NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Mémoire sur les transformations du second ordre dans les figures planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 496-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__496_0>

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

Par M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

[SUITE (*).]

DEUXIÈME PARTIE.

12. Dans cette deuxième Partie de notre travail nous nous proposons d'étudier les transformations corrélatives des précédentes.

Nous avons fait voir que deux relations homogènes et du premier degré, soit en x, y, z, soit en x', y', z', pouvaient toujours se ramener à la forme suivante :

$$\lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ',$$

X, Y, Z étant des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z convenablement choisies, et X′, Y′, Z′ étant de même des fonctions linéaires et homogènes de x', y', z' convenablement choisies. Ce principe nous sera bientôt utile.

Soit dans un plan P un système d'axes yox et désignons par $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ les coordonnées tangentielles d'une droite

$$(1) \qquad px + qy - rz = 0.$$

Imaginons dans un autre plan P′ un autre système d'axes $y'o'x'$, et soient $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$ les coordonnées tangentielles d'une droite

$$(2) \qquad p'x' + q'y' - r'z' = 0.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 422, 451.

Si l'on se donne entre p, q, r, p', q', r' deux relations algébriques linéaires et homogènes, soit en p, q, r, soit en p', q', r', on a une transformation du second ordre, c'est-à-dire une transformation algébrique dans laquelle, à toute droite de chaque figure, correspond sur l'autre figure une droite, et une seule.

Mais les relations dont nous venons de parler peuvent se mettre sous une forme plus simple. A cet effet, prenons dans la première figure un triangle de référence ABC, que nous laisserons arbitraire, et, pour faciliter les interprétations géométriques, choisissons les paramètres de référence égaux à l'unité. Les formules de transformation ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} x &= aX + a_1Y + a_2Z, \\ y &= bX + b_1Y + b_2Z, \\ z &= cX + c_1Y + c_2Z. \end{aligned}$$

L'équation de la droite (1) en coordonnées trilatères est donc

$$(ap + bq - cr)X + (a_1p + b_1q - c_1r)Y + (a_2p + b_2q - c_2r)Z = 0$$

ou bien

$$PX + QY + RZ = 0, \tag{3}$$

P, Q, R étant trois fonctions linéaires et homogènes de p, q, r que nous pouvons choisir à volonté, puisqu'on a laissé le triangle de référence indéterminé.

De la même façon, si l'on prend dans l'autre figure un triangle de référence arbitraire A'B'C' et des paramètres de référence égaux à l'unité, l'équation de la droite (2) peut s'écrire

$$P'X' + Q'Y' + R'Z' = 0. \tag{4}$$

P', Q', R' étant trois fonctions linéaires, homogènes et arbitraires de p', q', r'.

Alors, d'après le principe rappelé ci-dessus et démontré dans la première partie de ce travail, les deux relations entre p, q, r, p', q', r' peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR', \tag{5}$$

pourvu, bien entendu, que les deux triangles de référence demeurent arbitraires, ainsi que les constantes λ, μ, ν.

Dans ces conditions, les relations (5) définissent les transformations algébriques les plus générales dans lesquelles, à toute droite (3) de l'une des figures, correspond sur l'autre figure une droite (4), et une seule.

13. A une droite

$$PX + QY + RZ = 0$$

correspond une autre droite

$$\frac{X'}{\lambda P} + \frac{Y'}{\mu Q} + \frac{Z'}{\nu R} = 0.$$

A toute courbe dont l'équation tangentielle homogène est

$$F(P, Q, R) = 0$$

correspond une courbe ayant pour équation tangentielle

$$\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}\right) = 0,$$

en sorte que, si la première courbe est de classe n, la seconde est en général de classe $2n$.

A la droite $BC(X = 0)$ correspondent toutes les droites passant par le sommet $A'(Y' = 0, Z' = 0)$; même remarque pour les six côtés des triangles de référence.

Comme, d'autre part, dans la figure ABC, on peut mener du point A n tangentes à une courbe de classe n, la droite $B'C'$ est tangente d'ordre n à la courbe transformée. Ainsi cette courbe transformée, qui est de classe $2n$, est tangente n fois aux trois côtés du triangle $A'B'C'$.

En particulier, à un point de la figure ABC

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$$

correspond une conique inscrite au triangle $A'B'C'$

$$\frac{\alpha}{\lambda P'} + \frac{\beta}{\mu Q'} + \frac{\gamma}{\nu R'} = 0.$$

D'après cela, un point doit être considéré comme une courbe de la première classe.

