

CAUCHY

**Mémoire sur l'élimination d'une variable
entre deux équations algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 385-416

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__385_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE
SUR L'ÉLIMINATION D'UNE VARIABLE ENTRE DEUX ÉQUATIONS
ALGÈBRIQUES;

PAR CAUCHY (*).

Considérations générales.

Euler et Bezout ont reconnu que, dans l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques, la multiplication peut être substituée à la division. Il y a plus : ces auteurs ont exposé trois méthodes remarquables d'élimination, toutes trois indépendantes de la division algébrique.

Une première méthode d'élimination, qui se trouve exposée par Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* dès l'année 1749, et qui, au jugement d'Euler, pourrait être attribuée à Newton lui-même, consiste à remplacer deux équations algébriques d'un même degré n par deux équations algébriques du degré immédiatement inférieur $n - 1$. Si, avec un auteur anglais, M. Sylvester, on nomme *équations dérivées* toutes celles qui se déduisent du système des deux équations données, les deux nouvelles équations seront deux dérivées du degré $n - 1$, savoir celles qu'on obtient lorsque l'on combine entre elles, par voie de soustraction, les deux équations algébriques données, après avoir multiplié chacune d'elles par le premier et par le dernier des coefficients que renferme l'autre.

(*) Sur la demande de plusieurs professeurs, nous reproduisons ce Mémoire, emprunte aux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de l'illustre géomètre.

Cette première méthode est d'ailleurs applicable au cas même où les degrés des équations algébriques données sont inégaux, attendu qu'une équation d'un degré inférieur à n peut être considérée comme une équation du degré n , dans laquelle les coefficients de quelques termes se réduisent à zéro.

Suivant une seconde méthode, donnée à Paris par Bezout et à Berlin par Euler, dans les *Mémoires de l'Académie de 1764*, pour éliminer une inconnue x entre deux équations algébriques données dont les degrés sont n et m , il suffit de combiner ces équations entre elles par voie d'addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polynômes dont le premier soit du degré $m - 1$, le second du degré $n - 1$; puis de choisir les coefficients de ces polynômes de manière à faire disparaître dans l'équation résultante toutes les puissances de x . L'élimination de x entre les deux équations algébriques données se réduit donc à l'élimination des coefficients dont nous venons de parler, entre les équations linéaires auxquelles ces mêmes coefficients doivent satisfaire, c'est-à-dire, en d'autres termes, au calcul d'une *fonction alternée*, formée avec les coefficients des deux équations algébriques, et l'on est ainsi conduit immédiatement à la règle d'élimination énoncée par M. Sylvester, dans le numéro 101 du *Philosophical Magazine* (février 1840). La fonction alternée dont il s'agit est, d'ailleurs, comme l'a remarqué M. Richelot, et comme on devait s'y attendre, celle qui se déduit directement de l'élimination des diverses puissances de x entre les équations algébriques données et ces mêmes équations respectivement multipliées par celles de ces puissances dont les degrés sont inférieurs aux nombres m ou n .

En examinant de près les deux méthodes d'élimination que nous venons de rappeler, et les comparant l'une

à l'autre, on reconnaît aisément que la première méthode introduit dans le premier membre de l'équation finale des facteurs qui sont naturellement étrangers à cette même équation. Il n'en est pas de même de la seconde méthode. Mais la fonction alternée, dont celle-ci exige la formation, résultera d'une élimination effectuée entre $m + n$ équations linéaires, m , n étant les degrés des équations algébriques données, et sera par conséquent de l'ordre $m + n$, si l'on mesure l'ordre d'une fonction alternée par le nombre des facteurs contenus dans chacun des termes dont elle se compose. D'ailleurs, pour une fonction alternée de l'ordre n , le nombre des termes serait égal au produit

$$1.2.3\dots n.$$

Donc, pour une fonction alternée de l'ordre $n + m$, le nombre des termes sera représenté généralement par le produit

$$1.2.3\dots(m+n).$$

Or ce produit devient très-grand pour des valeurs même peu considérables de m et de n . Si, pour fixer les idées, on suppose

$$m = 4, \quad n = 4,$$

c'est-à-dire, si les équations algébriques données sont l'une et l'autre du quatrième degré, le premier membre de l'équation finale sera une fonction alternée du huitième ordre, et qui, en raison de cet ordre, devrait renfermer

$$1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$$

termes. Il est vrai que sur ces 40320 termes beaucoup s'évanouissent. Mais la recherche des valeurs et surtout des signes des termes qui ne s'évanouissent pas demandera trop d'attention, et le nombre même de ces termes

sera encore trop considérable pour que l'on n'arrive pas sans beaucoup de peine à former la fonction alternée du huitième ordre, qu'il s'agissait d'obtenir.

