

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

**Note sur les courbes que représente
l'équation $\rho^n = A \sin n\omega$**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 97-108

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__97_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES COURBES QUE REPRÉSENTE L'ÉQUATION

$$\rho^n = A \sin n\omega;$$

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. Les courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \quad \rho^n = A \sin n\omega$$

jouissent de propriétés fort remarquables, et se sont souvent présentées, dans des recherches d'un ordre élevé, à des géomètres tels que Maclaurin, Euler, l'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, MM. Serret, O. Bonnet, W. Roberts, etc. Leur théorie mériterait certainement d'être vulgarisée. A ce titre, il ne sera peut-être pas inutile d'en placer un court résumé sous les yeux des personnes qui se livrent à l'étude de la Géométrie. J'ai eu soin d'y mentionner les sources où l'on retrouverait les démonstrations, toutes les fois qu'elles ont été publiées à ma connaissance. Pour les autres cas, la recherche de ces démonstrations pourra fournir un exercice, en général facile.

L'équation (1) peut également présenter la forme

$$(2) \quad \rho^m \sin m\omega = B$$

si n prend des valeurs négatives $-m$. Ce nombre n peut également devenir fractionnaire et même incommensurable. Nous l'appellerons l'ordre de la courbe, quels que soient sa valeur et son signe. Ajoutons encore que les équations (1) et (2) pourront encore être écrites de la manière suivante :

$$(3) \quad \rho^n = C \cos n\omega, \quad \rho^m \cos m\omega = D,$$

au moyen d'un simple déplacement de l'axe polaire. Toutes ces formes étant équivalentes, nous adopterons la première pour fixer les idées.

2. Les propriétés générales qui vont suivre fourniront autant de théorèmes particuliers pour un assez grand nombre de courbes spéciales, correspondant aux valeurs les plus simples de l'ordre n . Parmi elles figurent des lignes tout à fait usuelles, telles que la droite, le cercle, la parabole, l'hyperbole, etc. Quelques-unes de ces propriétés sont peu connues; d'autres, très-répondues, fourniront pour les énoncés généraux d'utiles vérifications :

$n = 2$ lemniscate de Bernoulli ;

$n = \frac{3}{2}$ courbe dont l'arc représente exactement la fonction elliptique de première espèce du module $\sin 15^\circ$ ou du module complémentaire (WILLIAM ROBERTS, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. XII, p. 447) ;

$n = 1$ cercle ;

$n = \frac{2}{3}$ podaire du centre de la lemniscate (WILLIAM ROBERTS, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^e série, t. XI, p. 283) ;

$n = \frac{1}{2}$ cardioïde, limaçon de Pascal, conchoïde du cercle, épicycloïde (SALMON, *Higher plane curves*, n^o 110) ;

$n = \frac{1}{3}$ lieu des sommets des paraboles ayant même foyer, et tangentes à un cercle passant par ce foyer (GIUSEPPE SACCHI, *Nouvelles Annales*, 1^{re} série, t. XIX, p. 39) ;

$n = 0$ spirale logarithmique (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Thèses*, p. 30, 1857; ALLÉGRET, *Nouvelles*

Annales, 2^e série, t. XI, p. 163, année 1872 ;
 NICOLAÏDÈS, *Analectes*, p. 167, année 1872) ;

$n = -\frac{1}{3}$ caustique par réflexion de la parabole pour des rayons perpendiculaires à l'axe (marquis DE L'HOPITAL, *Analyse des infiniment petits* ; voir, pour les propriétés de cette courbe, *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. V, p. 21 et 27) ;

$n = -\frac{1}{2}$ parabole ;

$n = -\frac{2}{3}$ enveloppe des perpendiculaires aux rayons vecteurs de l'hyperbole équilatère (VIEILLE, *Cours complémentaire*, p. 145) ;

$n = -1$ ligne droite ;

$n = -\frac{3}{2}$ enveloppe du côté d'un angle droit, dont l'autre côté pivote sur le centre d'un triangle équilatéral, le sommet de l'angle restant à de telles distances des trois sommets du triangle que leur produit soit constamment égal au cube du rayon de cercle circonscrit (W. ROBERTS, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. XII, p. 447) ;

$n = -2$ hyperbole équilatère.

