Nouvelles annales de mathématiques

Moret-Blanc

Question de licence (août 1874)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 15 (1876), p. 77-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__77_1>

QUESTION DE LICENCE (AOUT 1874);

PAR M. MORET-BLANC.

Mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur la surface d'un cylindre droit à axe vertical, et attiré vers un point fixe par une force proportionnelle à la distance : pression sur le cylindre.

Soient C le centre d'attraction, μ^2 l'attraction à l'unité de distance, et a le rayon du cylindre.

Je prends l'axe du cylindre pour axe des z, le plan horizontal passant par C pour plan des xy, et le prolongement de CO pour axe des x ou pour axe polaire.

Soient M la position du mobile, m sa projection sur le plan des xy, et θ l'angle que le rayon mO fait avec l'axe polaire.

Étude du mouvement vertical.—La composante verticale de la force accélératrice est $\mu^2 z + g$, et l'équation du mouvement vertical est

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -(\mu^2 z + g)$$

ou

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \mu^2\left(z + \frac{g}{\mu^2}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z + \frac{g}{\mu^2} = A \sin \mu t + B \cos \mu t.$$

Soient z_0 et v_0 les valeurs initiales de z et de la vitesse verticale. On aura

$$B = z_0 + \frac{g}{\mu^2}, \quad A = \frac{v_0}{\mu},$$

d'où

$$z = \frac{v_0}{\mu} \sin \mu t + \left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right) \cos \mu t - \frac{g}{\mu^2},$$

$$v = v_0 \cos \mu t - \mu\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right) \sin \mu t.$$

On voit que le mouvement vertical est périodique; la durée de la période est $\frac{2\pi}{\mu}$.

La vitesse deviendra nulle et changera de signe aux époques déterminées par l'équation

$$\operatorname{tang} \mu t = \frac{v_0}{\mu\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)},$$

d'où

$$\sin \mu t = \frac{\pm v_0}{\sqrt{v_0^2 + \mu^2\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)^2}},$$

$$\cos \mu t = \frac{\pm \mu\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)}{\sqrt{v_0^2 + \mu^2\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)^2}}.$$

Ces valeurs reportées dans l'expression de z donneront les hauteurs maxima et minima

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)^2} - \frac{g}{\mu^2}.$$

Si la vitesse initiale est nulle, ces hauteurs se réduisent à

$$\pm z_0.$$

Étude du mouvement de la projection horizontale du mobile. — Soit $CO = d$ la distance du centre d'attraction au centre du cercle : les composantes tangentielle et normale de l'attraction horizontale sont respectivement

$$\mu^2 d \sin\theta \quad \text{et} \quad \mu^2(a + d\cos\theta).$$

On a donc

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \mu^2 d \sin\theta;$$

d'où, en multipliant par $2\,ds = 2a\,d\theta$ et intégrant,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

$$v = \pm\sqrt{h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta)},$$

h_0 étant la vitesse horizontale initiale.

On voit que, pour les mêmes valeurs de θ, v reprendra, sauf le signe, les mêmes valeurs; le mouvement sera donc périodique.

Il y a plusieurs cas à considérer :

1° $$\cos\theta + \frac{h_0^2}{2\mu^2 a d} > 1.$$

La vitesse conservera toujours le même signe, et le mobile tournera indéfiniment autour du cylindre.

2° $$\cos\theta_0 + \frac{h_0^2}{2\mu^2 a d} = 1.$$

La vitesse deviendra nulle pour $\theta = 2\pi$, et, l'attraction horizontale étant alors normale à la surface, le mobile projection s'arrêtera, c'est-à-dire que le mouvement vertical se fera sur la même génératrice.

3° $$\cos\theta_0 + \frac{h_0^2}{2\mu^2 a d} < 1.$$

En désignant par θ_1 le plus petit angle positif ayant pour cosinus $\cos\theta_0 + \frac{h_0^2}{2\mu^2 a d}$, la vitesse s'annulera et changera de signe pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = 2\pi - \theta_1$; le mouvement du point m sera un mouvement oscillatoire. D'ailleurs, θ_1 étant $< \theta_0$, θ arrivera d'abord à la valeur $2\pi - \theta_1$, puis reviendra à la valeur θ_1, et ainsi de suite indéfiniment.

La pression contre le cylindre est égale à l'excès de la composante normale sur la force centrifuge

$$P = \mu^2(a + d\cos\theta) - \frac{v^2}{a},$$

ou

$$P = \mu^2[a + d(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)] - \frac{h_0^2}{a}.$$

On a

$$v = a\,\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta)},$$

d'où

$$dt = \frac{a\,d\theta}{\pm\sqrt{h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}.$$

Pour connaître à chaque instant la position du point m sur la circonférence, il faudrait trouver l'intégrale du second membre; cette intégrale dépend des fonctions elliptiques et ne peut être obtenue sous forme finie; mais la formule qui donne v permet de calculer les valeurs de v correspondant à des valeurs données de θ. Si donc on divise l'arc décrit en intervalles assez petits pour que la vitesse puisse être considérée comme variant d'une manière uniforme, on pourra supposer que chacun d'eux est décrit avec une vitesse moyenne entre la vitesse initiale et la vitesse finale correspondant à cet intervalle, et l'on aura le temps employé à le décrire en divisant l'espace par cette vitesse moyenne.

On pourra ainsi former un tableau contenant des valeurs correspondantes de θ et de t aussi rapprochées qu'on voudra; d'où, par interpolation ou bien en construisant une courbe ayant pour coordonnées les valeurs correspondantes de θ et de t, on déduira la valeur de θ correspondant à une valeur quelconque de t et réciproquement.
