

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 289-302

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Surfaces homocycliques.

127. Soit $(a - \rho)x^2 + (b - \rho)y^2 + (c - \rho)z^2 = 1$ l'équation d'une famille de surfaces concentriques à la surface (S) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, et ayant les mêmes sections circulaires qu'elle. La constante ρ sera le paramètre de l'*homocyclique*. En suivant la marche adoptée pour les homofocales (§4), nous établirons les trois relations suivantes :

L'indice du système des deux points e, e' par rapport à la surface S est égal au paramètre de l'homocyclique conjuguée aux points e, e', multiplié par le produit des distances du centre o aux points e, e' et par les cosinus de l'angle eoe'

$$I_{ee'} = \rho_1 oe \cdot oe' \cos eoe'.$$

L'indice du système des deux droites $\varepsilon, \varepsilon'$ par rapport à la surface S est égal au produit des paramètres des deux homocycliques conjuguées aux droites $\varepsilon, \varepsilon'$ multiplié par le produit des distances du centre o aux deux droites et par le cosinus de l'angle des plans diamétraux E, E' menés par ces droites

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \rho_1 \rho_2 (o, \varepsilon) (o, \varepsilon') \cos EE'.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249.

L'indice du système des deux plans F, E' par rapport à S est égal au produit des paramètres des trois homocycliques conjuguées aux deux plans, multiplié par le produit des distances du centre aux deux plans

$$I_{EE'} = \rho_1 \rho_2 \rho_3 (o, E) (o, E').$$

128. Comme corollaires nous voyons que l'indice du point e par rapport à S est égal au paramètre de l'homocyclique qui passe au point e , multiplié par \overline{oe} ; que l'indice de la droite ε par rapport à S est égal au produit des paramètres des homocycliques qui touchent la droite ε , multiplié par $(o, \varepsilon)^2$ et que l'indice du plan E est égal au produit des paramètres des trois homocycliques qui touchent le plan E , multiplié par $(o, E)^2$.

129. THÉOREME. — *Lorsque deux points e, e' sont conjugués à deux homocycliques, ils sont vus du centre commun o sous un angle droit et sont conjugués à toutes les homocycliques du système.*

Ce théorème résulte de la relation

$$I_{ee'} = \rho_1 oe \cdot oe' \cos eo'e';$$

il se démontre comme son correspondant (114).

On en déduit que, si un plan ou une droite touche deux homocycliques, les points de contact sont vus du centre sous un angle droit, et que si l'on prend les plans polaires d'un point m par rapport à toutes les homocycliques du système, tous ces plans passeront par une droite située dans le plan diamétral perpendiculaire à la droite om .

130. Des théorèmes énoncés au n° 85, nous pouvons déduire les suivants :

D'après 1°. Si l'on prend sur une droite γ deux points

a et b conjugués à la surface S , le produit des paramètres des homocycliques qui passent par ces points est égal au produit des paramètres des deux homocycliques qui touchent la droite γ , divisé par le carré du sinus de l'angle aob .

D'après 8°. Si l'on prend dans un plan D trois points a, b, c conjugués à la surface S , le produit des paramètres des homocycliques qui passent par ces points est égal au produit des paramètres des trois homocycliques qui touchent le plan D , divisé par le carré du sinus de l'angle solide déterminé par les diamètres oa, ob, oc .

D'après 12°. Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S , le produit des paramètres des homocycliques qui passent par ses sommets, pris en signe contraire, est égal au carré du sextuple de son volume divisé par π^2 et par les carrés des distances du centre aux sommets du tétraèdre.

D'après 21°. Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S , la somme des inverses des paramètres des homocycliques menées par les sommets du tétraèdre est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface S .

THÉORÈME. — *Lorsqu'une droite ε touche deux homocycliques de la surface S , le rapport $\frac{I_\varepsilon}{(o, \varepsilon)^2}$ a une valeur constante, quelle que soit la droite ε .*

131. *Corollaires.* — Par la droite ε menons un plan tangent à S , et soit a le point de contact

$$I_\varepsilon = \frac{(a, \varepsilon)^2}{A^2},$$

A étant le produit des demi-axes de la section diamétrale

parallèle au plan tangent A. On a donc

$$\frac{I_\varepsilon}{(o, \varepsilon)^2} = \frac{(a, \varepsilon)^2}{(o, \varepsilon)^2} \cdot \frac{1}{A}.$$

