, k racines tendent vers zéro et réciproquement.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les m racines de l'équation, qui varient en même temps que les coefficients, tout en restant finies comme ces coefficients eux-mêmes, k' le nombre des racines qui tendent vers zéro. Il s'agit de prouver que $k = k'$.

A cet effet, écrivons dans l'ordre suivant les relations entre les coefficients et les racines :

$$\begin{aligned}
&a_1 a_2 \ldots a_m = (-1)^m p_m,\\
&a_1 a_2 \ldots a_{m-1} + \ldots = (-1)^{m-1} p_{m-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_1 + \ldots = -p_1.
\end{aligned}$$

1° Supposons $k < k'$. Considérons les k' premières relations. Chacun des termes de toutes ces sommes de combinaisons renferme au moins l'une des k' racines qui tendent vers zéro, puisque le nombre des éléments contenus dans ces diverses combinaisons est au moins égal à $m - k' + 1$. Dès lors toutes ces sommes doivent tendre vers zéro, et, par suite, il doit en être de même des k' derniers coefficients de l'équation; donc on ne peut avoir $k < k'$.

2° Supposons, en second lieu, $k > k'$. Prenons alors la $(k' + 1)^{\text{ième}}$ relation, savoir :

$$a_1 a_2 \ldots a_{m-k'} + \ldots = (-1)^{m-k'} p_{m-k'},$$

$k' + 1$ étant au plus égal à k, $p_{m-k'}$ tend vers zéro, par hypothèse.

D'autre part, le premier membre se compose d'une somme de termes renfermant une ou plusieurs des racines qui tendent vers zéro, et d'un autre terme égal au produit des $m - k'$ racines conservant des valeurs différentes du zéro. Ce premier membre n'aurait donc pas zéro pour limite, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite, on n'a pas non plus $k > k'$, et la proposition est démontrée.

THÉORÈME. — *Si, pour un système de valeurs des coefficients, l'équation* (1) *admet k_1 racines égales à a_1, k_2 racines égales à $a_2, \ldots$, la nouvelle équation obtenue en faisant varier aussi peu qu'on voudra les coefficients de la première, admettra k_1 racines aussi voisines que l'on voudra de a_1, k_2 racines aussi voisines que l'on voudra de $a_2, \ldots$.*

Nous allons démontrer, par exemple, que la nouvelle équation aura k_1 racines aussi rapprochées que l'on voudra de a_1. Posons

$$(2) \qquad x = y + a_1.$$

L'équation transformée est

$$(3) \qquad y^m + y^{m-1}\frac{f^{m-1}(a_1)}{1.2\ldots(m-1)} + \ldots + yf'(a_1) + f(a_1) = 0.$$

Ses coefficients sont des fonctions entières et par suite continues de $p_1, p_2, \ldots$. Puisque, pour un système de valeurs des coefficients, l'équation (1) a k_1 racines égales à a_1, pour ces mêmes valeurs, l'équation (3) aura, en vertu de la relation (2), k_1 racines nulles, ce qui exige que l'on ait pour ces valeurs

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad \ldots, \quad f^{k_1-1}(a_1) = 0,$$

$f^{k_1}(a_1)$ n'étant pas nulle. Si maintenant on fait tendre les coefficients variables $p_1, p_2, \ldots$ vers les valeurs particulières dont il est question, $f(a_1), f'(a_1), \ldots, f^{k_1-1}(a_1)$ tendront vers zéro, $f^{k_1}(a_1)$ conservant une valeur différente de zéro. Il en résulte, d'après le lemme, que

k_1 racines de l'équation (3) tendront vers zéro, en sorte que l'équation (1) aura k_1 racines aussi voisines que l'on voudra de a_1, comme le montre encore la formule (2).

Théorème. — *Les mêmes conclusions subsistent pour l'équation générale*

$$(4) \qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

pourvu que le coefficient A_0 *ne tende pas vers zéro Si les* k *premiers coefficients tendent vers zéro, le* $(k+1)^{\text{ième}}$ *ayant une limite différente de zéro,* k *racines deviennent infinies, et les* $m-k$ *racines restantes tendent vers les racines de l'équation obtenue en supprimant dans la proposée les coefficients qui s'annulent et en y remplaçant les autres par leurs limites.*

1° Si A_0 ne tend pas vers zéro, nous pourrons diviser par A_0, et l'équation deviendra la suivante :

$$x^m + \frac{A_1}{A_0} x^{m-1} + \ldots + \frac{A_m}{A_0} = 0,$$

dont les coefficients varient d'une manière continue, puisque le dénominateur commun A_0 n'a pas zéro pour limite. Nous sommes dès lors ramenés au théorème précédent.

2° Si $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ tendent vers zéro, et si, en même temps, la limite de A_k n'est pas nulle, nous poserons

$$(5) \qquad x = \frac{\alpha y + 1}{y},$$

α désignant une constante.

La transformée en y sera

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0(\alpha y + 1)^m + A_1(\alpha y + 1)^{m-1} y + \ldots + A_{k-1} y^{k-1} \\ \quad \times (\alpha y + 1)^{m-k+1} + A_k y^k (\alpha y + 1)^{m-k} + \ldots + A_m y^m = 0. \end{array} \right.$$

Le coefficient de y^m, savoir $A_0 \alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + \ldots + A_m$

peut être supposé différent de zéro pour tous les systèmes de valeurs des coefficients que nous considérons. Il suffit, pour cela, de choisir α convenablement. $\Big($Par exemple, si la limite de A_m n'est pas nulle, on pourra faire $\alpha = 0$, ce qui donne la tranformation connue $x = \frac{1}{y}\Big)$.

Dès lors, d'après la première partie de la proposition, les racines de l'équation (6) varieront d'une manière continue avec ses coefficients et par suite avec $A_0, A_1, \ldots$. Or, si l'on introduit d'abord les hypothèses qui annulent $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$, l'équation (6) a k racines nulles, et les $m - k$ racines restantes sont fournies par l'équation

$$A_k(\alpha y + 1)^{m-k} + A_{k+1}\, y\, (\alpha y + 1)^{m-k-1} + \ldots + A_m y^{m-k} = 0,$$

obtenue en divisant par y^k, c'est-à-dire en supprimant les k racines nulles. Comme ces $m - k$ racines sont toutes différentes de zéro, puisque la valeur de A_k n'est pas nulle, cette nouvelle équation pourra s'écrire

$$(7)\quad A_k\left(\frac{\alpha y + 1}{y}\right)^{m-k} + A_{k+1}\left(\frac{\alpha y + 1}{y}\right)^{m-k-1} + \ldots + A_m = 0.$$

Si maintenant, à partir de ces valeurs particulières, nous faisons varier les coefficients d'une manière continue, l'équation (6), d'après la remarque faite plus haut, admettra k racines qui tendront vers zéro, et $m - k$ racines qui tendront vers les racines de l'équation (7), où $A_k, A_{k+1}, \ldots$ ont reçu leurs valeurs limites, résultant de premières hypothèses.

Cela posé, revenons à la formule (5). Aux k valeurs de y tendant vers zéro correspondront k valeurs infinies de x, et aux $m - k$ valeurs restantes de y correspondront $m - k$ valeurs de x continues, puisque le dénominateur y n'a pas maintenant zéro pour limite, et qui auront pour limites les racines de l'équation

$$A_k x^{m-k} + A_{k+1} x^{m-k-1} + \ldots + A_m = 0,$$

déduite de (7) par la substitution inverse.