3. Lorsque n est un nombre entier et positif, les courbes (1) sont le lieu des points, tels que le produit de leurs distances aux n sommets d'un polygone régulier soit égal à la $n^{\text{ième}}$ puissance du rayon du cercle circonscrit (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIII^e Cahier, p. 89).

4. Si l'on envisage l'ensemble des courbes (P), défi-

nies par la condition que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier soit une constante *arbitraire* [l'une de ces courbes P étant, par suite, la ligne (1), d'après la proposition précédente], toutes leurs trajectoires orthogonales (Q) seront des courbes (1) de l'ordre $-n$ (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *ibid.*, p. 90).

5. Chacune de ces lignes (Q) jouit de cette propriété que, si l'on joint un quelconque de ses points aux n sommets du polygone, la direction moyenne de ces droites reste parallèle à elle-même (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *ibid.*, p. 91).

6. Le lieu des points d'inflexion des lignes (P), ainsi que celui de leurs points de plus grande courbure, sont deux courbes (1) du même ordre n (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *ibid.*, p. 91 et 93).

7. L'angle de la tangente avec le rayon vecteur est égal à n fois l'inclinaison de ce dernier sur l'axe polaire (J.-A. SERRET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. VII, p. 118).

8. Courbe la plus générale, telle que, si on l'engendre par une rotation uniforme du rayon vecteur, la tangente tourne uniformément, soit dans l'espace absolu, soit relativement à un observateur qui participe à la rotation du rayon vecteur (à démontrer).

9. L'angle de deux tangentes menées aux extrémités d'une corde passant par le pôle est constant (FRENET, *Exercices de Calcul différentiel et intégral*, problème CXXXI, p. 12 et 57).

10. L'angle des tangentes menées aux extrémités de

deux rayons vecteurs quelconques est égal à $n + 1$ fois celui de ces rayons (BARBIER et LUCAS, *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. V, p. 27) (*).

11. Si l'on fait varier A et C dans les équations (1) et (3), on obtient deux familles orthogonales conjuguées (LAMÉ, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. I, p. 86; FRENET, *Exercices de Calcul différentiel et intégral*, problème XXII, p. 189 et 205).

12. Plus généralement, si l'on fait tourner d'un angle quelconque α la famille de courbes (1) autour du pôle, elle fournit alors l'ensemble des trajectoires qui traversent les mêmes lignes dans leur première situation sous l'angle constant $n\alpha$ (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIII^e Cahier, p. 102).

13. Courbe la plus générale, telle que la normale soit proportionnelle à la puissance $1 - n$ du rayon vecteur (à démontrer).

14. Courbe la plus générale, telle que la projection du rayon vecteur sur la normale soit proportionnelle à la puissance $1 + n$ du rayon vecteur (à démontrer).

15. Le rayon de courbure est égal à la fraction $\frac{1}{1+n}$ de la normale (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Thèses*, p. 34).

16. La projection du centre de courbure sur le rayon vecteur décrit une courbe semblable à la première dans le rapport $\frac{n}{n+1}$ (J.-A. SERRET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. VII, p. 118).

(*) Par exemple, dans la caustique de parabole ($n = -\frac{1}{2}$), les tangentes aux trois intersections par un même rayon vecteur focal forment toujours un triangle équilatéral (BARBIER et LUCAS, *ibidem*, p. 30)

17. Le cercle osculateur intercepte sur le rayon vecteur une corde qui est une fraction constante $\frac{2}{n+1}$ de ce rayon (MACLAURIN, *Traité des fluxions*, Chapitre XI, proposition XXXIV, corollaire IV, année 1740; NICOLAÏDÈS, *Analectes*, p. 65).

18. Cette courbe est la plus générale qui jouisse de la proposition précédente (ALLÈGRET, *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XI, p. 162).

19. Le rayon de courbure de la développée des courbes (1) est égal à la fraction $\frac{1-n}{1+n}$ de la longueur comprise sur la normale de cette développée entre le rayon vecteur de la proposée et son centre de courbure (à démontrer).

