CATALAN

Sur une question proposée par M. Bourguet

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 416-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__416_1>

SUR UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. BOURGUET ;

PAR M. CATALAN.

La solution donnée par M. Muffat, dans le numéro de juillet des *Nouvelles Annales*, a reporté mon attention sur l'énoncé suivant :

Trouver les racines de l'équation

$$(1)\qquad 0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \ldots,$$

au sujet duquel je vais présenter quelques remarques.

I.

Quand on propose de *résoudre une équation*

$$\varphi(x) = 0,$$

il est sous-entendu que $\varphi(x)$ est une fonction, sinon *bien déterminée*, au moins *bien définie*. En est-il ainsi dans le cas actuel? Autrement dit, *la série* (1) *est-elle convergente pour toutes les valeurs positives de* x? C'est là une question préliminaire sur laquelle je ne me prononce pas, faute de temps, mais que M. Bourguet doit avoir examinée et résolue. Je me bornerai à cette seule indication : *si x croît indéfiniment, l'équation* (1) *devient à la limite*

$$0 = \frac{1}{2} - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

ce qui est absurde.

II.

Si l'on attribue à x une valeur n entière et positive, la série (1) se réduit à ses $n+1$ premiers termes, savoir :

$$\frac{1}{2} - \frac{n}{n+1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}.$$

M. Muffat a prouvé que cette quantité est nulle. En conséquence, *n étant un nombre entier quelconque, on a identiquement*

$$(2) \quad \frac{n}{n+1} - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{1}{2}.$$

Cette proposition remarquable est comprise dans l'un des théorèmes de Stirling (*).

III.

D'après la Note de M. Muffat, la question proposée admet comme solutions $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ... Mais rien ne prouve que l'équation $\varphi(x) = 0$ (**) n'ait pas de racines fractionnaires, incommensurables, imaginaires, etc. Le problème reste donc à résoudre ou peu s'en faut.

(*) Binet, *Journal de l'École Polytechnique*, XXVII^e Cahier, p. 154. Il suffit, pour retrouver l'égalité (2), de changer a en $-p$ dans la formule de Stirling.

(**) Encore une fois, nous admettons l'existence de la fonction $\varphi(x)$.

IV.

Après avoir rappelé que les racines de l'équation $\sin x = 0$ sont $x = 0$, $x = \pm \pi$, $x = \pm 2\pi$, ..., Euler déduit de cette simple remarque (*) la formule

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

En appliquant ce procédé (qui n'est nullement rigoureux), pourrait-on transformer $\varphi(x)$ en un *produit indéfini, admettant les facteurs*

$$1 - x,\quad 1 - \frac{x}{2},\quad 1 - \frac{x}{3},\quad \ldots,\quad 1 - \frac{x}{n},\quad \ldots.$$

J'appelle sur ce point l'attention de M. Bourguet.

Note par le Rédacteur. — On a identiquement

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n,$$

de sorte que, si α_n a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, la série

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots$$

sera convergente et aura pour somme $\frac{1}{2}$.

Posons

$$\alpha_p = \frac{1}{2}\,\frac{1 - x}{1 + x}\,\frac{2 - x}{2 + x}\cdots\frac{p - x}{p + x},$$

(*) *Introduction à l'Analyse*, p. 119.

il en résultera, pour l'expression du terme général $(\alpha_{p-1} - \alpha_p)$,

$$\alpha_{p-1} - \alpha_p = \frac{x}{1+x} \frac{1-x}{2+x} \cdots \frac{p-1-x}{p+x}.$$

Quel que soit x, soit k un nombre entier immédiatement supérieur à sa valeur absolue; posons

$$A = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \frac{2-x}{2+x} \cdots \frac{k-1-x}{k-1+x},$$

le terme complémentaire α_n, n dépassant $k-1$, pourra s'écrire

$$\alpha_n = A \frac{k-x}{k+x} \frac{k+1-x}{k+1+x} \cdots \frac{n-x}{n+x}.$$

On voit immédiatement que, si x est négatif, chacune des fractions $\frac{k-x}{k+x}, \ldots, \frac{n-x}{n+x}$ est supérieure à l'unité, de sorte que α_n, au lieu de tendre vers zéro, va en augmentant : la série proposée est donc divergente.

Si x est positif, il est facile de montrer que α_n a pour limite zéro. En effet, de la formule connue

$$\log(1+y) - \log(1-y) = 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \ldots\right),$$

on conclut, y étant positif et plus petit que 1,

$$\log \frac{1+y}{1-y} > 2y \quad \text{ou} \quad \frac{1+y}{1-y} > e^{2y},$$

puisque les nombres $\frac{1+y}{1-y}$ et e^{2y} sont supérieurs à l'unité.

Remplaçons dans cette inégalité y successivement par $\frac{x}{k}$,

$\frac{x}{k+1}, \ldots \frac{x}{n}$, nous aurons

$$\frac{k+x}{k-x} > e^{2\frac{x}{k}},$$

$$\frac{k+1+x}{k+1-x} > e^{2\frac{x}{k+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{n+x}{n-x} > e^{2\frac{x}{n}},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{k+x}{k-x}\,\frac{k+1+x}{k+1-x}\cdots\frac{n+x}{n-x} > e^{2x\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\quad+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or l'exposant de e admet en facteur la série harmonique : donc le premier membre peut devenir supérieur à toute quantité donnée, et par suite α_n inférieur à toute quantité donnée; la série est donc convergente et a pour somme $\frac{1}{2}$; d'où il résulte que, pour $x > 0$, l'équation proposée par M. Bourguet est une identité.

Si l'on désigne, comme précédemment, par k un nombre entier immédiatement supérieur à $x (x > 0)$, par B le produit

$$(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{k-1}\right),$$

on pourra écrire, n dépassant $k-1$,

$$(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)$$
$$= B\left(1-\frac{x}{k}\right)\left(1-\frac{x}{k+1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right).$$

Chacun des facteurs qui suit B est inférieur à l'unité, de sorte qu'en passant d'un produit quelconque au suivant, l'expression considérée diminue ; nous allons voir qu'elle a pour limite zéro.

On a, en effet, pour $0 < y < 1$, d'après un développement connu,

$$1 - y < \frac{1}{e^y}.$$

On en conclut

$$1 - \frac{x}{k} < \frac{1}{e^{\frac{x}{k}}},$$

$$1 - \frac{x}{k+1} < \frac{1}{e^{\frac{x}{k+1}}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1 - \frac{x}{n} < \frac{1}{e^{\frac{x}{n}}},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\left(1 - \frac{x}{k}\right)\left(1 - \frac{x}{k+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{n}\right) < \frac{1}{e^{x\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\right)}}.$$

Or l'exposant de e admet en facteur la série harmonique ; donc le premier membre peut devenir inférieur à toute quantité donnée, et l'on a le droit d'écrire

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \dots$$
$$= (1-x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)\cdots$$

pour toute valeur positive de x.

Ch. B.