Nouvelles annales de mathématiques

Andreiewsky

Sur une méthode de variation des paramètres dans les intégrales indéfinies

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 61-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__61_1>

SUR UNE MÉTHODE DE VARIATION DES PARAMÈTRES DANS LES INTÉGRALES INDÉFINIES;

Par M. ANDREIEWSKY,
Professeur à l'Université de Varsovie.

1. Les principes connus de la méthode de la variation des constantes arbitraires peuvent être appliqués aux paramètres des intégrales indéfinies, et nous allons montrer comment, à l'aide de cette application, on pourra déduire des intégrales connues les valeurs des intégrales d'autres fonctions, en général, plus compliquées, puisque, au lieu des paramètres, elles contiendront des fonctions de la variable.

2. En premier lieu, je remarquerai qu'en admettant, comme choses connues, la différentiation de la puissance entière et positive de la variable et le théorème sur les dérivées des fonctions composées, il sera facile d'en déduire, au moyen de la variation des paramètres, toutes les règles fondamentales du Calcul différentiel.

Considérons, pour cela, une fonction $F(x, a)$ de la variable x et du paramètre a, ayant pour dérivée, par rapport à x,

$$\frac{\partial F(x, a)}{\partial x} = f(x, a).$$

Si a dépendait de x, la dérivée complète de $F(x, a)$, par rapport à x, s'exprimerait ainsi :

$$\frac{dF(x, a)}{dx} = f(x, a) + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dx},$$

et, en déterminant a de manière que l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0$$

soit satisfaite, on aura de nouveau

$$\frac{dF(x, a)}{dx} = f(x, a).$$

3. Cela posé, soit

$$F(x, a) = a x^n - \frac{a^2}{4} x^{3n},$$

n désignant un nombre entier et positif. On aura d'abord

$$\frac{\partial F(x, a)}{\partial x} = n a x^{n-1} - \frac{3 n a^2}{4} x^{3n-1},$$

et, en substituant dans les deux membres de cette formule la valeur de a, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^n - \frac{a}{2} x^{3n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$a = 2x^{-2n},$$

on obtiendra

$$\frac{dx^{-n}}{dx} = -nx^{-n-1}.$$

4. Pour déduire maintenant la dérivée d'une puissance fractionnaire, faisons

$$F(x, a) = \frac{m-1}{m} a + \frac{a^{1-m}}{m} x^m,$$

m et n désignant des nombres entiers, et remplaçons, dans les deux membres de l'équation

$$\frac{\partial F(x,a)}{\partial x} = \frac{n}{m} a^{1-m} x^{n-1},$$

a par sa valeur

$$a = x^{\frac{n}{m}},$$

tirée de

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{m-1}{m} + \frac{1-m}{m} a^{-m} x^n = 0,$$

il s'ensuivra

$$\frac{dx^{\frac{n}{m}}}{dx} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

5. Après avoir établi la règle de différentiation des puissances quelconques, il suffira, pour déduire la dérivée du produit, de poser

$$F(x, a) = au^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{4} v^{-1},$$

u et v désignant deux fonctions de x ne renfermant pas

a. En éliminant alors a entre les équations

$$\frac{\partial F(x, a)}{\partial x} = \frac{a}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' + \frac{a^2}{4} v^{-2} v', \quad \frac{\partial F}{\partial a} = u^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2} v^{-} = 0,$$

on aura

$$\frac{d(uv)}{dx} = uv' + vu'.$$

En partant de l'expression

$$F(x, a) = au^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{4} v,$$

on déduira, de même, la dérivée du quotient $\frac{u}{v}$.

6. Considérons maintenant les intégrales indéfinies renfermant un certain nombre de paramètres. Admettons que l'intégrale de l'expression $f(x, a, b, c, \ldots) dx$, où $a, b, c, \ldots$ désignent des paramètres, soit connue, et qu'on ait

$$(1) \quad \int f(x, a, b, c, \ldots) dx = F(x, a, b, c, \ldots) + \text{const.}$$

Je dis que cette équation subsistera encore, si les constantes $a, b, c, \ldots$ y sont remplacées par des fonctions de la variable x, liées entre elles par une certaine relation.

En effet, remarquons pour cela que, $a, b, c, \ldots$ étant des fonctions de x, on pourra traiter toutes les grandeurs $a, b, c, \ldots$ comme fonctions de l'une d'entre elles, par exemple de a.

