

J. GRIESS

**Concours d'admission à l'École centrale
(année 1875, 2e session)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 277-281

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__277_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE CENTRALE

(ANNÉE 1875, 2^e SESSION)

(voir p 85),

SOLUTION DE M. J. GRIESS,

Étudiant en Mathématiques a l'Ecole Polytechnique de Zurich.

On donne une circonférence et un point P sur un de

(*) La première des équations (5), ou

$$(3 + 2\sqrt{2})x^2 + y^2 - 2p(1 + \sqrt{2})x - p^2 = 0,$$

est celle qui convient au lieu géométrique du sommet de l'hyperbole équilatère, située du même côté de la directrice OY que le foyer F correspondant à cette droite. La seconde équation

$$(3 - 2\sqrt{2})x^2 + y^2 - 2p(1 - \sqrt{2})x - p^2 = 0$$

se rapporte à l'autre sommet.

La droite OA est un axe de symétrie commun aux deux ellipses, et le point donne A un sommet commun à ces deux courbes qui passent, l'une et l'autre, par les deux points D, D', où la directrice OY est rencontrée par la circonférence, lieu géométrique du foyer F correspondant.

Ces différentes propriétés, qui se déduisent des équations (5), peuvent être établies directement, en remarquant que, pour obtenir les sommets d'une hyperbole équilatère dont on donne une directrice OY et le foyer I qui lui correspond, il suffit de mener par le foyer F une perpendiculaire à la directrice OY, et de déterminer, sur la direction de cette perpendiculaire, des points dont les distances au foyer et à la directrice soient dans un rapport égal à $\sqrt{2}$. (G.)

ses diamètres AB; par le point P on mène à cette circonférence la sécante PCD qui la rencontre en C et en D, et par les quatre points A, B, C, D on fait passer une hyperbole équilatère :

- 1° Trouver l'équation de cette hyperbole;
- 2° Trouver le lieu du centre de cette hyperbole, quand la sécante PCD tourne autour du point P;
- 3° Trouver, dans les mêmes conditions, le lieu des points de contact des tangentes menées à cette hyperbole, perpendiculairement à AB;
- 4° Indiquer, d'après ce qui précède, la construction géométrique des asymptotes d'une quelconque des hyperboles considérées, et appliquer cette construction au cas où la sécante passe par l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à AB.

Je prends pour axe des x le diamètre AB, et pour axe des y le diamètre perpendiculaire à AB.

L'équation du cercle est

$$(1) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

L'équation de l'hyperbole équilatère peut s'écrire

$$(2) \quad x^2 + Bxy - y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

L'hyperbole doit passer par les points A et B; donc, si je fais $y = 0$, l'équation résultante $x^2 + Dx + F = 0$ aura pour racine $+r$ et $-r$, ce qui donne

$$D = 0, \quad F = -r^2,$$

et par suite l'équation (2) devient

$$(3) \quad x^2 + Bxy - y^2 + Ey - r^2 = 0.$$

Soit a l'abscisse OP du point P, l'équation d'une sécante PCD, menée de ce point, sera

$$y = m(x - a).$$

Les abscisses des points C, D devront vérifier à la fois les équations

$$x^2 + m^2(x - a)^2 - r^2 = 0$$

et

$$x^2 + Bxm(x - a) - m^2(x - a)^2 + Em(x - a) - r^2 = 0.$$

En développant et identifiant ces équations, on trouve

$$B = 2m, \quad E = -2am \text{ (*)},$$

Donc :

1° *L'équation de l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre points A, B, C, D est*

$$(4) \quad x^2 + 2mxy - y^2 - 2amy - r^2 = 0.$$

Les équations du centre de cette hyperbole sont

$$x + my = 0, \quad y - m(x - a) = 0.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on a

$$x^2 + y^2 - ax = 0;$$

par conséquent :

2° *Le lieu du centre de cette hyperbole, quand la sécante PCD tourne autour du point P, est la circonférence décrite sur OP comme diamètre.*

On pouvait le prévoir, car, le coefficient angulaire de la droite $x + my = 0$ étant $-\frac{1}{m}$, on voit que cette

(*) En retranchant les équations (1) et (3) membre à membre, il vient

$$2y^2 - Bxy - Ey = 0, \quad \text{d'où } y(2y - Bx - E) = 0;$$

cette dernière équation représente le système des deux cordes AB, CD, communes au cercle et à l'hyperbole. Il en résulte que $2y - Bx - E = 0$, ou $y = \frac{B}{2}x + \frac{E}{2}$ est l'équation de la droite PCD; et, comme la même droite a pour équation $y = mx - am$, on a nécessairement

$$B = 2m, \quad E = -2am. \quad (G.)$$

droite est la perpendiculaire abaissée du centre O du cercle sur la sécante, et que le centre M de l'hyperbole est le milieu de la corde CD, ou le sommet d'un angle droit OMP, dont les côtés passent par les deux points fixes P et O.

3° *Lieu des points de contact des tangentes menées aux hyperboles, perpendiculairement à AB.*

Le coefficient angulaire de l'une quelconque de ces tangentes est *

$$-\frac{f'_x}{f''} = \frac{x + my}{y - m(x - a)}.$$

Pour que cette tangente soit perpendiculaire à AB, qui est l'axe des x , il faut que son coefficient angulaire soit infini, c'est-à-dire que $y - m(x - a) = 0$. Or, les points de l'hyperbole situés sur la droite que l'équation $y - m(x - a) = 0$ représente sont les points C, D d'intersection de la sécante PCD et du cercle; donc le lieu demandé est la circonférence donnée elle-même.

4° *Construction géométrique des asymptotes et application au cas où la sécante PCD passe par l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à AB.*

Soit PCD une sécante quelconque : le centre de l'hyperbole est, comme on l'a démontré (2°), le milieu M de la corde CD, qui est par conséquent un diamètre de la courbe. Les tangentes sont, aux extrémités C, D de ce diamètre, perpendiculaires à AB (3°); donc le diamètre conjugué de CD est aussi perpendiculaire à AB. Or, l'hyperbole étant équilatère, les asymptotes sont bissectrices des angles de deux diamètres conjugués; on construira donc les asymptotes en menant par le point M les bissectrices des angles que la sécante forme avec la perpendiculaire abaissée de M sur AB.

Dans le cas particulier où la sécante PCD passe par

l'extrémité **D** d'un diamètre perpendiculaire à **AB**, l'angle **DOP** étant droit, la circonférence décrite sur **DP** comme diamètre passe par le point **O**.

Du centre de ce nouveau cercle, je mène une perpendiculaire à **OP**, qui coupera l'arc **OP** en son milieu **N**; puis, du centre **M** de l'hyperbole, je mène une parallèle à **DN** : ce sera l'une des deux asymptotes; l'autre lui est perpendiculaire.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez et Wisselink.