

AUBERT

**Question proposée au concours général de
mathématiques élémentaires, année 1875**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 318-321

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__318_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION PROPOSÉE
AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES,
ANNÉE 1875

(voir t. XV, p. 88);

SOLUTION DE M. AUBERT,
Professeur de Mathématiques au lycée de Rennes.

On donne les côtés a, b, c d'un triangle ABC ; des sommets A, B, C , comme centres, on décrit trois circonférences qui se touchent deux à deux extérieurement : déterminer les rayons des deux circonférences tangentes aux trois premières.

I. Calcul du rayon du cercle tangent extérieurement.

Soient :

R, R', R'' les rayons des circonférences données, qui ont pour centres les sommets A, B, C du triangle ABC ;

T, T', T'' les points auxquels les circonférences données B, C ; C, A ; A, B se touchent deux à deux (*);

O le centre du cercle tangent extérieurement aux circonférences A, B, C , en des points a, b, c ; et ρ le rayon de ce cercle;

M le centre de similitude *externe* des circonférences O et C .

On sait que les trois points M, b, T sont en ligne droite et que $Mb \times MT = \overline{Mc}^2$. Les trois points M, a, T'

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

appartiennent de même à une ligne droite, et l'on a aussi $Ma \times MT' = \overline{Mc}^2$. Il s'ensuit que les puissances du point M par rapport aux deux circonférences A, B sont égales entre elles; donc le point M se trouve sur la perpendiculaire élevée au point T'' à la droite AB, puisque cette perpendiculaire est une tangente commune aux deux circonférences A, B, au point T''. Et, comme

$$MT''^2 = Ma \times MT' = \overline{Mc}^2,$$

on a

$$MT'' = Mc.$$

Soit $x = MT'' = Mc$. Les distances du point M aux centres des circonférences O et C étant proportionnelles aux rayons ρ et R'' de ces circonférences, on aura

$$\frac{x - \rho}{x + R''} = \frac{\rho}{R''};$$

d'où

$$(1) \quad \rho = \frac{R''x}{x + 2R''},$$

relation qui montre que la valeur de x entraîne celle de ρ .

Cela posé, menons du sommet C une perpendiculaire CH sur le côté AB du triangle ABC, et par le point M une parallèle MN à AB, rencontrant CH en un point N. Soient $CH = h$ et $AH = d$, d'où

$$NH = MT'' = x, \quad MN = HT'' = AT'' - AH = R - d,$$

et

$$CN = CH - NH = h - x.$$

Le triangle rectangle CMN donne

$$CN^2 = \overline{MN}^2 + \overline{CN}^2, \quad \text{ou} \quad (x + R'')^2 = (R - d)^2 + (h - x)^2,$$

et, en remarquant que $d^2 + h^2 = (R + R'')^2$,

$$x = \frac{R^2 + RR'' - R'd}{R' + h}.$$

En remplaçant x par cette valeur, l'équation (1) devient

$$(2) \quad \rho = \frac{RR''(R + R'' - d)}{R + RR'' - R'd + 2R''(R' + h)}.$$

Dans le triangle ABC, on a

$$d = \frac{R^2 + RR' + RR'' - R'R''}{R + R'} \quad \text{et} \quad h = \frac{2S}{R + R'},$$

en nommant S la surface du triangle.

La substitution de ces valeurs de d et de h dans l'équation (2) donne

$$\rho = \frac{RR'R''}{RR' + R'R'' + R''R + 2S}.$$

2. *Calcul du rayon du cercle tangent intérieurement.*

Des considérations tout à fait analogues à celles qui précèdent permettent de calculer la valeur du rayon du cercle tangent intérieurement aux trois circonférences données. Il suffit, pour cela, en s'appuyant sur les mêmes théorèmes, de substituer au centre de similitude externe le centre de similitude interne. Dès le début des calculs, on remarque qu'en changeant ρ en $-\rho$ et h en $-h$, les équations restent les mêmes; il suffit donc de changer, dans le résultat obtenu, ρ en $-\rho$, et S en $-S$; d'où

$$\rho = \frac{RR'R''}{2S - RR' - R'R'' - R''R}.$$

Remarque. Dans la question proposée, on a donné les côtés a , b , c au lieu de R , R' , R'' ; mais on sait que

$R = p - a$, $R' = p - b$, et $R'' = p - c$. La substitution de ces valeurs à R , R' , R'' donnera les deux rayons cherchés en fonction des côtés du triangle. Pour le premier, par exemple, on aura

$$\rho = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + 2S}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{2}{S}$$

ou, en désignant par r' , r'' , r''' les rayons des trois cercles exinscrits au triangle ABC,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{S} (r' + r'' + r''' + 2p);$$

ou bien encore

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{S} (r' + r'' + r''') + \frac{2}{r},$$

r étant le rayon du cercle inscrit.

Note. — La même question a été résolue par MM. Chadu, Sondat, Gambey et Wisselink.