Comme le nombre des termes d'une fonction alternée décroît très-rapidement avec l'ordre de cette fonction, il est clair que, si le premier membre de l'équation finale peut être représenté par deux fonctions alternées d'ordres différents, formées avec deux systèmes de quantités déterminées, celle de ces deux fonctions qui sera d'un ordre moindre sera aussi généralement la plus facile à calculer. Or, comme Bezout l'a fait voir dans son Mémoire de 1764, le problème de l'élimination d'une inconnue x entre deux équations algébriques données peut être réduit à la formation d'une fonction alternée dont l'ordre ne surpasse pas le degré de chacune de ces équations, et cette réduction peut être effectuée sans qu'aucun facteur étranger se trouve introduit. C'est même par un procédé très-simple que Bezout réduit généralement l'élimination de x entre deux équations algébriques du degré n , à la formation d'une seule fonction alternée de l'ordre n . Si, pour faciliter les calculs, on dispose en carré les diverses quantités dont cette fonction alternée se compose, les quantités situées sur une diagonale seront les seules qui ne se trouveront pas répétées, et les autres seront deux à deux égales entre elles, deux quantités égales étant toujours placées symétriquement de part et d'autre de la diagonale dont il s'agit. En conséquence l'équation finale, telle que Bezout l'obtient, a pour premier membre une fonction alternée de l'ordre n , formée avec des quantités dont le nombre se trouve représenté simplement par la somme :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

... dont se

compose cette fonction alternée, s'abaisse au-dessous du produit

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n,$$

plusieurs de ces termes étant égaux deux à deux, et deux termes égaux pouvant être toujours réunis l'un à l'autre, de manière à former un seul terme qui renferme l'un des facteurs numériques

$$2, 4, 8, \dots$$

Si, pour fixer les idées, on suppose que les deux équations algébriques données soient du quatrième degré, le premier membre de l'équation finale, obtenue comme on vient de le dire, sera représenté non plus par une fonction alternée du huitième ordre, c'est-à-dire de l'ordre de celles qui renferment généralement 40320 termes, mais par une fonction alternée du quatrième ordre, et qui, en raison de cet ordre, devra renfermer seulement 24 termes. Ajoutons même que ces 24 termes se réduiront à 17, quatorze étant deux à deux égaux entre eux.

Il est encore essentiel d'observer que la fonction alternée dont il s'agit est du genre de celles que l'on obtient quand on élimine diverses variables x, y, z, \dots , entre les diverses dérivées d'une équation homogène du second degré, et par conséquent du genre de celles qui expriment que l'un des demi-axes d'une ellipse ou d'un ellipsoïde devient infini, l'ellipse se transformant alors en une droite, ou l'ellipsoïde en un cylindre.

C'est d'abord aux deux méthodes d'élimination ci-dessus rappelées, puis ensuite à la méthode de Bezout, que se rapporteront les deux premiers paragraphes de ce Mémoire. Dans le dernier paragraphe, j'édifierai d'un théorème donné par Euler une quatrième méthode qui offre de grands avantages, quand les degrés

des équations données ne se réduisent pas à des nombres peu considérables.

§ 1^{er}. — *Méthodes d'élimination de Bezout et d'Euler.*

Soient

$$(1) \quad f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première du degré n , la seconde du degré $m =$ ou $< n$. Suivant la méthode donnée à Paris par Bezout et à Berlin par Euler en l'année 1764, pour éliminer x entre les deux équations données, il suffira de les combiner entre elles par addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polynômes

$$u, v,$$

dont le premier soit du degré $m - 1$, le second du degré $n - 1$, puis de choisir les coefficients de ces polynômes de manière à faire disparaître, dans l'équation résultante, toutes les puissances de x . Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions $f(x)$, $F(x)$ soient l'une du troisième degré, l'autre du second, en sorte qu'on ait

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad F(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Alors u , v devront être de la forme

$$u = Px + Q, \quad v = px^2 + qx + r;$$

et, si l'on élimine x entre les deux équations

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

l'équation résultante sera précisément celle qu'on obtiendra, lorsqu'on choisira les coefficients

$$p, q, r, P, Q,$$

de manière à faire disparaître x de la formule

$$(2) \quad u f(x) + v F(x) = 0,$$

par conséquent de la formule

$$(Px + Q)f(x) + (px^2 + qx + r)F(x) = 0,$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$(3) \quad Px f(x) + Qf(x) + p.x^2 F(x) + qx F(x) + rF(x) = 0.$$

Les valeurs de

$$p, q, r, P, Q$$

qui remplissent cette condition sont celles qui vérifient les équations linéaires

$$(4) \quad \begin{cases} aP + Ap & = 0, \\ bP + aQ + Bp + Aq & = 0, \\ cP + bQ + Cp + Bq + Ar & = 0, \\ dP + cQ + Cq + Br & = 0, \\ & dQ + Cr = 0. \end{cases}$$

Donc, pour obtenir la résultante cherchée, il suffira d'éliminer les coefficients

$$P, Q, p, q, r,$$

entre les équations (4), ou, ce qui revient au même, d'égaliser à zéro la fonction alternée formée avec les quantités que présente le tableau

$$(5) \quad \begin{cases} a, 0, A, 0, 0, \\ b, a, B, A, 0, \\ c, b, C, B, A, \\ d, c, 0, C, B, \\ 0, d, 0, 0, C. \end{cases}$$

On arriverait encore aux mêmes conclusions en partant de la formule (3). En effet, choisir les coefficients

P, Q, R, p, q, r, de manière à faire disparaître de cette formule les diverses puissances

$$x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1},$$

de la variable x , c'est éliminer ces puissances des cinq équations

$$(6) \quad x f(x) = 0, \quad f(x) = 0, \quad x^2 F(x) = 0, \quad x F(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

ou

$$(7) \quad \begin{cases} a x^2 + b x + c = 0, \\ a x + b = 0, \\ x^2 + p x + q = 0, \\ x + p = 0, \\ x^2 + r x + \xi = 0. \end{cases}$$

C'est donc égalé à zéro la fonction alternée formée avec les quantités que présente le tableau

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & 0, \\ 0, & a, & b, & c, & d, \\ A, & B, & C, & 0, & 0, \\ 0, & A, & B, & C, & 0, \\ 0, & 0, & A, & B, & C. \end{vmatrix}$$

Or cette fonction alternée ne différera pas de celle que nous avons déjà mentionnée, attendu que, pour passer du tableau (5) au tableau (8), il suffit de remplacer les lignes horizontales par les lignes verticales, et réciproquement. Ainsi la méthode d'élimination, indiquée à la fois par Bezout et par Euler en 1764, conduit précisément à la règle énoncée par M. Sylvester dans le n° 101 du *Philosophical Magazine* (février 1840). On pourrait même considérer la règle dont il s'agit comme établie par Bezout dans le Mémoire de 1764, page 318. D'ailleurs la considération des équations (6) ou (7), qui subsistent toujours en même temps que les équations (1),

et s'en déduisent immédiatement, fournit de cette règle une démonstration tellement simple, qu'elle peut être introduite sans inconvénient dans les éléments d'Algèbre.

