

ÉDOUARD LUCAS

**Problèmes sur l'ellipse**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 15  
(1876), p. 5-8

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1876\\_2\\_15\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__5_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---

---

## PROBLÈMES SUR L'ELLIPSE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. *Sur la construction géométrique des normales à une conique.* — Dans une Note ayant pour objet la solution du problème d'abaisser une normale sur l'ellipse, M. Painvin (\*) se sert d'un théorème extrait d'un Mémoire de M. Smith *Sur quelques problèmes cubiques et quadratiques*. L'emploi de ce théorème me paraît inutile, et je pense que la solution suivante est plus simple que la solution indiquée.

Soit  $P(\alpha, \beta)$  le point d'où l'on veut abaisser les normales à l'ellipse; si du sommet  $A$  on abaisse des perpendiculaires sur les normales, elles rencontrent la courbe en quatre points situés sur une circonférence, et la construction de celle-ci résout immédiatement la question proposée. On trouvera dans l'article cité la construction de l'axe radical de cette circonférence et du cercle homographique, et ainsi l'on déterminera une première droite contenant le centre. L'ordonnée  $y_0$  du centre de cette circonférence a pour expression [voir la

---

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. IX, p. 348.

( 6 )

formule (II), p. 351 de l'endroit cité ]

$$\gamma_0 = 2 \frac{a\alpha\beta}{c^2}.$$

Soit D le centre de courbure du sommet A ; joignons le point D à la projection du point P sur l'axe des  $y$ , et, par la projection de ce point sur l'axe des  $x$ , menons une parallèle qui rencontre l'axe des  $y$  en Q ; l'ordonnée cherchée  $\gamma_0$  sera le double de OQ.

2. *Sur la corde normale minima.* — Pour déterminer la position de la corde normale de longueur minima, on peut employer la remarque suivante, et j'ignore, en raison de sa simplicité, si cette remarque est nouvelle. Supposons une ellipse dont les dimensions sont telles que la développée la rencontre en des points réels ; on a  $a > b\sqrt{2}$ . Désignons par A l'un des points d'intersection, par AB la tangente à la développée normale à l'ellipse en B, par A'B' une tangente voisine, par A' le point de contact avec la développée, extérieur à l'ellipse et sur la même branche que A, par B' le pied de la normale, et par C l'autre point d'intersection de A'B' avec l'ellipse. On a

$$\text{arc} A'A + AB = A'C + CB',$$

et, puisque l'on a

$$\text{arc} A'A > A'C,$$

il en résulte, car la démonstration s'applique encore si A' est intérieur à l'ellipse,

$$B'C > AB,$$

et ainsi AB est la corde normale minima.

Le raisonnement s'applique d'ailleurs à la recherche de la longueur maxima ou minima de la normale à une courbe donnée C comptée de son pied jusqu'à son point d'intersection avec une courbe donnée C'. Les tangentes

( 7 )

à la développée de la courbe C en ses points d'intersection avec C' sont en général des normales maxima ou minima. On ne peut rien conclure par ce qui précède, lorsque la courbe C' coupe la développée de C à angle droit. On doit encore tenir compte des affections singulières que présentent ces trois courbes, et plus particulièrement des points de rebroussement de la développée.

3. *Sur le triangle inscrit et concentrique à l'ellipse.*— En désignant par  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles excentriques ou paramètres angulaires des sommets d'un triangle inscrit à l'ellipse, les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont données par les équations (\*)

$$\frac{ax}{c^2} = + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2},$$
$$\frac{by}{c^2} = - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Si le triangle est concentrique à l'ellipse, on a

$$\gamma - \beta = \beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Cela posé, la formule

$$\begin{aligned} & \cos^2 p \cos^2 q \cos^2 r + \sin^2 p \sin^2 q \sin^2 r \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} [\cos 2(p - q) + \cos 2(q - r) + \cos 2(r - p)] \\ & \quad + \frac{1}{8} [\cos 2(p + q) + \cos 2(q + r) + \cos 2(r + p)] \end{aligned}$$

---

(\*) SALMON, *Traité des sections coniques*, p. 306 de la traduction française. Nous ferons observer que cette dénomination d'*angle excentrique* est au moins bizarre. Cet angle porte, il est vrai, en Mécanique céleste, le nom d'*anomalie excentrique*, parce qu'il n'a point son sommet au foyer de l'orbite elliptique d'une planète, occupé par le centre du Soleil; mais cette dénomination n'a aucune raison d'être en Géométrie.

donne immédiatement

$$\left(\frac{4ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{4by}{c^2}\right)^2 = 1.$$

Le lieu du point d'intersection des hauteurs décrit un lieu homothétique (c'est la question 1173). On peut arriver plus simplement au résultat précédent; mais si j'ai opéré ainsi, c'est afin de donner une application de la formule trigonométrique employée ci-dessus.

*Remarque.* — La question de la corde normale minimum a été traitée (2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 523, année 1868). Elle se trouve aussi traitée de même dans les *Problèmes* de M. Lonchamp.

---