20. La podaire des courbes (1) est une ligne du même groupe de l'ordre $\frac{n}{1+n}$ (MACLAURIN, *Philosophical Transactions*, n^o 356, année 1718).

21. L'enveloppe des perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs est une courbe du même groupe d'ordre $\frac{n}{1-n}$ (proposition équivalente à la précédente.)

22. La *k*^{ième} podaire est une courbe du même groupe d'ordre $\frac{n}{1+nk}$ (MACLAURIN, *Géométrie organique*; W. ROBERTS, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. XII, p. 447).

23. Lorsque l'ordre de la courbe est exprimé par l'inverse d'un nombre entier négatif, $n = -\frac{1}{N}$, il y a tou-

jours une podaire de cette courbe qui est une ligne droite.

C'est la $(N - 1)^{i\grave{e}me}$ (à démontrer et à vérifier pour $n = -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$).

24. Si l'on prend tous les rayons vecteurs d'une courbe quelconque pour rayon normal d'une courbe (1) d'ordre $n = \frac{1}{N}$ (N désignant un nombre entier) l'enveloppe de toutes ces lignes sera la $N^{i\grave{e}me}$ podaire de la ligne quelconque proposée (*) (W. ROBERTS, *Annales de Tortolini*, t. IV, p. 134, année 1861).

25. Si l'on envisage pour un même pôle toutes les courbes (1) d'ordre $n = -\frac{1}{N}$, menées tangentiellement à une ligne quelconque, le lieu de leurs sommets sera encore la $N^{i\grave{e}me}$ podaire de cette courbe (W. ROBERTS, *ibid.*).

26. L'anticaustique par réflexion des courbes (1), pour des rayons lumineux émanés du pôle, est une courbe du même groupe de l'ordre $\frac{n}{n+1}$ (à démontrer).

27. Si une des courbes (1) roule sur une ligne égale, en partant de la coïncidence de points homologues, la roulette du pôle est une ligne du même groupe d'ordre $\frac{n}{n+1}$ (à démontrer).

28. Si la courbe (1) roule sur une ligne droite, la roulette du pôle est une courbe dont l'équation a été donnée

(*) Par exemple, l'enveloppe des paraboles homofocales, dont le sommet décrit une courbe quelconque, est la podaire de la podaire de cette ligne. (*Ibidem.*)

par M. O. Bonnet (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. IX, p. 106) et qui jouit entre autres propriétés de celle de rendre maximum l'intégrale

$$\int y^{-\frac{n}{1+n}} ds$$

(EULER, *Methodus inveniendi*, p. 50; voir aussi J. SACCHI, *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XII, p. 177 et 178, et l'énoncé 38 de la présente Notice).

29. La polaire réciproque de la courbe (1), par rapport à un cercle concentrique, est une ligne du même groupe de l'ordre $-\frac{n}{n+1}$ (SALMON, *Higher plane curves*, p. 103).

30. La transformée par rayons vecteurs réciproques est une courbe du même groupe d'ordre égal et de signe contraire (évident).

31. Lorsque l'ordre n est entier et positif, la longueur totale de la courbe (1) s'exprime de la manière suivante, au moyen des intégrales eulériennes de seconde espèce :

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{2^{\frac{n-1}{n}}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Lorsqu'au contraire n est quelconque, cette fraction, divisée par $2n$, mesure l'arc compris entre la tangente au pôle et un rayon qui fait avec elle un angle égal à la $n^{\text{ième}}$ partie d'un angle droit. (J.-A. SERRET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. VII, p. 116; voir en outre, sur la rectification de ces courbes au moyen des transcendentes elliptiques : FAGNANO, *Produzioni matematiche*, t. II, p. 375 à 414; W. ROBERTS,

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1^{re} série, t. XII, p. 447; ALLÉGRET, *Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. II, p. 149).

32. La rectification de deux podaires, l'une d'ordre pair et l'autre d'ordre impair, conduit à celle de toutes les podaires successives (MACLAURIN, *Tractatus de curvarum constructione*, *Philosophical Transactions*, p. 806, année 1718).