Observons toutefois que l'ordre ou le degré de la fonction alternée, dont cette règle exige la formation, c'est-à-dire le nombre des quantités qui entrent comme facteurs dans chacun des termes dont cette fonction se compose, est toujours égal à la somme $m + n$ des degrés des deux équations données. Cette même somme, diminuée seulement d'une unité, représenterait le nombre des puissances de x qui doivent être éliminées des équations (6) ou d'autres semblables, ainsi que le degré de deux de ces équations. On peut demander s'il ne serait pas possible d'arriver à l'équation résultante, à l'aide de multiplications algébriques, en opérant de manière à ne pas introduire dans le calcul des puissances de x supérieures à celles que renferment les deux équations proposées. Cette dernière condition se trouve effectivement remplie, lorsque l'on se sert pour effectuer l'élimination d'une ancienne méthode indiquée par Euler dès l'année 1748 dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*. Suivant cette ancienne méthode, qu'Euler semble attribuer à Newton dans le Mémoire de 1764, étant données deux équations en x d'un même degré n , par exemple, les deux suivantes

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + gx^1 + hx + k = 0,$$

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Gx^2 + Hx + K = 0,$$

on commencera par leur substituer deux équations du degré $n - 1$, savoir celles que l'on obtient en combinant par voie de soustraction les deux premières, respectivement multipliées l'une par A , l'autre par a , ou l'une par

$\frac{K}{x}$, l'autre par $\frac{k}{x}$. Après avoir ainsi remplacé les deux équations proposées par les deux suivantes :

$$\begin{aligned} & (Ab - aB)x^{n-1} + (Ac - aC)x^{n-2} + \dots \\ & \quad + (Ah - aH)x + Ak - aK = 0, \\ & (Ak - aK)x^{n-1} + (Bk - bK)x^{n-2} + \dots \\ & \quad + (Gk - gK)x + Hk - hK = 0, \end{aligned}$$

on remplacera celles-ci à leur tour, à l'aide d'un semblable procédé, par deux équations du degré $n - 2$; et, en continuant de la sorte, on finira par obtenir une seule équation du degré zéro qui sera la résultante cherchée.

Pour s'assurer que la même méthode reste applicable à l'élimination de la variable x entre deux équations de degrés inégaux n et $m < n$, il suffit d'observer qu'une équation de degré inférieur à n peut être envisagée comme une équation du degré n , dans laquelle les premiers coefficients se réduiraient à zéro.

En examinant les deux formes sous lesquelles peut se présenter l'équation résultante ou finale, suivant que l'on emploie pour l'élimination de x l'une ou l'autre des deux méthodes que nous venons de rappeler, on reconnaîtra que le premier membre de cette équation, considéré comme fonction des coefficients

$$a, b, c, \dots, A, B, C, \dots,$$

est, dans le cas où l'on se sert des polynômes multiplicateurs u et v , une fonction du degré $m + n$, et par suite, quand on suppose $m = n$, une fonction du degré $2n$. Au contraire, l'ancienne méthode substitue successivement à deux équations données, dont les premiers membres sont du degré n par rapport à la variable x , et

du premier degré par rapport aux coefficients

$$a, b, c, \dots, A, B, C, \dots,$$

des équations diverses dont les premiers membres sont d'abord du degré $n - 1$ par rapport à x , et du second degré par rapport aux mêmes coefficients; puis du degré $n - 2$ par rapport à x , et du quatrième degré par rapport aux coefficients, etc. Donc l'équation finale, déduite de l'ancienne méthode, sera du degré 2^n par rapport aux coefficients

$$a, b, c, \dots, A, B, C, \dots$$

Donc, lorsque n surpasse 2, l'ancienne méthode introduit dans l'équation finale un facteur étranger dont le degré est

$$2^n - 2n.$$

On trouve dans l'ouvrage d'Euler qui a pour titre : *Introductio in analysin infinitorum*, et mieux encore, dans un Mémoire de M. Gergonne, l'indication de procédés que l'on peut employer pour débarrasser le premier membre de l'équation finale du facteur étranger, ou même pour éviter l'introduction de ce facteur. Mais ces procédés exigent que l'on s'élève graduellement du cas où l'on suppose $n = 2$, au cas où l'on suppose $n = 3$, puis de ce dernier au cas où l'on suppose $n = 4$, etc.; et l'on peut, comme Bezout l'a fait voir, substituer aux deux méthodes d'élimination ci-dessus rappelées une troisième méthode qui, sans introduire aucun facteur étranger dans le premier membre de l'équation finale, réduit la détermination de ce premier membre à la formation d'une fonction alternée dont l'ordre ne surpasse jamais le degré de chacune des équations données.