Si la courbe de la classe n est tangente à la droite BC $(X = 0)$, le point A' $(Y' = 0, Z' = 0)$ fait partie de la seconde courbe, dont la classe est ainsi abaissée d'une unité. Si la courbe de classe n est tangente f fois à la droite BC, la classe de la transformée s'abaisse de f unités. Et de même, si la courbe de classe n est tangente g fois à la droite AC, la classe de la transformée s'abaisse de g unités. Mais alors la droite $A'B'$ n'est plus tangente d'ordre n dans la courbe transformée. En effet, du point C on ne peut mener, outre CA et BC, que $(n - f - g)$ tangentes à la courbe d'ordre n, et par conséquent $A'B'$ n'est plus qu'une tangente d'ordre $n - f - g$.

En résumé, quand la courbe de classe n est tangente f, g, h fois à BC, AC, AB, la deuxième courbe est de classe

$$2n - f - g - h,$$

et elle est tangente

$n - g - h$ fois à $B'C'$,
$n - h - f$ fois à $A'C'$,
$n - f - g$ fois à $A'B'$.

32.

14. A toute tangente d'ordre K d'une courbe correspond dans la transformée une tangente d'ordre K : il n'y a exception que pour les côtés des triangles de référence, qui sont des tangentes multiples appartenant en propre à chaque courbe. Ce principe évident permet de calculer l'ordre de la transformée.

Soit une courbe de classe n tangente aux trois droites BC, AC, AB, f, g, h fois. La transformée est de classe

$$2n - f - g - h,$$

et elle est tangente

$$\begin{aligned} n - g - h &\text{ fois à } B'C', \\ n - h - f &\text{ fois à } A'C', \\ n - f - g &\text{ fois à } A'B'. \end{aligned}$$

Soient d'ailleurs m l'ordre de la première courbe, x celui de la seconde. Pour calculer x passons aux figures corrélatives.

La première courbe devient d'ordre n et de classe m avec trois points multiples d'ordre f, g, h lui appartenant en propre.

La deuxième courbe devient d'ordre $2n - f - g - h$ et de classe x, avec trois points multiples d'ordre $n - g - h$, $n - f - h$, $n - f - g$, lui appartenant en propre.

A part les points multiples qui précèdent, tout point multiple d'ordre K a pour correspondant un point multiple de même ordre. Ces points multiples communs produisent dans les deux courbes un même abaissement de classe que nous appellerons w.

Désignons par y et par z les abaissements de classe provoqués dans la première et dans la seconde courbe par les points multiples qu'elles possèdent en propre.

On a les équations suivantes :

$$(10)\quad \begin{cases} n(n-1)-m = w + y, \\ (2n-f-g-h)(2n-f-g-h-1)-x = w+z, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} y = f(f-1)+g(g-1)+h(h-1), \\ z = (n-f-g)(n-f-g-1) \\ \quad + (n-g-h)(n-g-h-1) \\ \quad + (n-h-f)(n-h-f-1). \end{cases}$$

Éliminant w, y, z, on obtient

$$x = m + 2n - 2(f+g+h).$$

Pour $f = g = h = 0$,

$$x = m + 2n.$$

15. Il est facile de voir que, si deux courbes se touchent dans l'une des figures, les courbes correspondantes de l'autre figure se touchent aussi.

En effet, cherchant dans l'une des figures les tangentes communes à deux courbes quelconques S et U, on obtient, pour calculer P, Q, R, deux équations de la forme

$$f(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = 0,$$
$$\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = 0,$$

qui d'ailleurs ne sont autre chose que les équations tangentielles des deux courbes.

A toute tangente commune (P_1, Q_1, R_1) correspond, dans l'autre figure, une droite (P'_1, Q'_1, R'_1), qui est tangente commune aux deux courbes correspondantes S′ et U′.

Si les courbes S et U deviennent tangentes, deux solutions (P_1, Q_1, R_1) et (P_2, Q_2, R_2) deviennent égales. Alors les solutions correspondantes (P'_1, Q'_1, R'_1) et (P'_2, Q'_2, R'_2) deviennent égales aussi. On peut conclure de là que les deux courbes S' et U' deviennent tangentes.