Cela posé, si l'on différentie (1) par rapport à x, d'abord dans l'hypothèse de $a, b, c, \ldots$ constants, on aura

$$f(x, a, b, c, \ldots) = \frac{\partial F(x, a, b, c, \ldots)}{\partial x}.$$

Or il est clair que cette dernière équation et, par conséquent, l'équation (1) conserveront la même forme, si l'on y remplace a, b, c, ... par des fonctions de x annulant la dérivée totale de $F(x, a, b, c, \ldots)$ par rapport à a, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation

$$(2)\qquad \frac{dF}{da} = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} + \frac{\partial F}{\partial c}\frac{dc}{da} + \ldots = 0.$$

En posant maintenant

$$b = \varphi(a), \quad c = \psi(a), \quad \ldots,$$

où les caractéristiques φ, ψ, ... peuvent être quelconques, on aura l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\varphi'(a) + \frac{\partial F}{\partial c}\psi'(a) + \ldots = 0,$$

pour déterminer a en fonction de x.

Ainsi, de la valeur connue de l'intégrale (1), on déduira les valeurs d'autres intégrales, où les paramètres a, b, c, ... seront remplacés par des fonctions de x.

Pour que les intégrales ainsi obtenues ne contiennent que des fonctions explicites, il faudra que l'équation (2) soit résoluble par rapport à a, ce qui aura lieu, entre autres, pour certaines formes algébriques, exponentielles et trigonométriques de la fonction

$$f(x, a, b, c, \ldots).$$

7. En intégrant la puissance $m^{\text{ième}}$ d'une fonction linéaire $\alpha a x + b$, où a et b désignent des paramètres, α un nombre quelconque indépendant de a et b, on a

$$(3)\qquad \int (\alpha a x + b)^m dx = \frac{(\alpha a x + b)^{m+1}}{(m+1)\alpha a} + \text{const.}$$

Dans ce cas, l'équation (2) s'écrira ainsi

$$(4)\qquad m\alpha a x + (m+1) a \frac{db}{da} - b = 0.$$

Par conséquent, d'après ce qui a été dit, la formule (3) aura lieu, non-seulement pour des valeurs constantes de a, b, mais aussi pour toutes fonctions de x liées entre elles par la relation (4).

Posons, par exemple, $b = a^n + \beta$, où β est un nombre indépendant de a; les égalités (3) et (4) deviendront

$$\int \left[ax + \frac{n\beta}{(n-1)\alpha}\right]^m dx$$

$$= \frac{n-1}{mn+n-1} \left[ax + \frac{n\beta}{(n-1)\alpha}\right]^{m+1} \frac{1}{a} + \text{const.},$$

$$a^n + \frac{m\alpha x}{mn+n-1} a - \frac{\beta}{mn+n-1} = 0,$$

et, en remplaçant $\dfrac{m\alpha}{mn+n-1}$ par α et $\dfrac{\beta}{mn+n-1}$ par β, il vient

$$\int \left[ax - \frac{mn\beta}{(n-1)\alpha}\right]^m dx$$

$$= \frac{n-1}{mn+n-1} \left[ax - \frac{mn\beta}{(n-1)\alpha}\right]^{m+1} \frac{1}{a} + \text{const.},$$

où a vérifie l'équation

$$a^n + \alpha x a + \beta = 0.$$

Si l'on fait, dans ces dernières formules,

$$\alpha = n, \quad \beta = -(n-1)\delta,$$

on aura

$$(5)\qquad \int (ax + m\delta)^m dx = \frac{n-1}{mn+n-1} \frac{(ax+m\delta)^{m+1}}{a},$$

pour a satisfaisant à l'équation

$$a^n + nxa - (n-1)\delta = 0.$$

La résolution de cette dernière équation ne présente aucune difficulté dans les cas de $n = 2, 3$, et l'on trouve ainsi les valeurs des intégrales

$$\int \left(x\sqrt{x^2+\delta} - x^2 + m\delta\right)^m dx$$
$$= \frac{1}{2m+1} \frac{\left(x\sqrt{x^2+\delta} - x^2 + m\delta\right)^{m+1}}{\sqrt{x^2+\delta} - x},$$

$$\int (ax + m\delta)^m dx = \frac{2}{3m+2} \frac{(ax+m\delta)^{m+1}}{a},$$

où

$$a = \sqrt[3]{\delta + \sqrt{x^3+\delta^2}} + \sqrt[3]{\delta - \sqrt{x^3+\delta^2}}.$$

Dans la formule (5), l'exposant m peut recevoir des valeurs quelconques, à l'exception de -1 et $\frac{1-n}{n}$; les deux dernières formules deviennent illusoires respectivement pour $m = -1, -\frac{1}{2}$ et $m = -1, -\frac{2}{3}$.