§ II. — *Méthode abrégée de Bezout.*

Soient toujours

$$(1) \quad f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première du degré n , la seconde du degré $m =$ ou $< n$. On pourra supposer généralement

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \\ F(x) &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m, \end{aligned}$$

un ou plusieurs des coefficients

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots$$

devant être réduits à zéro, dans le cas où l'on aurait $m < n$; et l'équation finale, qui résultera de l'élimination de la variable x entre les formules (1), exprimera simplement la condition à laquelle les coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad \dots, \quad a_n, \quad b_0, \quad b_1, \quad \dots, \quad b_n$$

devront satisfaire, pour que les équations (1) soient vérifiées par une seule et même valeur de x . Voyons maintenant comment on devra s'y prendre pour effectuer cette élimination, c'est-à-dire pour éliminer des deux formules

$$(2) \quad \begin{cases} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0, \end{cases}$$

les puissances de la variable x représentées par les divers termes de la suite

$$x^n, \quad x^{n-1}, \quad \dots, \quad x.$$

J'observerai d'abord que, pour éliminer x^n entre les équations (2), il suffit de combiner entre elles, par voie

de division, ces deux équations présentées sous les formes

$$\begin{aligned} a_0 x^{n-l} + \dots + a_l x^l &= -(a_{l+1} x^{l-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n), \\ b_0 x^{n-l} + \dots + b_l x^l &= -(b_{l+1} x^{l-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n), \end{aligned}$$

l désignant l'un quelconque des nombres

$$0, 1, 2, \dots, n-2, n-1.$$

On trouvera ainsi

$$(3) \frac{a_0 x^{n-l} + a_1 x^{n-l-1} + \dots + a_l}{b_0 x^{n-l} + b_1 x^{n-l-1} + \dots + b_l} = \frac{a_{l+1} x^{l-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_{l+1} x^{l-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n};$$

puis, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$(4) \begin{cases} (a_0 x^{n-l} + a_1 x^{n-l-1} + \dots + a_l) \\ \times (b_{l+1} x^{l-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n) \\ - (b_0 x^{n-l} + b_1 x^{n-l-1} + \dots + b_l) \\ \times (a_{l+1} x^{l-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) = 0. \end{cases}$$

Si, pour abrégér, on désigne par

$$A_{k,l}$$

le coefficient de x^{n-k-l} dans le premier membre de l'équation (4), on aura non-seulement, quels que soient k et l ,

$$(5) \quad A_{k,l} = A_{l,k},$$

mais encore, pour $k < l$,

$$(6) \quad \begin{cases} A_{0,l} = a_0 b_{l+1} - b_0 a_{l+1}, \\ A_{1,l} = a_1 b_{l+1} - b_1 a_{l+1} + A_{0,l+1}, \\ A_{2,l} = a_2 b_{l+1} - b_2 a_{l+1} + A_{1,l+1}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

et l'équation (4) deviendra

$$(7) \quad A_{0,l} x^{n-1} + A_{1,l} x^{n-2} + \dots + A_{n-l,l} x + A_{n-1,l} = 0.$$

rappeler ne diffère pas au fond de celle que Bezout a indiquée dans le Mémoire de 1764, p. 319.

Il est facile de voir quel sera le degré de la quantité s , déterminée par cette méthode, et considérée comme fonction des coefficients

$$a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n.$$

En effet, chaque terme de s renfermant n facteurs de la forme $A_{k,l}$, et chacun de ces facteurs étant du second degré, en vertu des équations (6), s ou le premier membre de l'équation finale sera nécessairement du degré $2n$, tout comme dans le cas où l'on applique la règle énoncée par M. Sylvester. Il y a plus; on peut déjà pressentir la réalité d'une assertion qui sera plus tard changée en certitude, savoir que la valeur de s , fournie par la méthode abrégée, coïncide, au signe près, avec celle que fournirait la règle dont il s'agit. Effectivement, d'après cette règle, lorsqu'on suppose $m = n$, le premier membre de l'équation finale renferme une seule fois le terme

$$a_0^n b_n^n.$$

Or ce même terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, se retrouve encore une seule fois dans la fonction alternée $\pm s$ formée à l'aide du tableau (10), savoir dans la partie de $\pm s$ qui est représentée par le produit

$$A_{0,n-1} A_{1,n-2} \dots A_{1,n-2} A_{0,n-1},$$

et même dans la partie de ce produit qui, en vertu des formules

$$\begin{aligned} A_{1,n-2} &= a_1 b_{n-1} - b_1 a_{n-1} + A_{0,n-1}, \\ A_{2,n-3} &= a_2 b_{n-2} - b_2 a_{n-2} + A_{1,n-2}, \\ &= a_2 b_{n-2} - b_2 a_{n-2} + a_1 b_{n-1} - b_1 a_{n-1} + A_{0,n-1}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

se réduit simplement à la puissance

$$A_{0,n-1}^n = (a_0 b_n - a_n b_0)^n.$$

Il importe d'observer que, dans le carré figuré par le tableau (6), les termes de la forme

$$A_{l,l}$$

se trouvent tous situés sur une même diagonale, et que les autres termes sont égaux deux à deux, les termes égaux étant placés symétriquement par rapport à la diagonale dont il s'agit. Cette propriété du tableau (6) est une conséquence immédiate de la formule (5), et entraîne à son tour la proposition suivante :

THÉORÈME. — *L'équation finale (9), qui résulte de l'élimination de x entre les équations (2), est aussi celle que l'on obtiendrait en éliminant n variables*

$$x, y, z, \dots$$

entre les diverses dérivées d'une équation du second degré

$$(11) \quad s = 0,$$

dans laquelle on aurait

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = A_{0,0}x^2 + A_{1,1}y^2 + A_{2,2}z^2 + \dots \\ \quad + 2A_{0,1}xy + 2A_{0,2}xz + \dots + 2A_{1,2}yz + \dots \end{array} \right.$$

L'équation (9) est donc celle que l'on obtiendrait en assujettissant les variables x, y, z, \dots à la condition

$$(13) \quad s = \text{const},$$

et cherchant la relation qui doit exister entre les coefficients

$$A_{0,0}, A_{0,1}, A_{0,2}, \dots, A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{2,2}, \dots$$

pour qu'une valeur maximum ou minimum de la fonction r , déterminée par la formule

$$(14) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots},$$

devienne infinie.

