

ÉDOUARD LUCAS

Sur la résolution du système des équations
 $x^2 - 6y^2 = u^2$, $x^2 + 6y^2 = v^2$ en nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 466-470

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__466_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA RÉOLUTION DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS

(1) $x^2 - 6y^2 = u^2, \quad x^2 + 6y^2 = v^2$

EN NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

On tire, de la seconde équation, en supposant $v + x$ divisible par 3. ce qui ne nuit pas à la généralité de la

solution,

$$y = 2rs, \quad x = 3r^2 - 2s^2,$$

ou bien

$$y = 2rs, \quad x = 6r^2 - s^2.$$

En portant ces valeurs dans la première équation, on en déduit l'une des deux suivantes :

$$(2) \quad 9r^4 - 36r^2s^2 + 4s^4 = u^2,$$

$$(3) \quad 36r^4 - 36r^2s^2 + s^4 = v^2.$$

On peut écrire l'équation (3) sous la forme

$$(6r^2 - 3s^2)^2 - 8s^4 = u^2;$$

on en déduit

$$(4) \quad \begin{cases} 6r^2 - 3s^2 \pm u = \pm 2p^4, \\ 6r^2 - 3s^2 \mp u = \pm 4q^4, \\ s = pq. \end{cases}$$

PREMIER CAS. — En prenant les signes supérieurs dans les seconds membres des équations précédentes, on obtient, par addition,

$$(p^2 - q^2)(2q^2 - p^2) = 6r^2,$$

et, en ne tenant pas compte des décompositions impossibles suivant le module 3,

$$p^2 - q^2 = 6g^2, \quad 2q^2 - p^2 = h^2;$$

d'où l'on tire le système

$$q^2 - 6g^2 = h^2, \quad q^2 + 6g^2 = p^2,$$

identique au système proposé. Ainsi, d'une solution quelconque x, y, u, v du système (1), on déduit une série indéfinie de solutions nouvelles, au moyen des formules

$$(A) \quad \begin{cases} X = 6u^2y^2 - v^2x^2, & U = v^4 - 2x^4, \\ Y = 6u^2y^2 + v^2x^2, & V = 2xyuv. \end{cases}$$

Exemples numériques.

$$1^{\circ} \quad x = 5, \quad y = 2, \quad u = 1, \quad v = 7,$$

$$2^{\circ} \quad X = 1201, \quad Y = 140, \quad U = 1151, \quad V = 1249.$$

SECOND CAS. — En prenant les signes supérieurs dans les seconds membres des équations (4), on a

$$(p^2 + q^2)(p^2 + 2q^2) = 6r^2,$$

et, par suite,

$$(5) \quad p^2 + q^2 = 2g^2, \quad p^2 + 2q^2 = 3h^2, \quad r = gh.$$

On déduit, de la première des équations précédentes,

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = g^2,$$

et, par la formule de résolution des triangles rectangles en nombres,

$$p = a^2 - b^2 + 2ab,$$

$$q = a^2 - b^2 - 2ab,$$

$$g = a^2 + b^2.$$

En portant ces valeurs dans la seconde des équations (5), on a

$$3(a^4 + b^4 + 3a^2b^2) - 4ab(a^2 - b^2) = 3h^2,$$

et, en faisant $b = 3\beta$, il vient

$$(a^2 - 2a\beta - 9\beta^2)^2 + 32a^2\beta^2 = h^2.$$

Par la décomposition en facteurs, il résulte

$$h \pm (a^2 - 2a\beta - 9\beta^2) = \pm 2c^2,$$

$$h \mp (a^2 - 2a\beta - 9\beta^2) = \pm 16d^2,$$

$$a\beta = cd,$$

et, par soustraction,

$$a^2 - 2a\beta - 9\beta^2 = \pm (c^2 - 8d^2).$$

Posons $c = ma$, et $\beta = md$; nous obtenons, par l'élimination de β et d , l'équation

$$a^2 - 2adm - 9d^2m^2 = \pm (m^2a^2 - 8d^2).$$

Nous exprimerons que la valeur de m tirée de ces équations est rationnelle, et nous aurons, en prenant le signe inférieur, la condition

$$18a^2d^2 - a^4 - 72d^4 = H^2,$$

impossible suivant le module 3. Au contraire, avec le signe supérieur, nous obtenons la valeur

$$m = \frac{ad \pm H}{a^2 + 9d^2},$$

avec la condition

$$(a^2 + 9d^2)^2 - 9d^4 = H^2.$$

La décomposition en facteurs nous donne

$$a^2 + 12d^2 = e^2, \quad a^2 + 6d^2 = f^2, \quad H = ef,$$

et, par suite, le système

$$f^2 - 6d^2 = a^2, \quad f^2 + 6d^2 = e^2,$$

identique au proposé; donc, d'une solution x, γ, u, ν , du système proposé, on déduit deux solutions nouvelles X, Y, U, V , au moyen des formules

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} m = uy \pm x, \\ n = u^2 + 9y^2, \\ r = (9m^2y^2 + n^2z^2)(8n^2y^2 + m^2z^2), \\ s = (9m^2y^2 - n^2z^2)^2 - 36m^2n^2u^2y^2, \\ X = 6r^2 - s^2, \\ V = 6r^2 + s^2, \\ Y = 2rs, \\ U = (n^2u^2 - m^2y^2 + 2mnu^2y)^2 - 2(n^2u^2 - m^2y^2 - 2mnu^2y)^2. \end{array} \right.$$

Exemples numériques.

$$1^{\circ} \quad x = 5, \quad y = 2, \quad u = 1, \quad v = 7;$$

$$2^{\circ} \quad X = 2639802, \quad Y = 7776485, \quad U = 4319999, \quad V = 10113607.$$

L'équation (2) est impossible ; en effet, on a aisément
 $3r^2 - 6s^2 \pm u = \pm 2p^4, \quad 3r^2 - 6s^2 \mp u = \mp 2q^4, \quad s = pq,$
 et, par addition,

$$3r^2 = 6p^2q^2 \pm (p^4 + 8q^4),$$

équation impossible suivant le module 8. Ainsi donc les formules (A) et (B) résolvent complètement le système proposé.

REMARQUE I. — Le système précédent conduit à la solution du problème : *Trouver trois carrés en progression arithmétique dont la raison est le sextuple d'un carré.*

REMARQUE II. — Le système considéré contient la résolution des équations biquadratiques

$$x^4 - 36y^4 = z^2 \quad \text{et} \quad x^4 - y^4 = 24z^2;$$

on en déduit aisément que les équations biquadratiques

$$x^4 - 36y^4 = z^4 \quad \text{et} \quad x^4 - y^4 = 24z^4$$

sont impossibles à résoudre en nombres entiers.