8. Dans un Mémoire remarquable *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXII^e Cahier), M. Liouville a démontré que l'intégration des fonctions, qu'il nomme *fonctions irrationnelles de première espèce*, quand elle est possible algébriquement, dépend de ce théorème général :

Si l'intégrale $\int \frac{M\,dx}{\sqrt[\mu]{T}}$, M *et* T *étant des fonctions entières de* x, *a une valeur algébrique, cette valeur sera nécessairement de la forme*

(6) $$\int \frac{M\,dx}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\Theta}{\sqrt[\mu]{T}} + \text{const.},$$

où Θ *désigne une fonction entière de* x.

Supposons maintenant que la fonction F renferme un certain nombre de paramètres a, b, c, . . ., et que Θ ne dépende pas de ces derniers; alors l'équation (2), relative aux paramètres a, b, c, . . . de T, prendra cette forme simple

$$\frac{dT}{da} = 0. \tag{7}$$

En introduisant ensuite dans (6), au lieu de a, b, c, . . ., des fonctions de x, au moyen de la dernière équation, comme il a été expliqué (6), on déduira de l'intégrale (6) les valeurs des intégrales d'autres fonctions irrationnelles, qui seront, en général, d'une espèce supérieure.

Par exemple, pour l'intégrale

$$\int \frac{a\,dx}{(a + bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{x}{(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.}, \tag{8}$$

l'équation (7) est

$$1 + x^n \frac{db}{da} = 0; \tag{9}$$

par conséquent, les paramètres de cette intégrale (8) peuvent être remplacés par des fonctions de x, liées entre elles par la relation (9). En faisant $b = \sin a$, on déduit de (9) :

$$a = \text{arc séc}\, x^n,$$

et, par suite, la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\text{arc séc}\, x^n\,dx}{\left(\text{arc séc}\, x^n + \sqrt{x^{2n} - 1}\right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{x}{\left(\text{arc séc}\, x^n + \sqrt{x^{2n} - 1}\right)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.}$$

9. La méthode de la variation des paramètres, exposée au n° 6, étant appliquée aux intégrales des fonctions exponentielles $e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}\psi(x,a,b,\ldots)\,dx$, où φ et ψ désignent des fonctions algébriques de x et des paramètres $a, b, \ldots$, quand ces intégrales s'expriment sous forme finie, fournit une relation *algébrique* entre la variable x, les paramètres $a, b, \ldots$, et leurs dérivées $\frac{db}{da}, \ldots$, par rapport à l'un d'eux.

Cela résulte de ce théorème, dû à M. Liouville (*Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes; Journal de Crelle*, t. XIII, p. 93) : *Si l'intégrale $\int e^x y\,dx$, où y désigne une fonction algébrique de x, est possible sous forme finie, on aura*

$$\int e^x y\,dx = e^x \mathrm{F}(x,y) + \text{const.},$$

$\mathrm{F}(x,y)$ étant une fonction rationnelle de x et y.

D'après cela, en supposant que l'intégrale

$$\int e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}\psi(x,\ a,\ b,\ldots)\,dx$$

soit connue sous forme finie, nous aurons

$$\begin{aligned}&\int e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}\varphi(x,a,b,\ldots)\,dx\\ &\qquad = e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}f(x,a,b,\ldots) + \text{const.},\end{aligned}$$

où $f(x, a, b, \ldots)$ sera une fonction algébrique de x, a, $b, \ldots$, et l'équation (2), relative à cette intégrale, étant débarrassée du facteur $e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}$, prendra cette forme

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots + f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots\right) = 0,$$

qui sera algébrique par rapport à $a, b, \ldots, \frac{db}{da}, \ldots$.