33. La différence de l'arc d'une podaire d'ordre quelconque et de n fois l'arc correspondant de celle qui la précède de deux rangs est toujours rectifiable. (MACLAURIN, *ibid.*, p. 807).

34. L'aire qui correspond à l'arc spécifié ci-dessus (31) a pour valeur

$$\frac{\pi A^{\frac{2}{n}}}{2^{\frac{n+2}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)};$$

le moment d'inertie de cette aire

$$\frac{\pi A^{\frac{4}{n}}}{2^{\frac{3n+4}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{2}{n}\right)};$$

le moment d'inertie de l'arc en question

$$\frac{A^{\frac{3}{n}}}{n 2^{\frac{2n-3}{n}}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

généralement le potentiel de l'aire, pour une attraction

qui procède suivant la puissance p de la distance

$$\frac{\pi A \frac{p+3}{n}}{(p+3)^2 2 \frac{p-n+3}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{p+3}{2n}\right)},$$

et, enfin, le potentiel de l'arc pour cette même loi générale d'attraction, en supposant, en outre, que sa densité varie comme la puissance q de la distance

$$\frac{A \frac{p+q+2}{n}}{n 2 \frac{2n-p-q-2}{n}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{p+q+2}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{n}\right)}.$$

On aurait notamment pour $q = n - 1$ le potentiel de la courbure (15 et 13) (HATON DE LA GOUPILLIÈRE).

35. Courbe la plus générale qui rende maximum l'intégrale

$$\int \rho^{-n-1} ds$$

(EULER, *Methodus inveniendi*, p. 53).

36. Courbe d'équilibre d'une chaînette *homogène*, sollicitée par des forces centrales en raison inverse de la puissance $n + 2$ de la distance (O. BONNET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, t. IX, p. 229).

37. Courbe d'équilibre d'une chaînette *d'égale résistance*, pour des forces centrales inversement proportionnelles à la distance, la tension de la chaîne par unité de section transversale étant $n - 1$ (O. BONNET, *ibid.*, p. 99).

38. Si l'on tend en ligne droite cette dernière chaînette, en lui attribuant la forme d'un corps homogène de

révolution, sa courbe méridienne sera précisément la roulette du centre d'une ligne du même groupe roulant sur une droite (O. BONNET, *ibid.*, voir ci-dessus n° 28).

39. Si une courbe (1) est parcourue librement par un mobile suivant la loi des aires, la force totale qui émane du pôle varie en raison inverse de la puissance $2n + 3$ de la distance (MACLAURIN, *Philosophical Transactions*, p. 809, année 1708).

40. Courbe la plus générale, telle que, si elle est parcourue suivant la loi des aires, la vitesse linéaire varie à chaque instant en raison inverse de la puissance $n + 1$ de la distance (RICCATI, *Commentariū Bonon.*, t. IV, p. 184).

41. La force centripète varie alors en raison inverse de la puissance $n + 3$ de la distance (à démontrer).

42. Les forces centrales, pour lesquelles la courbe (1) est brachistochrone, procèdent suivant la puissance $2n + 1$ de la distance (HATON DE LA GOUPILLIÈRE).

43. Le réseau isotherme algébrique de n nœuds, qui en admet la plus grande condensation possible, c'est-à-dire une étoile unique de l'ordre n , est formé d'une famille homothétique de courbes (1) de l'ordre $-n$, et de la même tournée de l'angle $\frac{\pi}{2n}$ (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIII^e Cahier, p. 101).

44. Dans un réseau isotherme algébrique *quelconque* de degré n , le système des enveloppes des directions principales de l'avant-dernier ordre $n - 1$ est formé de $n - 1$

familles homothétiques de courbes (1) de l'ordre $\frac{n}{1-n}$,
disposées régulièrement autour du centre du réseau.

Il en est de même pour les directions suivant lesquelles
le $(n - 1)^{\text{ième}}$ incrément s'annule au lieu d'être maxi-
mum comme sur les précédentes (HATON DE LA GOUPIL-
LIÈRE, *ibid.*, p. 108).