Toutefois, pour que cette conclusion soit légitime, il faut se demander si, lorsque deux tangentes communes aux courbes S' et U' viennent à se confondre, ces deux courbes deviennent nécessairement tangentes. Or il est visible que ces deux courbes pourraient ne pas devenir tangentes, si l'une des tangentes communes, restant tangente simple à la courbe U', devenait tangente double à la courbe S'. Mais alors la tangente correspondante serait tangente simple à la courbe U et tangente double à la courbe S, cas particulier peu intéressant et d'ailleurs facile à étudier.

16. La remarque qui précède est très-importante. Elle donne le théorème suivant. L'enveloppe d'un système de courbes et l'enveloppe des courbes correspondantes se correspondent (A).

Comme cas particulier, le lieu d'un point correspond à l'enveloppe de la conique qui correspond à ce point (B).

Par suite, lorsqu'un point décrit une courbe de classe n, la conique correspondante enveloppe une courbe de classe $2n$ (C).

17. L'un des avantages de la transformation consiste à prendre une propriété d'une courbe quelconque de classe n et à voir ce qu'elle devient dans la transformée, qui est une courbe de classe $2n$ ayant trois tangentes d'ordre n. Mais, pour que cette opération soit légitime, il ne faut employer que des modes de transformation pour lesquels *toute courbe* de classe $2n$, ayant trois tangentes d'ordre n, peut être considérée comme la transformée d'une courbe de classe n. De là la nécessité de reconnaître les modes de transformation qui satisfont à

cette condition. On y parvient par la règle suivante. Pour qu'une courbe quelconque de classe $2n$ à trois tangentes d'ordre n puisse être considérée comme la transformée d'une courbe de classe n, il faut et il suffit que le procédé de transformation laisse arbitraire le triangle de référence dans la figure qui contient la courbe de classe $2n$.

Cette condition est évidemment nécessaire.

Elle est suffisante. En effet, soit une courbe de classe $2n$ à trois tangentes d'ordre n. Prenons ces tangentes pour côtés du triangle de référence dans la figure qui contient la courbe de classe $2n$. Pour déterminer une courbe de classe $2n$, il faut $\frac{2n(2n+3)}{2}$ tangentes, ainsi qu'on le voit en passant à la figure corrélative. Mais les trois tangentes d'ordre n, d'après cette même figure corrélative, valent $\frac{3n(n+1)}{2}$ tangentes simples. La courbe est donc déterminée si l'on se donne, outre les trois tangentes d'ordre n, un nombre de tangentes égal à

$$\frac{2n(2n+3)}{2}-\frac{3n(n+1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}.$$

A ces tangentes, que l'on peut se donner pour déterminer la courbe, correspond dans l'autre figure un nombre égal de tangentes, qui définissent précisément une courbe de classe n.

18. A un point P, défini par les équations

$$\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=0,$$

correspond dans l'autre figure une conique. Cherchons les coordonnées du centre de cette conique.

Une droite passant par le point P a pour équation

$$cX - aZ + K(cY - bZ) = 0.$$

La droite correspondante de l'autre figure a pour équation

$$\frac{X'}{\lambda c} + \frac{Y'}{\mu K c} - \frac{Z'}{\nu(a + bK)} = 0.$$

Lorsque K varie, cette dernière droite enveloppe une conique. Choisissons K de manière à avoir la tangente à la conique qui est parallèle à B'C'. L'équation de cette tangente est

$$(12) \qquad \frac{-a\mu\nu \sin B' \sin C'}{\lambda(c\mu \sin B' + b\nu \sin C')} X' + Y' \sin B' + Z' \sin C' = 0.$$

Si d'ailleurs on désigne par S' et R' l'aire du triangle A'B'C' et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a pour tout point

$$(13) \qquad X' \sin A' + Y' \sin B' + Z' \sin C' = \frac{S'}{R'}.$$

Retranchant (12) de (13) et remplaçant S' par sa valeur en R', A', B', C',

$$X' = \frac{2R'\left(\frac{c}{\nu} \sin B' + \frac{b}{\mu} \sin C'\right)}{\frac{a}{\lambda \sin A'} + \frac{b}{\mu \sin B'} + \frac{c}{\nu \sin C'}}.$$

Cette valeur représente avec son signe la distance du point de contact à la droite B'C'. Pour le centre de la conique, cette distance est deux fois moindre.