10. Par exemple, pour les paramètres a, b de l'inté-

grale

$$(10)\qquad \int e^{\alpha a x+b}dx = \frac{e^{\alpha a x+b}}{\alpha a} + \text{const.},$$

où α est un nombre indépendant de a, b, on trouve ainsi la relation

$$a\frac{db}{da} + \alpha x a - 1 = 0.$$

En faisant

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu},\quad b = \frac{a^n}{n\mu},$$

λ, μ, n étant des nombres quelconques, on en déduit la formule

$$\int e^{\frac{n-1}{n}\frac{\lambda}{\mu}ax}dx = \frac{\mu}{\lambda}\frac{e^{\frac{n-1}{n}\frac{\lambda}{\mu}ax}}{a} + \text{const.},$$

pour a satisfaisant à l'équation

$$a^n + \lambda x a - \mu = 0;$$

et si l'on pose

$$\lambda = n,\quad \mu = (n-1)\delta,$$

il vient

$$\int e^{\frac{ax}{\delta}}dx = \left(\frac{n-1}{n}\right)\delta\frac{e^{\frac{ax}{\delta}}}{a} + \text{const.},$$

pour a satisfaisant à l'équation

$$a^n + nxa - (n-1)\delta = 0.$$

Dans les cas de $n = 2, 3$, on obtient ainsi

$$\int e^{\frac{x}{\delta}(\sqrt{x^2+\delta}-x)}dx = \frac{\delta}{2}\frac{e^{\frac{x}{\delta}(\sqrt{x^2+\delta}-x)}}{\sqrt{x^2+\delta}-x} + \text{const.},$$

$$\int e^{\frac{ax}{\delta}}dx = \frac{2}{3}\delta\frac{e^{\frac{ax}{\delta}}}{a},$$

où

$$a = \sqrt[3]{\delta + \sqrt{x^3+\delta^2}} + \sqrt[3]{\delta - \sqrt{x^3+\delta^2}}.$$

11. Remarquons maintenant que, l'intégrale d'une fonction quelconque, renfermant des paramètres, étant connue sous forme finie, il sera souvent facile d'en déduire, à l'aide de la variation des paramètres, les intégrales de certaines fonctions exponentielles. En effet, soit

$$\int f(x, a, b, \ldots)\, dx = \mathrm{F}(x, a, b, \ldots) + \text{const.}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par la constante e^a, nous aurons

$$(11) \qquad \int c^a f(x, a, b, \ldots)\, dx = e^a \mathrm{F}(x, a, b, \ldots) + \text{const.},$$

et l'équation (2), relative à cette dernière intégrale, étant divisée par le facteur e^a, prendra la forme

$$(12) \qquad \mathrm{F} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} \frac{db}{da} + \ldots = 0.$$

En remplaçant les paramètres $b, \ldots$ par des fonctions de a, choisies arbitrairement, et éliminant ensuite a entre les équations (11) et (12), on obtiendra la valeur de l'intégrale d'une fonction exponentielle.

Ainsi, de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(a + bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{x}{a(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.},$$

on déduit

$$(13) \qquad \int \frac{e^a\, dx}{(a + bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{e^a x}{a(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.},$$

et la relation (12) entre a et b devient

$$(a - 1)(a + bx^n) - \frac{a}{n}\left(1 + x^n \frac{db}{da}\right) = 0.$$

Si l'on suppose b indépendant de a, cette équation se réduit à

$$a^2 + \left(bx^n - \frac{n+1}{n}\right)a - bx^n = 0, \tag{14}$$

et l'élimination de a entre (13) et (14) conduit à ce résultat

$$\int \frac{e^{-\frac{bx^n}{2}+\frac{1}{2n}\sqrt{R}}\,dx}{\left(n+1+nbx^n+\sqrt{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{xe^{-\frac{bx^n}{2}+\frac{1}{2n}\sqrt{R}}}{\left(n+1-nbx^n+\sqrt{R}\right)\left(n+1+nbx^n+\sqrt{R}\right)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.},$$

où

$$R = n^2b^2x^{2n} + 2n(n-1)bx^n + (n+1)^2.$$

12. Le théorème de M. Liouville, cité au n° 9, comprend, comme corollaire, la proposition suivante :

Si l'intégrale $\int f(x)\sin x\,dx$, $f(x)$ *désignant une fonction algébrique, est possible sous forme finie, on aura*

$$\int f(x)\sin x\,dx = \varphi(x)\cos x + \psi(x)\sin x + \text{const.},$$

φ *et* ψ *étant des fonctions algébriques; elles seront rationnelles, si* $f(x)$ *est une fonction rationnelle.*

Il est facile de s'en convaincre, au moyen des relations connues entre les fonctions exponentielles et trigonométriques. De plus, la fonction $\varphi(x)$ devra vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + f(x) = 0,$$

dont les solutions rationnelles, si elles existent, pourront être trouvées d'après la méthode de M. Liouville

(*Second Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique; Journal de l'École Polytechnique,* XXII^e Cahier, p. 117). La fonction $\varphi(x)$ étant connue, on trouvera $\psi(x)$ par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \psi = 0.$$

Tout ce qui a été dit, relativement à l'intégrale $\int f(x) \sin x\, dx$, s'applique, avec des modifications correspondantes, à l'intégrale $\int f(x) \cos x\, dx$.