§ III. — *Usage des fonctions symétriques dans la théorie de l'élimination.*

Dans les paragraphes précédents, nous avons rappelé trois méthodes d'élimination, et, quoique deux de ces méthodes n'introduisent dans l'équation finale aucun facteur étranger, toutes deux, même la plus concise, la méthode abrégée de Bezout, deviennent à peu près impraticables, lorsque les degrés des équations données s'élèvent au delà du cinquième ou du sixième, à moins que l'on n'ait recours, pour la formation des fonctions alternées, à des artifices de calcul qui permettent, comme nous l'expliquerons dans un autre Mémoire, d'évaluer ces fonctions sans calculer séparément chacun de leurs termes. De semblables artifices ne deviennent point nécessaires lorsqu'on fait servir à l'élimination une quatrième méthode fondée sur un théorème d'Euler et sur la considération des fonctions symétriques. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient toujours

$$(1) \quad f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première du degré n , la seconde du degré m ; et supposons, pour plus de commodité, les coefficients des plus hautes puissances de x , dans ces mêmes équations, réduits à l'unité, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$f(x) = x^n + lx^{n-1} + \dots + px + q,$$

$$F(x) = x^m + Lx^{m-1} + \dots + Px + Q.$$

Enfin désignons respectivement par

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

et par

$$\lambda, \mu, \nu, \dots$$

les racines de la première et de la seconde des équations (1), de sorte qu'on ait encore

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots,$$

$$F(x) = (x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu) \dots$$

Pour que les équations (1) subsistent simultanément, ou, en d'autres termes, soient vérifiées par une même valeur de x , il sera nécessaire et il suffira que les coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q$$

soient liés entre eux, de manière que les racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \quad \lambda, \mu, \nu, \dots$$

satisfassent à l'une des conditions

$$\alpha = \lambda, \quad \alpha = \mu, \quad \alpha = \nu, \quad \dots,$$

$$\beta = \lambda, \quad \beta = \mu, \quad \beta = \nu, \quad \dots,$$

$$\gamma = \lambda, \quad \gamma = \mu, \quad \gamma = \nu, \quad \dots,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots,$$

par conséquent à la condition

$$(2) \quad S = 0,$$

la valeur de S étant

$$S = (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \dots \\ \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots$$

Donc, si l'on adopte cette valeur de S , l'équation (2) devra s'accorder, ou même coïncider, avec l'équation finale que produirait l'élimination de x entre les équations (1) : c'est en cela que consiste le théorème d'Euler.

Il est facile de s'assurer que la valeur de s , déterminée comme on vient de le dire, sera une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q.$$

En effet cette valeur se réduit, au signe près, au dernier terme de l'équation qui aurait pour racines les binômes

$$\alpha - \lambda, \quad \alpha - \mu, \quad \alpha - \nu, \quad \dots,$$

$$\epsilon - \lambda, \quad \epsilon - \mu, \quad \epsilon - \nu, \quad \dots,$$

$$\gamma - \lambda, \quad \gamma - \mu, \quad \gamma - \nu, \quad \dots$$

Donc elle sera une fonction entière des quantités de la forme

$$S_1, S_2, \dots, S_{mn},$$

si l'on pose généralement

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_i = (\alpha - \lambda)^i + (\alpha - \mu)^i + (\alpha - \nu)^i + \dots \\ \quad + (\epsilon - \lambda)^i + (\epsilon - \mu)^i + (\epsilon - \nu)^i + \dots \\ \quad + (\gamma - \lambda)^i + (\gamma - \mu)^i + (\gamma - \nu)^i + \dots \\ \quad \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

D'ailleurs, en développant les puissances de binômes renfermées dans la formule (3), et posant, pour abrégér,

$$s_i = \alpha^i + \epsilon^i + \gamma^i + \dots, \quad S_i = \lambda^i + \mu^i + \nu^i + \dots,$$

on tirera généralement de cette formule

$$(4) \quad S_i = s_i S_0 - \frac{i}{1} s_{i-1} S_1 + \frac{i(i-1)}{1.2} s_{i-2} S_2 - \dots \pm s_0 S_i.$$

Donc, puisque, en vertu de formules connues, s_i, S_i peuvent être exprimés en fonctions entières des coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q,$$

on pourra en dire autant de S_i , et par suite de s .

La série d'opérations que nous venons d'indiquer, en prouvant que le premier membre de l'équation (2) peut

être réduit à une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q,$$

fournit de plus un moyen d'effectuer cette réduction, et constitue par conséquent une méthode d'élimination de la variable x entre les équations (1). D'ailleurs la formule (4), qui, dans cette méthode, se trouve combinée avec d'autres formules déjà connues, comprend comme cas particulier une formule analogue, à l'aide de laquelle, dans son *Traité de la résolution des équations numériques*, Lagrange passe d'une équation donnée à une autre qui a pour racines les carrés des différences entre les racines de la première.