Mais, si P est le plan mené par le point a parallèlement au plan diamétral mené par ε ,

$$\frac{(a, \varepsilon)}{(o, \varepsilon)} = \frac{(o, P)}{(o, A)},$$

et comme

$$\pi = A \cdot (o, A),$$

il en résulte

$$J = \frac{(o, \varepsilon)^2 (o, P)^2}{\pi^2}.$$

Mais, d'autre part, si ρ et ρ' sont les paramètres des homocycliques qui touchent la droite ε ,

$$I = \rho \cdot \rho' (o, \varepsilon),$$

de sorte que

$$(o, P)^2 = \pi^2 \cdot \rho \cdot \rho'.$$

Ainsi le plan P est à une distance constante du centre.

Étant données trois surfaces homocycliques S, ρ et ρ' , si une droite ε touche les surfaces ρ et ρ' et que l'on mène par cette droite un plan tangent à S, le plan P mené par le point de contact parallèlement au plan diamétral qui passe par ε sera à une distance constante du centre o.

132. Coupons les homocycliques ρ et ρ' par un plan A tangent à S, et soit a le point de contact. Les deux coniques d'intersection ont quatre tangentes communes, et nous venons de voir que, si par le point a on mène les quatre plans P parallèles aux plans diamétraux qui contiennent ces tangentes, ces plans seront à la même distance du centre. On peut donc dire aussi que, *si dans un*

plan tangent à la surface S on mène les quatre droites qui touchent à la fois deux homocycliques de S, les plans diamétraux de cette surface conduits par ces tangentes toucheront une sphère qui a son centre au point de contact du plan tangent.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un point e est situé sur une homocyclique de la surface S, le rapport $\frac{I_e}{oe}$ a une valeur constante.*

133. *Corollaires.* — Soit A un plan qui touche au point a la surface S; ce plan coupe l'homocyclique ρ de S suivant une conique, et si l'on appelle e un point de cette conique,

$$\rho = \frac{I_e}{oe}, \quad I_e = \frac{ae}{\varepsilon^2},$$

ε étant le demi-diamètre de S parallèle à la tangente ae. De ces deux relations résulte

$$\rho = \frac{ae}{\varepsilon^2 \cdot oe} = \frac{\sin aoe}{\varepsilon^2 \sin oae};$$

pour un autre point e' de la section, on aurait pareillement

$$\rho = \frac{\sin aoe'}{\varepsilon'^2 \sin oae'}.$$

Voici quelques conséquences de ces égalités :

1° Si les trois points e, a, e' sont en ligne droite, $\varepsilon = \varepsilon'$; comme d'ailleurs les angles en a sont tous égaux, $\sin aoe = \sin aoe'$.

Si l'on mène une tangente à la surface S, rencontrant aux points e, e' une homocyclique de cette sur-

face, le diamètre mené au point de contact divise également l'angle $eo'e'$.

2° Si le plan $eo'e'$ est perpendiculaire sur oa , $\varepsilon \sin oae = \varepsilon' \sin oae'$; par conséquent les plans oae , oae' déterminent dans S des sections de même aire.

3° Menons un plan tangent commun aux deux surfaces S et ρ ; soient a le point de contact sur la première, e le point de contact sur la seconde. Si l'on désigne par ε le demi-diamètre de S parallèle à la tangente ae , on a $\rho = \frac{I}{\varepsilon' \sin' oae}$, puisque l'angle aoe est droit (129).

Étant données deux surfaces homocycliques S et ρ , si l'on mène un plan tangent à ces deux surfaces et que a et e soient les points de contact, en désignant par ε le demi-diamètre parallèle à la tangente ae , le produit $\varepsilon \sin oae$ est constant.

4° Puisque $\frac{ar}{\varepsilon' oe^2} = \rho$ est constant pour tous les points e d'une homocyclique de S , si l'on prend le point e à l'infini, on a

$$\rho = \frac{I}{\varepsilon^2};$$

par conséquent, si l'on considère une surface S et un hyperboloïde homocyclique de S , les arêtes du cône asymptote de cette surface déterminent dans S des diamètres de même longueur.