13. Concevons maintenant que l'expression

$$f(x, a, b, \ldots) \sin x\, dx,$$

$f(x, a, b, \ldots)$ étant une fonction algébrique de x et des paramètres $a, b, \ldots$, s'intègre sous forme finie; alors, d'après le théorème du numéro précédent, on devra avoir

$$\begin{aligned}&\int f(x, a, b, \ldots,) \sin x\, dx \\ &\quad = \varphi(x, a, b, \ldots) \cos x + \psi(x, a, b, \ldots) \sin x + \text{const.},\end{aligned}$$

où φ et ψ sont des fonctions algébriques, et l'équation (2) prendra, par conséquent, la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial a} + \frac{\partial\psi}{\partial b}\cdot\frac{db}{da} + \ldots\right) \operatorname{tang} x = 0;$$

d'où il suit que a s'exprimera algébriquement en x et $\operatorname{tang} x$, après que les paramètres $b, \ldots$ seront remplacés par des fonctions algébriques de a.

Par exemple, en écrivant l'équation (2) pour l'intégrale

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}&\int \frac{x^3 + 2a(x^2 - 1) + a^2 x}{(x+a)^3} \sin x\, dx \\ &\quad = -\frac{x \cos x}{x+a} + \frac{a \sin x}{(x+a)^2} + \text{const.},\end{aligned}\right.$$

on a

$$x(x+a)+(x-a)\operatorname{tang} x=0;$$

c'est-à-dire que la formule (15) subsiste, quand on y remplace le paramètre a par la fonction

$$a=\frac{x(x+\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x-x},$$

et l'on obtient ainsi

$$\int(x-\operatorname{tang} x)\left(2+\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)\cos x\,dx$$
$$=(x-\operatorname{tang} x)\left[\frac{2\cos x}{\operatorname{tang} x}-\frac{(x+\operatorname{tang} x)\sin x}{x\operatorname{tang}^2 x}\right]+\text{const.}$$

14. Pour terminer, nous donnerons encore les exemples suivants de l'intégration au moyen de la variation des paramètres :

1° L'équation (2) relative à l'intégrale

$$\int\frac{a\,dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tang} x]^2}=\frac{\operatorname{tang} x}{a+(ax+b)\operatorname{tang} x}+\text{const.}$$

est

$$1+\left(x+\frac{db}{da}\right)\operatorname{tang} x=0,$$

d'où, en posant $b=e^a$, on tire

$$a=\log(x+\cot x),\quad b=x+\cot x,$$

et, par suite,

$$\int\frac{\log(x+\cot x)\,dx}{(x\operatorname{tang} x+1)^2[\log(x+\cot x)+1]^2}$$
$$=\frac{\operatorname{tang} x}{(x\operatorname{tang} x+1)[\log(x+\cot x)+1]}+\text{const.}$$

2° En formant l'équation (2), pour l'intégrale

$$(16)\quad\int\frac{(3x+a)\,dx}{\sqrt{R}}=\log\left(\frac{x^2+ax+\sqrt{R}}{x^2+ax-\sqrt{R}}\right)+\text{const.},$$

où

$$R = (x^2 + ax)^2 + bx,$$

on trouve

$$\frac{x+a}{2}\frac{db}{da} - b = 0,$$

et, si l'on y fait

$$b = \frac{\beta}{\alpha^2} e^{-\alpha a - 2},$$

α et β désignant des nombres indépendants de a et b, cette relation fournit les valeurs suivantes de a, b,

$$a = -x - \frac{2}{\alpha}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x},$$

après quoi la formule (16) devient

$$\int \frac{(\alpha x - 1)\,dx}{\sqrt{4x^2 + \beta x e^{\alpha x}}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2x - \alpha\sqrt{4x^2 + \beta x e^{\alpha x}}}{2x + \alpha\sqrt{4x^2 + \beta x e^{\alpha x}}}\right) + \text{const.}$$