

GAMBEY

**Solution de la question de mathématiques  
spéciales, proposée au concours d'admission  
à l'École polytechnique (1875)**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 174-177

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_174\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__174_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES,  
PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLY-  
TECHNIQUE (1875) ;**

PAR M. GAMBEY,  
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

---

*Trouver le lieu géométrique de l'intersection de deux  
normales menées à la parabole aux deux extrémités*

de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont une même valeur.

Que dire du cas où l'on fait tendre vers zéro cette valeur de la projection ?

Revenant au cas général, on propose de mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole.

*Application particulière au point maximum du lieu.*

Soient  $y^2 - 2px = 0$  et  $x_0, y_0, x_1, y_1$  l'équation de la parabole et les coordonnées de deux points de cette courbe;  $k$  la valeur constante de la projection orthogonale de la corde qui unit ces deux points.

Les équations des deux normales sont

$$p(y - y_0) + y_0(x - x_0) = 0, \quad p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$$

avec les conditions

$$y_0^2 = 2px_0, \quad y_1^2 = 2px_1, \quad y_1 = y_0 + k.$$

On élimine facilement  $x_0, x_1$  et  $y_1$ , ce qui conduit à ces deux équations

$$(1) \quad y_0^3 - 2p(x - p)y_0 - 2p^2y = 0,$$

$$(2) \quad 3y_0^2 + 3ky_0 + k^2 - 2px + 2p^2 = 0.$$

Une transformation facile donne cette autre

$$(3) \quad 3ky_0^2 + (k^2 + 4px - 4p^2)y_0 + 6p^2y = 0,$$

qui peut remplacer l'une des deux équations (1), (2). L'élimination de  $y_0$  entre (2) et (3) donne

$$\begin{aligned} & 32p^3x^3 - 12p^2(8p^2 + 3k^2)x^2 \\ & + (72k^2p^2 + 12k^4 + 96p^4)px - 108p^4y^2 \\ & - (k^6 + 36p^4k^2 + 12p^2k^4 + 32p^6) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(4) \quad 4p^3[8(x - p)^3 - 27py^2] = k^2[k^2 - 6p(x - p)]^2.$$

( 176 )

Elle représente une courbe du troisième degré, doublement tangente à la développée de la parabole qui a pour équation

$$8(x-p)^3 - 27py^2 = 0.$$

La ligne des contacts est donnée par

$$6p(x-p) = k^2;$$

elle est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

Pour  $k = 0$ , on trouve l'équation de la développée, ce qui pouvait être prévu.

Le lieu est une courbe formée d'une boucle et de deux branches infinies divergentes se croisant en un point double dont les coordonnées sont  $x = p + \frac{k^2}{2p}, y = 0$ .

Son sommet a pour coordonnées  $x = p + \frac{k^2}{8p}, y = 0$ .

Par chacun des points du lieu on peut mener trois normales à la parabole; proposons-nous de déterminer les coordonnées des pieds de ces normales.

Soient  $\alpha, \beta$  les coordonnées d'un point du lieu. L'équation (1), où nous ferons  $x = \alpha, y = \beta$ , déterminera les ordonnées des points cherchés. Soient  $y', y'', y'''$  ses trois racines; nous aurons les relations suivantes :

$$y' + 2y'' + k = 0,$$

$$2y'y'' + y''^2 + k(y' + y'') + 2p(\alpha - p) = 0.$$

Éliminant entre elles  $y''$ , il vient

$$y' = \pm \sqrt{\frac{8p\alpha - 8p^2 - k^2}{3}}.$$

Pour déterminer le signe qui convient, il faut vérifier l'équation (1). On obtiendra ensuite facilement les deux autres valeurs de  $y$ .

Le point maximum a pour coordonnées

$$\alpha = p + \frac{k^2}{4p}, \quad \beta = \frac{k^3}{12p^2\sqrt{3}}.$$

Si l'on applique la formule précédente à ce point, on obtient d'abord

$$y' = -\frac{k}{\sqrt{3}}.$$

Cette valeur vérifie l'équation (1); puis

$$y'' = -\frac{k}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$y''' = \frac{k}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Lez, Fiot, Moret-Blanc, Tourettes.