134. Considérons trois points e, f, g situés respectivement sur les homocycliques ρ, ρ', ρ'' de la surface S , et tel que le trièdre $oefg$ soit trirectangle en o . Nous avons (54) et (11)

$$\rho = \frac{I_e}{oe} = -I - \frac{I}{oc},$$

ε désignant le diamètre oe . On a des expressions analogues pour ρ' et ρ'' , de sorte que

$$\rho + \rho' + \rho'' = -\sum I_i - \sum \frac{1}{oe^2}.$$

Or (83)

$$\sum I_i = -\frac{1}{S^2}, \quad \sum \frac{1}{oe^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

p étant la distance du centre o au plan efg . De là résulte

$$\rho + \rho' + \rho'' = \frac{1}{S^2} - \frac{1}{\rho^2}.$$

La distance p étant constante, nous voyons que, si l'on fait varier les points e, f, g , le plan conduit par ces trois points roulera sur une sphère dont nous avons le rayon.

Rayon de courbure.

135. Sur la courbe d'intersection de la surface S par un plan D , prenons trois points a, b, c , la relation 3^o du n^o 28 nous donne

$$\frac{\overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca}}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} = -16 \overline{abc}^2 I_D,$$

α, β, γ étant les demi-diamètres de la surface, parallèles aux cordes bc, ca, ab . Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle abc ,

$$ab \cdot bc \cdot ca = 4R abc,$$

d'où

$$I_D = -\frac{R^2}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}.$$

Supposons maintenant que les points b et c se rapprochent indéfiniment du point a , on aura

$$I_D = -\frac{R^2}{\alpha^3};$$

R est alors le rayon de courbure au point a de la section faite par le plan D, et α le demi-diamètre de la surface parallèle à la tangente au point a de cette section.

D'autre part, si A est le plan tangent de la surface S au point a , on a aussi (53)

$$I_D^2 = \frac{\overline{\sin DA}}{\alpha^2 (\sigma, A)^2}.$$

En égalant ces deux expressions de I_D , on obtient, après avoir extrait la racine carrée,

$$(2) \quad R = \frac{\alpha^2 \sin DA}{(\sigma, A)}$$

pour l'expression du rayon de courbure au point a de la section oblique faite par le plan D.

L'élimination de α entre les expressions (1) et (2) donne encore

$$(3) \quad I_D = \frac{\overline{\sin DA}}{R (\sigma, A)^3}.$$

Les égalités (1) et (3) montrent que toute relation entre des indices de plans donne lieu à une relation correspondante entre des rayons de courbure; en voici quelques exemples :

136 (a). Par une droite λ coupant la surface S au point m , menons deux plans A, B conjugués à S et un plan quelconque E, on a (85, 36°)

$$\overline{\sin AB} \cdot I_E = \overline{\sin BE} \cdot I_A + \overline{\sin AE} \cdot I_B.$$

Si donc R_E, R_A, R_B désignent les rayons de courbure au point m des sections E, A, B, et si M est le plan tangent au point m , la relation (3) nous donne

$$\frac{\overline{\sin AB} \overline{\sin ME}}{R_E} = \frac{\overline{\sin BE} \overline{\sin MA}}{R_A} + \frac{\overline{\sin AE} \overline{\sin MB}}{R_B}.$$

Si la droite λ est normale à la surface S ,

$$\frac{\overline{\sin^2 AB}}{R_E} = \frac{\overline{\sin^2 BE}}{R_A} + \frac{\overline{\sin^2 AE}}{R_B},$$

Lorsqu'en même temps les plans A et B sont rectangulaires,

$$\frac{1}{R_E} = \frac{\overline{\sin^2 BE}}{R_A} + \frac{\overline{\sin^2 AE}}{R_B};$$

c'est le théorème d'Euler; R_A et R_B sont les rayons de courbure principaux.

(b) Les plans A et B étant conjugués à la surface S , on a aussi (85, 5°)

$$I_A I_B = - \frac{\overline{\sin^2 AB}}{\pi^2} I_\lambda = - \frac{\overline{\sin^2 AB}}{\pi^2 (o, M)^2 \sin^2 (\lambda, M)^2},$$

en se rappelant que $I_\lambda = - \frac{1}{(o, M)^2 \sin^2 (\lambda, M)}$; par conséquent cette relation devient

$$\frac{\overline{\sin^3 MA} \overline{\sin^3 ME}}{R_A R_B} = \frac{\overline{\sin^2 AB}}{\sin^2 \lambda M} \frac{(o, M)^4}{\pi^2}.$$