On a donc pour le centre, en remplaçant a, b, c par les quantités proportionnelles,

$$(14) \qquad X' = \frac{R'\left(\frac{Z}{\nu} \sin B' + \frac{Y}{\mu} \sin C'\right)}{\frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'}};$$

on aurait par analogie Y' et Z'.

D'après la formule (14), la conique est une parabole, si le point correspondant est sur la droite représentée par l'équation

$$(15)\qquad \frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'} = 0.$$

Ainsi le lieu des points de la figure ABC qui se transforment en paraboles est une droite représentée par l'équation (15) et que pour ce motif nous appellerons la *droite parabolique*.

19. De la formule (14) et des deux analogues on déduit sans difficulté

$$\frac{X'}{\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'} = \frac{Y'}{\frac{X}{\lambda}\sin C' + \frac{Z}{\nu}\sin A'} = \frac{Z'}{\frac{Y}{\mu}\sin A' + \frac{X}{\lambda}\sin B'};$$

ces dernières formules prouvent que, si le point X, Y, Z décrit une courbe dans son plan, le centre de la conique correspondante décrit une courbe homographique, et, par conséquent, une courbe de même ordre et de même classe.

De là le théorème suivant :

Si une conique, tangente aux trois côtés d'un triangle, est aussi tangente à une courbe de classe $2n$ ayant les trois côtés de ce triangle pour tangentes d'ordre n, le centre de cette conique décrit une courbe de classe n.

Deux cas particuliers de ce théorème ne sont point nouveaux :

1° Pour $n = 0$, on a le célèbre théorème de Newton sur le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère.

2° Pour $n = 2$, on a un théorème que M. Gohierre de Longchamps a déduit de celui de Newton (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III).

20. Considérons toutes les courbes de quatrième classe bitangentes aux trois côtés d'un triangle. Nous pouvons imposer à ces courbes cinq conditions nouvelles. Si nous ne leur en imposons que quatre, nous avons un système de courbes. Nous appellerons *caractéristiques* d'un de ces systèmes les nombres μ' et ν', qui indiquent combien de courbes du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée.

Dans l'autre figure on a un système de coniques assujetties, non aux mêmes conditions, mais aux *quatre conditions correspondantes*. On sait que l'on appelle *caractéristiques* de ce système de coniques les nombres μ et ν, qui expriment combien de coniques du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée. On sait aussi que l'on peut trouver les nombres μ et ν.

Nous allons montrer comment les nombres μ' et ν' se calculent en fonction des nombres μ et ν.

μ', nombre des courbes qui passent par un point, est égal au nombre des coniques du système (μ, ν) tangentes à la conique qui correspond au point, c'est-à-dire égal à $2(\mu + \nu)$. On a donc

$$\mu' = 2(\mu + \nu). \tag{16}$$

ν', nombre des courbes tangentes à une droite, est égal au nombre des coniques du système (μ, ν) tangentes à la droite correspondante. On a donc

$$\nu' = \nu. \tag{17}$$

On remarquera que le nombre μ' est nécessairement pair.

Reste à montrer comment les propriétés d'un système (μ', ν') s'expriment en fonction de ses caractéristiques.

On sait que plusieurs propriétés des coniques du système (μ, ν) se présentent sous la forme suivante.

L'enveloppe d'une ligne γ, dans un système de coniques (μ, ν), est de la classe

$$\alpha\mu + \beta\nu.$$

Transformons cet énoncé; nous aurons le suivant. L'enveloppe d'une ligne γ' dans un système de courbes de quatrième classe ayant trois tangentes doubles communes (μ', ν') est une courbe de la classe

$$2\left(\alpha\,\frac{\mu' - 2\nu'}{2} + \beta\nu'\right),$$

ayant trois tangentes multiples d'ordre moitié moindre confondues avec les trois tangentes doubles.

Donnons un exemple. On a un système de coniques (μ, ν) et une conique U. Les cordes communes à la conique U et à chaque conique du système enveloppent une courbe de classe 3μ.

En transformant cet énoncé, on obtient le suivant. On a un système de courbes de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles communes (μ', ν') et aussi une courbe de quatrième classe U' ayant les mêmes tangentes doubles. On imagine deux coniques tangentes aux trois tangentes doubles, à la courbe U' et à une courbe du système. Les tangentes communes à ces deux coniques enveloppent une courbe de classe

$$3(\mu' - 2\nu'),$$

ayant les tangentes doubles pour tangentes d'ordre moitié moindre.

(*A suivre.*)