Observons encore que, en vertu des deux équations identiques

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\dots, \\ F(x) &= (x - \lambda)(x - \mu)(x - \nu)\dots, \end{aligned}$$

la formule

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} s &= (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)\dots \\ &\times (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)\dots \\ &\times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)\dots \end{aligned} \right.$$

peut être réduite, comme Euler l'a remarqué, à l'une quelconque des deux suivantes :

$$(6) \quad s = F(\alpha)F(\beta)F(\gamma)\dots,$$

$$(7) \quad s = (-1)^{mn}f(\lambda)f(\mu)f(\nu)\dots$$

Or, pour transformer l'une quelconque de ces deux dernières valeurs de s , la première, par exemple, en une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q,$$

il suffit de suivre ou la marche indiquée par Euler dans

les *Mémoires de Berlin* de 1748, ou mieux encore celle que j'ai indiquée moi-même dans un Mémoire présenté à l'Académie le 9 août 1824, et de convertir d'abord le produit

$$F(\alpha) F(\beta) F(\gamma) \dots \\ = (x^m + L\alpha^{m-1} + \dots + P\alpha + Q)(\beta^m + L\beta^{m-1} + \dots + P\beta + Q) \dots$$

en une fonction entière des sommes de la forme

$$(\alpha^m + L\alpha^{m-1} + \dots + P\alpha + Q)^i + \dots \\ + (\beta^m + L\beta^{m-1} + \dots + P\beta + Q)^i + \dots,$$

puis chacune de ces sommes, moyennant le développement des puissances des polynômes, en une fonction entière de

$$s_0, s_1, \dots, s_{mi}.$$

Le premier membre de l'équation (2), transformé comme on vient de le dire, en une fonction entière des coefficients

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q,$$

ne renfermera-t-il aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté lui-même par une fonction entière de ces coefficients, quelles que soient les valeurs qu'on leur attribue? On lèvera facilement tous les doutes que l'on pourrait conserver à cet égard en s'appuyant sur la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Les coefficients*

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q$$

étant supposés quelconques et indépendants les uns des autres, la fonction entière de ces coefficients qui représentera la valeur du produit

$$S = (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots \\ \times (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \dots \\ \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots,$$

formé avec les différences entre les racines de la première et de la seconde des équations (1), ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs, représentés tous deux par des fonctions entières de ces mêmes coefficients.

Démonstration. — En effet, supposons généralement

$$s = s' s'',$$

s' , s'' désignant, s'il est possible, deux fonctions entières de

$$l, \dots, p, q, L, \dots, P, Q.$$

En vertu des relations qui existent entre les coefficients des équations (1) et leurs racines, on pourra exprimer

$$s', s''$$

en fonctions entières de

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

et alors on aura identiquement

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} s' s'' = (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \dots (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \dots \\ \quad \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \dots \end{array} \right.$$

Cette dernière équation, devant subsister indépendamment des valeurs attribuées aux racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

se vérifiera encore, lorsqu'on établira entre ces racines des relations quelconques, par exemple, lorsqu'on supposera

$$\alpha = \lambda.$$

Mais alors, le second membre de l'équation (8) étant nul, le premier devra l'être aussi; donc, en prenant $\alpha = \lambda$, on fera évanouir le produit $s' s''$, et par suite l'un

des facteurs s' , s'' . Concevons, pour fixer les idées, que ce soit le premier facteur s' qui s'évanouisse, en vertu de la supposition

$$\alpha = \lambda.$$

s' , considéré comme fonction de α , sera divisible algébriquement par $\alpha - \lambda$. D'autre part, s' pouvant être regardé comme une fonction entière, non-seulement des coefficients

$$l, \dots, p, q,$$

mais encore des coefficients

$$L, \dots, P, Q,$$

sera par suite une fonction symétrique, non-seulement des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots,$$

mais encore des racines

$$\lambda, \mu, \nu, \dots$$

Donc s' , algébriquement divisible par le binôme

$$\alpha - \lambda,$$

aura pour facteur non-seulement ce binôme, mais encore tous ceux que l'on en déduit en remplaçant la racine α par l'une quelconque des autres racines β, γ, \dots de l'équation $f(x) = 0$, et la racine λ par l'une quelconque des autres racines μ, ν, \dots de l'équation $F(x) = 0$. Observons maintenant que, en vertu de l'équation (8), le produit

$$s' s'',$$

considéré comme une fonction des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

sera une fonction du degré mn . Donc mn représentera la

somme des degrés des facteurs

$$s' \text{ et } s''$$

considérés comme fonctions de ces mêmes racines. Mais, d'après ce qu'on vient de voir, le facteur s' , c'est-à-dire celui des facteurs s', s'' qui s'évanouit quand on suppose

$$\alpha = \lambda,$$

sera divisible algébriquement par chacun des binômes que renferme le second membre de l'équation (8). Donc, puisque ces binômes sont généralement distincts et indépendants les uns des autres, s' sera divisible par le produit de tous ces binômes, dont le nombre est mn , et, si l'on considère s' comme une fonction des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

le degré de s' ne pourra généralement s'abaisser au-dessous de mn . Donc le degré de l'autre facteur s'' ne pourra s'élever au-dessus de zéro; et cet autre facteur ne pourra être qu'un facteur numérique, indépendant des racines des équations (1), et, par conséquent, des coefficients que renferment ces équations. Donc, tant qu'aucune relation particulière ne se trouve établie entre les coefficients

$$l, \dots, p, q; \quad L, \dots, P, Q,$$

ou, ce qui revient au même, entre les racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

il est impossible de décomposer la fonction s en deux facteurs qui soient l'un et l'autre des fonctions entières de

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q.$$

Corollaire I. — Si, contrairement à l'énoncé du théorème, les coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q$$

devaient satisfaire à certaines conditions particulières, si, par exemple, quelques-uns de ces coefficients se réduisaient à zéro, la valeur de S , considérée comme fonction des coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q,$$

pourrait devenir décomposable en facteurs représentés par deux fonctions entières de ces mêmes coefficients.