Lorsque la droite λ est normale à la surface S et que de plus les plans A et B sont rectangulaires, on trouve pour le produit des rayons de courbure principaux au point m

$$R_A R_B = \frac{\pi^2}{(o, M)^4}.$$

(c) Par le point m de la surface S , menons trois plans rectangulaires entre eux, A, B, C , on a (82)

$$I_A + I_B + I_C = \frac{\overline{om} - S^2}{\pi^2},$$

et, par conséquent, M étant le plan tangent au point m ,

$$\frac{\overline{\sin MA}}{R_A} + \frac{\overline{\sin MB}}{R_B} + \frac{\overline{\sin MC}}{R_C} = (o, M)^3 \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{\pi^2}.$$

Si le plan C est fixe, on déduit de là que, *si par une droite fixe on mène deux plans rectangulaires A et B, la somme*

$$\frac{\overline{\sin MA}}{R_A} + \frac{\overline{\sin MB}}{R_B}$$

est constante quels que soient ces deux plans.

Lorsque le plan C se confond avec le plan tangent M,

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} = (o, M)^3 \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{\pi^2},$$

de sorte que, si A et B sont les sections principales, et en ayant égard à la valeur du produit $R_A R_B$ des rayons de courbure principaux, on trouvera, pour la somme de ces deux rayons,

$$R_A + R_B = \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{(o, M)}.$$

137. Puisque l'indice d'un plan par rapport à S peut s'exprimer à l'aide du paramètre de l'homofocale de S qui touche ce plan, le rayon de courbure en un point de la section de cette surface par un plan D pourra s'exprimer à l'aide du paramètre de l'homofocale de S qui touche le plan D. Ainsi la relation employée ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{\overline{\sin ABI_1}}{I_A I_B} = \frac{\overline{\sin AE}}{I_A} + \frac{\overline{\sin BE}}{I_B}.$$

Remplaçons le produit $I_A I_B$ par la valeur

$$\frac{\overline{\sin AB}}{\pi^2 (o, M)^2 \sin \lambda M},$$

I_A par $\frac{\rho_A}{\pi^2}$, I_B par $\frac{\rho_B}{\pi^2}$, en désignant par ρ_A, ρ_B les paramètres des homofocales de S qui touchent les plans A et B , et enfin I_E par $-\frac{\sin^3 ME}{R_E(o, M)^3}$, nous aurons

$$-\frac{\overline{\sin^3 ME}}{R_E \overline{\sin^2 \lambda M}} = (o, M) \left(\frac{\overline{\sin^2 EA}}{\rho_A} + \frac{\overline{\sin^2 EB}}{\rho_B} \right).$$

Lorsque les plans A et B sont les sections principales relatives au point m ,

$$-\frac{1}{R_E} = (o, M) \left(\frac{\overline{\sin^2 EA}}{\rho_A} + \frac{\overline{\sin^2 EB}}{\rho_B} \right),$$

de sorte que les rayons de courbure principaux relatifs au point m ont pour valeurs

$$R_A = -\frac{\rho_A}{(o, M)}, \quad R_B = -\frac{\rho_B}{(o, M)}.$$

Or, si l'on a égard à l'expression donnée (118) pour la distance d'un plan tangent à une homofocale de S au pôle de ce plan par rapport à S , on verra que *les centres de courbure principaux relatifs au point m de la surface S sont les pôles du plan tangent M en ce point par rapport aux deux homofocales de S qui passent par le point m .*

Lignes géodésiques.

138. Appelons a et b deux points de la surface S , A et B les plans tangents en ces points. Si nous prenons sur l'intersection δ de ces plans un point c , tel que les droites ac, bc soient également inclinées sur cette intersection, le chemin acb sera le plus court pour aller de a en b en traversant les deux plans. Soient E le plan acb ,

λ et μ les demi-diamètres de la surface S , parallèles aux tangentes ac et bc ; nous avons (§3)

$$I_E = -\frac{\overline{\sin^2 EA}}{\lambda^2(o, A)^2} = -\frac{\overline{\sin^2 EB}}{\mu^2(o, B)^2}.$$

Les droites ca , cb déterminant un cône droit dont l'axe est la droite δ , le plan E est également incliné sur les plans A et B qui passent par l'axe.

