V. HIOUX

Problème de mécanique rationnelle ; solution modifiée

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 312-315

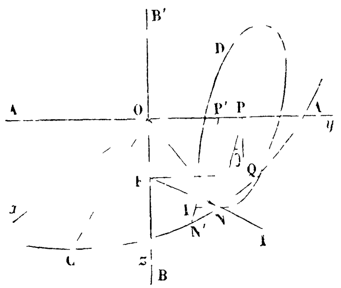
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__312_0>

PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE; SOLUTION MODIFIÉE

PAR M. V. HIOUX.

Il s'agit de la question donnée au concours d'agrégation de 1873. La première partie de la solution, publiée dans le numéro des *Nouvelles Annales* du mois de novembre 1874, doit être modifiée comme il suit :

Soit θ l'angle formé à l'époque t par le plan de l'anneau avec la partie inférieure OB de l'axe vertical BB',



autour duquel s'effectue le mouvement d'entraînement de vitesse constante ω. La charnière AA' demeure horizontale et l'anneau possède un mouvement relatif autour de cette charnière.

Soit N un point quelconque de l'anneau, de masse dm. Menons $NP = r$ perpendiculaire sur la charnière, NQ perpendiculaire au plan AOB et traçons PQ; l'angle NPQ est égal à θ. Traçons encore QF parallèle à OA jusqu'à sa rencontre avec OB au point F, et enfin menons la droite FN. Cette droite FN, perpendiculaire sur OB, est le rayon du cercle que décrirait le point N si, à l'époque t, l'anneau se trouvait en repos relatif.

Observons maintenant que la trajectoire relative du point N est une circonférence D, de rayon constant égal a PN, dont le plan est perpendiculaire à la charnière AA'.

Une seule force effective agit sur le point N, c'est son poids $p = g\,dm$, dont la projection sur la tangente NT à la trajectoire relative a pour effet de diminuer l'angle θ. si le point N est pris sur la demi-circonférence ACA'.

D'autre part, à cause de la rotation d'entraînement, on doit considérer le point N comme soumis à l'action de deux forces apparentes :

1° *La force centrifuge.* — La projection de cette force sur le plan de la circonférence D est

$$f = dm\,\omega^2 \mathrm{FN} \frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{FN}} = dm\,\omega^2 \mathrm{NQ},$$

ou enfin

$$f = dm\,\omega^2 r \sin\theta.$$

Elle a pour effet d'augmenter l'angle θ.

2° *La force centrifuge composée.* — Cette force n'influe pas sur le mouvement relatif du point N, car on sait qu'elle est perpendiculaire à la tangente NT, direction de la vitesse relative.

On pourra, par conséquent, se placer dans les conditions d'un mouvement absolu en considérant chacun des éléments dm de l'anneau comme soumis à l'action des deux forces

$$p = g\,dm \quad \text{et} \quad f = dm\,\omega^2 r \sin\theta.$$

Le mouvement de rotation de l'anneau autour de la charnière AA' est défini par l'équation

$$\Sigma\, dm\, r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma \mathrm{Q} q.$$

Calcul de ΣQq. — La somme des moments des forces p par rapport à la charnière se réduit à

$$-Mag\sin\theta,$$

puisque les points de l'anneau sont symétriques, deux à deux, par rapport à l'axe AA'.

La somme des moments des forces f est

$$\Sigma dm\, r^2\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$\Sigma dm\, r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mga\sin\theta + \Sigma dm\, r^2\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

Le rayon de l'anneau est désigné par a.

Calcul de $\Sigma dm.r^2$. — Dans cette expression, il y a une première partie égale à Ma^2, puisque la masse additionnelle M est à une distance $OC = a$ de l'axe AA'.

Désignons la deuxième partie par mK^2; nous avons à déterminer le rayon de gyration K d'une circonférence homogène, par rapport à un de ses diamètres.

Soit $NN' = ds$; menons N'P' perpendiculaire sur AA' et NI perpendiculaire sur N'P', de manière à former un triangle infiniment petit NIN' semblable au triangle OPN. Pour déterminer K^2, on peut remplacer m et dm par des quantités proportionnelles $2\pi a$ et ds, en supposant l'anneau formé d'une matière continue. On a, par suite,

$$2\pi a K^2 = \int ds\, r^2,$$

l'intégration s'étendant à la circonférence entière.

Les deux triangles semblables NIN', OPN donnent

$$\frac{ds}{PP'} = \frac{a}{r},$$

d'où

$$r\,ds = a\,PP'.$$

On a, par suite,

$$\int ds \,.\, r^2 = a\int r \,.\, \mathrm{PP}' = a \times \pi a^2,$$

d'où résulte immédiatement

$$\mathrm{K}^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Dans ce calcul, on a négligé, selon l'usage, les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

La valeur de Σdmr^2 est donc

$$\left(\mathrm{M} + \frac{m}{2}\right) a^2.$$

L'équation différentielle du mouvement est donc finalement

$$\left(\mathrm{M} + \frac{m}{2}\right) a^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,\mathrm{M}ga\sin\theta + \left(\mathrm{M} + \frac{m}{2}\right) a^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta.$$

Si l'on pose, comme l'indique M. Gilbert, dans le numéro du mois d'avril 1877, $l = \frac{2\mathrm{M} + m}{2\mathrm{M}}\, a$, la suite du problème peut subsister sans modification.