Corollaire II. — Supposons, pour fixer les idées, les équations (1) réduites aux deux équations du second degré

$$(9) \quad x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + Px + Q = 0,$$

on aura

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\xi - \lambda)(\xi - \mu) \\ \quad = (\alpha^2 + P\alpha + Q)(\xi^2 + P\xi + Q), \end{array} \right.$$

et, par suite, eu égard aux formules

$$\begin{aligned} \alpha^2 + p\alpha + q &= 0, & \xi^2 + p\xi + q &= 0, \\ \alpha + \xi &= -p, & \alpha\xi &= q, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} S &= [Q - q + (P - p)\alpha][Q - q + (P - p)\xi] \\ &= (Q - q)^2 + (P - p)[(Q - q)(\alpha + \xi) + (P - p)\alpha\xi], \end{aligned}$$

ou plus simplement

$$(11) \quad S = (Q - q)^2 + (P - p)(Pq - pQ).$$

Or, tant que les coefficients

$$p, q, P, Q$$

ne seront assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, alors, conformément au théorème établi, la valeur précédente de S ne pourra être décomposée en deux facteurs représentés tous deux par des fonctions

entières de ces coefficients. Mais le même théorème pourra ne plus subsister dans le cas contraire; et si, par exemple, on annule deux des coefficients, en posant

$$p = 0, \quad P = 0,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on réduit les équations proposées aux deux suivantes :

$$(12) \quad x^2 + q = 0, \quad x^2 + Q = 0,$$

alors la valeur de s , déterminée par la formule

$$(13) \quad s = (Q - q)^2,$$

sera décomposable en deux facteurs égaux à $Q - q$, ou, ce qui revient au même, en deux facteurs dont chacun sera une fonction entière des coefficients q, Q . Alors aussi, pour éliminer x entre les deux équations proposées, il suffira de retrancher l'une de l'autre; et l'équation finale ainsi obtenue, savoir

$$Q - q = 0,$$

offrira un premier membre équivalent, non plus à la fonction s , mais seulement à sa racine carrée. Il est au reste facile de voir comment il arrive que la démonstration ci-dessus exposée du théorème en question devient, dans ce cas, inadmissible. En effet, lorsque p, P s'évanouissent, les formules

$$\alpha + \epsilon = p, \quad \lambda + \mu = P,$$

donnent

$$\epsilon = -\alpha, \quad \mu = -\lambda.$$

On a donc alors

$$\epsilon - \lambda = -(\alpha - \mu), \quad \epsilon - \mu = -(\alpha - \lambda);$$

et, par suite, pour qu'une fonction des racines

$$\alpha, \epsilon, \lambda, \mu$$

soit alors algébriquement divisible par chacun des quatre binômes

$$\alpha - \lambda, \quad \alpha - \mu, \quad \beta - \lambda, \quad \beta - \mu,$$

il suffit qu'elle soit algébriquement divisible par les deux premiers.

Corollaire III. — Lorsque, dans les équations (1), les coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q,$$

ne sont assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, le premier membre de la formule (2) ne peut renfermer aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté par une fonction entière des coefficients dont il s'agit, puisqu'il est alors impossible de décomposer ce premier membre en deux facteurs, dont chacun soit une fonction entière de ces mêmes coefficients.

Il est facile de trouver à quel degré s'élève s considéré soit comme fonction des coefficients

$$l, \dots, p, q,$$

soit comme fonction des coefficients

$$L, \dots, P, Q.$$

En effet, s pouvant être représenté par une fonction entière de tous les coefficients

$$l, \dots, p, q, \quad L, \dots, P, Q,$$

le degré de cette fonction, par rapport aux seuls coefficients

$$L, \dots, P, Q,$$

ne variera pas, si l'on exprime, comme on peut le faire, les coefficients

$$l, \dots, p, q$$

à l'aide des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

Mais alors la valeur obtenue de s devra coïncider, quels que soient L, \dots, P, Q et $\alpha, \xi, \gamma, \dots$, avec celle que fournit l'équation (6); en sorte qu'on aura identiquement

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = (x^m + Lx^{m-1} + \dots + Px + Q) \\ \quad \times (\xi^m + L\xi^{m-1} + \dots + P\xi + Q) \dots \end{array} \right.$$

Donc, s étant le produit de n facteurs, dont chacun sera du premier degré par rapport aux coefficients

$$L, \dots, P, Q,$$

le degré de s par rapport à ces mêmes coefficients sera précisément le nombre n .

On conclura de même de l'équation (7) que le degré de s par rapport aux coefficients

$$l, \dots, p, q$$

est précisément le nombre m .