Si l'on suppose que les points a et b se rapprochent indéfiniment, les lignes ac et cb deviennent deux éléments consécutifs de la ligne géodésique tracée sur la surface S par les points a et b , le plan abc est le plan osculateur de la géodésique au point a ; en même temps les angles EA , EB , qui n'ont pas cessé d'être égaux, deviennent droits. Ainsi le plan osculateur E d'une ligne géodésique tracée sur la surface S par le point a est normal à la surface en ce point, et son indice (par rapport à S) a pour valeur

$$I_E = -\frac{1}{\lambda^2(o, A)^2} = -\frac{1}{\mu^2(o, B)^2},$$

λ étant le demi-diamètre de la surface S parallèle à l'élément de la géodésique au point a , A le plan tangent de S en ce point, μ le demi-diamètre parallèle à l'élément consécutif, B le plan tangent à l'extrémité de cet élément.

Il suit de là que l'indice du plan osculateur a la même valeur en tous les points d'une même géodésique.

139. Si l'on considère sur la surface S toutes les géodésiques tangentes à une même ligne de courbure, les plans osculateurs de ces géodésiques ont le même indice par rapport à S ; ces plans touchent une même homofocale de la surface S .

Soit ab l'élément commun à la ligne de courbure et à la géodésique qui touche cette ligne de courbure; le plan osculateur de la géodésique au point a , étant normal à S , est déterminé par ab et la normale au point a ; ce plan touche par conséquent l'homofocale ρ , qui, par son intersection avec S , donne la ligne de courbure considérée. Ainsi au point a l'indice du plan osculateur de la géodésique a pour valeur $\frac{\rho}{\pi^2}$ (54) : il a donc la même valeur pour toutes les géodésiques tangentes à la ligne de courbure, et par suite ils touchent tous l'homofocale ρ .

140. *Toutes les tangentes à une géodésique tracée sur la surface S touchent une homofocale de S , et cette homofocale est la même pour toutes les géodésiques qui touchent la même ligne de courbure.*

Car a et b étant deux points pris sur la géodésique, les plans osculateurs en ces points touchent une homofocale ρ de S . Lorsque les points a et b sont consécutifs, l'intersection des plans osculateurs devient la tangente à la géodésique, et cette intersection touche la surface ρ .

141. Considérons en particulier les géodésiques qui passent par un ombilic de la surface S (dont les demi-axes sont α, β, γ).

La distance (o, A) du centre au plan tangent en un ombilic étant égale à $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$, le demi-diamètre λ étant égal à β , nous voyons que l'indice d'un plan osculateur E d'une géodésique passant par un ombilic a pour valeur

$$I_E = -\frac{1}{\alpha^2\gamma^2};$$

mais, si ρ est le paramètre de l'homofocale qui touche le plan E, on a aussi $I_E = \frac{\rho}{\pi^2}$. En égalant ces deux expressions de I_E , il en résulte $\rho = -\beta^2$, de sorte que les plans osculateurs des géodésiques qui passent par les ombilics touchent l'homofocale

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2 - \beta^2} = 1 :$$

c'est l'hyperbole focale. Les tangentes à toutes ces géodésiques doivent donc couper cette hyperbole.

142. Nous avons vu (119) qu'un angle $\lambda\mu$ étant conjugué à la surface S, si l'on mène par son sommet et dans son plan la droite ε ,

$$\sin^2 \lambda \nu \rho_\varepsilon = \sin^2 \varepsilon \mu \rho_\lambda + \sin^2 \varepsilon \lambda \rho_\mu,$$

en désignant par ρ_ε , ρ_λ , ρ_μ les produits des paramètres des couples d'homofocales qui touchent les droites ε , λ , μ .

Considérons le cas particulier dans lequel les droites λ , μ touchent deux lignes de courbure de la surface S et la droite ε , une géodésique tracée par le point $\lambda\mu$. Les droites ε , λ , μ touchent la surface S, l'angle $\lambda\mu$ est droit, et, si l'on appelle i l'angle, $\varepsilon\mu$, ε , λ , μ les demi-axes majeurs des secondes homofocales qui touchent les droites ε , λ , μ , on a

$$\varepsilon^2 - \alpha^2 = \sin^2 i (\lambda^2 - \alpha^2) + \cos^2 i (\mu^2 - \alpha^2)$$

ou

$$\varepsilon^2 = \lambda^2 \sin^2 i + \mu^2 \cos^2 i :$$

c'est l'équation connue des lignes géodésiques.

(A suivre.)