NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES FRESON

Concours d'admission à l'École centrale (année 1876). 1re session. Géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 180-182

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__180_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1876).

1re SESSION. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

(voir 2e série, t. XV, p. 429),

PAR M. JULES FRESON,
Élève à l'École des Mines, à Liége.

On donne deux points O, A, *et l'on considère toutes les paraboles qui ont le point* O *pour sommet et qui passent au point* A. *A chacune de ces paraboles, on mène la tangente et la normale au sommet* O, *et la normale et la tangente au point* A. *On demande :*

1° *Le lieu du point de concours des tangentes au sommet* O *et au point* A ;

2° *Le lieu du point de concours de la normale au sommet* O *et de la tangente en* A ;

3° *Le lieu du point de concours de la tangente au sommet* O *et de la normale en* A ;

4° *Le lieu du point de concours des normales au sommet* O *et au point* A.

1° Soit M le point de concours des tangentes en O et A à l'une des paraboles considérées. On sait que la parallèle menée par M à l'axe de la parabole passe au milieu C de la corde des contacts OA (*). Donc le lieu du point M est la circonférence décrite sur OC comme diamètre.

2° Si N représente le point de concours d'une normale en O et d'une tangente en A, la perpendiculaire élevée à ON en N rencontre AO prolongée en un point B, tel que OB = OA, car la projection de OA sur l'axe de la parabole est égale à ON. Donc le lieu du point N est la circonférence symétrique par rapport au point O de celle qui a OA pour diamètre.

3° et 4°. Si l'on prend OA pour axe des x, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au point O à la droite OA, les coordonnées α, β du point de concours M, des tangentes en A et O satisferont à l'équation

$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2} d\alpha = 0, \quad \text{où} \quad d = \text{OA}.$$

Les équations des tangentes aux points O et A sont

$$(2) \qquad y = \frac{\beta}{\alpha} x,$$

et

$$(3) \qquad y = \frac{\beta}{\alpha - d}(x - d).$$

Les normales aux mêmes points sont représentées par les équations

$$(4) \qquad y = -\frac{\alpha}{\beta} x,$$

et

$$(5) \qquad y = \frac{d - \alpha}{\beta}(x - d).$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Combinant successivement les équations (2), (5) et (4), (5) avec la relation (1), on trouve

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x - d}{2d - x}},$$

et

$$y = \pm x\sqrt{\frac{d - x}{x - \frac{1}{2}d}}.$$

On voit que les deux lieux proposés, 3° et 4°, ont un sommet commun en A, un même axe de symétrie OA, et respectivement pour asymptotes les droites représentées par les équations $x = 2d$, $x = \frac{1}{2}d$ (*).

Note. — Solutions entièrement analytiques de MM. Moret-Blanc; Gambey; Brocard; Choquet, maître auxiliaire au lycée de Lille; Agabriel, maître répétiteur au lycée de Châteauroux; Georges Lambiotte, élève à l'École des Mines, à Liége; Talon, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

(*) La définition géométrique de ces lieux conduit à un moyen très-simple de les construire par points; car soient D et F les points auxquels une droite quelconque issue du sommet O rencontre la circonférence decrite sur OA comme diamètre, et la tangente en A à cette circonférence; pour obtenir un point, P, du premier des deux lieux geometriques proposés (3° et 4°), il suffira de prendre sur le prolongement de OF la distance FP = FD.

On aura un point P′ du second lieu en prenant le milieu du segment DF. En effet, le triangle rectangle OAF donne

$$\mathrm{AD}^2 = \frac{\mathrm{OD}}{2}\,2\,\mathrm{DF} = \mathrm{MD} \times \mathrm{DP}:$$

donc l'angle MAP est droit; il s'ensuit que P est le point de concours de la tangente OM au sommet O de la parabole et de la normale AP en A.

On démontrera de même qu'en prenant OM pour normale au sommet O, la normale en A est AP′.

Il est facile d'en conclure, sans aucun calcul, que le lieu du point P est la *podaire* de O, par rapport à une parabole fixe, ayant pour sommet A et pour foyer B;

Et que le lieu du point P′ est la podaire du même point O, par rapport à la parabole dont A est le sommet et C le foyer. (G.)