On peut être curieux de connaître généralement la partie de la fonction s qui dépendra uniquement des termes constants des équations (1), c'est-à-dire des coefficients q et Q . Or cette partie sera évidemment ce que deviendra la fonction s , quand on supposera tous les autres coefficients

$$l, \dots, p, L, \dots, P$$

réduits à zéro. D'ailleurs, dans cette supposition, les équations (1) deviendront

$$(15) \quad x^n + q = 0, \quad x^m + Q = 0,$$

et, en conséquence, la formule (14) donnera

$$(16) \quad s = (x^m + Q) (\xi^m + Q) (\gamma^m + Q) \dots$$

Il y a plus, les rapports

$$\frac{\alpha}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \dots$$

étant respectivement égaux aux diverses racines de l'équation

$$x^n = 1,$$

les $m^{\text{ièmes}}$ puissances de ces rapports, ou les fractions

$$\frac{\alpha^m}{\alpha^m}, \frac{\beta^m}{\alpha^m}, \frac{\gamma^m}{\alpha^m}, \dots,$$

seront respectivement égales aux diverses racines de l'équation

$$x^{\omega} = 1,$$

si l'on appelle ω le plus grand commun diviseur des nombres

$$m, n,$$

et, par suite, respectivement égales aux divers termes de la progression géométrique

$$1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1},$$

si l'on nomme θ une racine primitive de l'équation

$$x^{\omega} = 1.$$

Cela posé, la formule (16) donnera

$$s = [(Q + \alpha^m) (Q + \theta \alpha^m) \dots (Q + \theta^{\frac{n}{\omega}-1} \alpha^m)]^{\omega},$$

et, comme on aura identiquement

$$x^{\frac{n}{\omega}} - 1 = (x - 1)(x - \theta)(x - \theta^2) \dots (x - \theta^{\frac{n}{\omega}-1}),$$

on en conclura, en remplaçant x par $-\frac{Q}{\alpha^m}$,

$$\begin{aligned} & (Q + x^m)(Q + \theta\alpha^m)\dots(Q + \theta^{\frac{n}{\omega}-1}\alpha^m) \\ &= Q^{\frac{n}{\omega}} - (-1)^{\frac{n}{\omega}} \alpha^{\frac{m}{\omega}} = Q^{\frac{n}{\omega}} - (-1)^{\frac{m+n}{\omega}} q^{\frac{n}{\omega}}; \end{aligned}$$

puis, eu égard à cette dernière formule, on trouvera définitivement

$$(17) \quad s = (-1)^n \left[(-Q)^{\frac{n}{\omega}} - (-q)^{\frac{m}{\omega}} \right]^{\omega}.$$

Jusqu'ici, pour plus de simplicité, nous avons supposé que, dans les équations (1), les coefficients des plus hautes puissances de x se réduisaient à l'unité. Admettons maintenant la supposition contraire, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^m + bx^{m-1} + \dots + hx + k, \\ F(x) &= Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Hx + K. \end{aligned}$$

Pour ramener les équations (1) à la forme précédemment adoptée, il suffira de diviser la première par a , la seconde par A ; par conséquent, il suffira de prendre

$$\begin{aligned} l &= \frac{a}{b}, \quad \dots, \quad p = \frac{h}{a}, \quad q = \frac{k}{a}, \\ L &= \frac{B}{A}, \quad \dots, \quad P = \frac{H}{A}, \quad Q = \frac{K}{A}. \end{aligned}$$

Cela posé, comme la valeur de s fournie par chacune des équations (5), (14) sera du degré m relativement aux quantités

$$l = \frac{b}{a}, \quad \dots, \quad p = \frac{h}{a}, \quad q = \frac{k}{a},$$

et du degré n relativement aux quantités

$$L = \frac{B}{A}, \quad \dots, \quad P = \frac{H}{A}, \quad Q = \frac{K}{A};$$

comme d'ailleurs, dans cette valeur de s , la partie qui dépendra uniquement des coefficients q , Q se réduira, en vertu de la formule (17), à

$$(-1)^n \left[\left(-\frac{K}{A} \right)^{\frac{n}{\omega}} - \left(-\frac{k}{a} \right)^{\frac{m}{\omega}} \right]^{\omega},$$

il est clair que, pour transformer cette même valeur de s en une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K,$$

il sera nécessaire et suffisant de la multiplier par le produit

$$a^m A^n.$$

Or, dans la fonction entière ainsi obtenue, la partie qui dépendra des seuls coefficients

$$a, A, k, K$$

sera évidemment

$$(-1)^n \left[a^{\frac{m}{\omega}} \left(-K \right)^{\frac{n}{\omega}} - A^{\frac{n}{\omega}} \left(-k \right)^{\frac{m}{\omega}} \right]^{\omega}.$$

De cette remarque, jointe au théorème I, on déduira aisément la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Les coefficients*

$$a, b, \dots, h, k, A, B, \dots, H, K$$

étant supposés quelconques et indépendants les uns des autres dans les deux équations algébriques

$$(18) \quad \begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + \dots + hx + k = 0, \\ Ax^m + Ax^{m-1} + \dots + Hx + K = 0, \end{cases}$$

et les racines de ces équations étant respectivement

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots,$$

$$\lambda, \mu, \nu, \dots,$$

si l'on prend

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} s = a^m A^n (\alpha - \lambda) (\alpha - \mu) (\alpha - \nu) \dots \\ \quad \times (\xi - \lambda) (\xi - \mu) (\xi - \nu) \dots (\gamma - \lambda) (\gamma - \mu) (\gamma - \nu) \dots, \end{array} \right.$$

alors s sera une fonction entière des coefficients

$$a, b, \dots, h, k, \quad A, B, \dots, H, K,$$

qui ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs représentés tous deux par d'autres fonctions entières de ces mêmes coefficients.

(*A continuer.*)