Nouvelles annales de mathématiques

TH. SLOUDSKY

Note sur le principe de la moindre action

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 193-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__193_0>

NOTE SUR LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION;

PAR M. TH. SLOUDSKY,
Professeur à l'Université de Moscou.

1. L'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, qui, le premier, a formulé le principe de la moindre action dans toute sa généralité, admit malheureusement dans son exposition du principe une obscurité et même une certaine imprécision. Ayant démontré que

$$\delta . \mathrm{S}m\int u\,ds = 0 \text{ (*)},$$

il n'a pas indiqué quels sont les mouvements comparés. Ayant différentié, par rapport à la caractéristique δ, l'équation des forces vives et, par conséquent, assujetti tous les mouvements comparés à la condition

$$\mathrm{S}\left(\frac{u^2}{2} + \Pi\right) m = \mathrm{H},$$

il n'a pas fait attention à ladite condition, ni en formulant le principe même, ni en déduisant de ce principe les équations du mouvement. Cette omission, peu grave en elle-même, mena cependant à des méprises. Grâce à cela, plusieurs éminents géomètres de l'Europe, tels que Jacobi en Allemagne et Ostrogradsky en Russie, n'ont pas compris le principe de la moindre action, tel qu'il est exprimé par Lagrange; ils le trouvèrent inexact et le remplacèrent par leurs propres théorèmes. C'est aussi grâce à cela que, jusqu'à présent, il ne s'est pas formé parmi les géomètres une idée nette du principe en question.

(*) *Mécanique analytique*, 3e édition, t. I, p. 274 et suiv.

Contribuer à éclairer le sens de ce principe, tel est le but de la présente Note.

2. En approfondissant l'analyse de Lagrange, il n'est pas difficile de reconnaître le sens du théorème que le célèbre géomètre français a nommé le *principe de la moindre action*. On voit par cette analyse qu'outre les liaisons du système tous les mouvements comparés sont sujets à ces deux conditions : 1° les positions initiales et finales du système doivent être les mêmes dans tous les mouvements comparés ; 2° les coordonnées des points du système doivent satisfaire à l'équation

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{S}\left(\frac{u^2}{2} + \Pi\right) m = \mathrm{H},$$

Π étant une certaine fonction des coordonnées, et H une constante donnée.

A ces conditions $\delta.\mathrm{S}m\int u\,ds = 0$ pour celui des mouvements qui a Π pour fonction des forces.

Pour les autres mouvements comparés, Π ne doit et ne peut être fonction des forces : ils doivent avoir lieu sous l'action d'autres forces motrices.

De ce que tous les mouvements comparés sont sujets à la condition

$$\mathrm{S}\left(\frac{u^2}{2} + \Pi\right) m = \Pi,$$

il ne s'ensuit nullement qu'ils doivent avoir lieu sous l'action des mêmes forces motrices. L'équation (1) n'est l'équation des forces vives que pour celui des mouvements pour lequel $\delta.\mathrm{S}m\int u\,ds = 0$.

Bien entendu, la variation des forces motrices peut être remplacée par l'introduction des nouvelles *forces des liaisons*. Avec ces dernières, les mouvements comparés peuvent avoir lieu sous l'action des mêmes forces motrices.

Voici le peu qui doit être ajouté à l'exposition du principe de la moindre action, faite par Lagrange, pour lui donner la clarté et la précision qui lui manquent.

Pour ce qui concerne l'omission mentionnée, que Lagrange avait faite en déduisant les équations du mouvement à l'aide du principe de la moindre action, elle a été suggérée encore en 1814 par O. Rodrigues, dans sa Note remarquable, mais malheureusement peu connue : *De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement rapportées aux variables indépendantes* (*).

3. Pour mieux éclaircir ce qui est dit, prenons un exemple.

Représentons-nous un mouvement parabolique d'un point pesant, lancé dans une direction faisant un angle φ avec l'horizon. Supposons que la masse du point soit égale à l'unité, sa vitesse initiale v_0 très-grande, et l'angle φ très-petit. Ce mouvement diffère d'abord bien peu du mouvement uniforme, suivant une droite horizontale avec la vitesse v_0. Supposons que les deux mouvements s'effectuent dans le plan xz. Les équations du premier mouvement seront

$$x = v_0 t \cos\varphi, \quad z = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2};$$

celles du second,

$$x = v_0 t, \quad z = 0.$$

La fonction des forces pour le premier mouvement sera $-gz$; pour le second elle sera zéro.

(*) *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. III.

L'équation

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

sera satisfaite par ces deux mouvements.

Comparons les deux mouvements entre les points d'intersection des trajectoires. Comparons les intégrales

$$\int_0^{t_1} \mathrm{T}\,dt.$$

Dans le premier mouvement,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(v_0^2 - 2v_0 gt\sin\varphi + g^2t^2),$$

$$t_1 = \frac{2v_0\sin\varphi}{g},$$

$$\int_0^{t_1} \mathrm{T}\,dt = \frac{v_0^3\sin\varphi}{g}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\varphi\right);$$

dans le second,

$$\mathrm{T} = \frac{v_0^2}{2}, \quad t_1 = \frac{2v_0\sin\varphi\cos\varphi}{g},$$

$$\int^{t_1} \mathrm{T}\,dt = \frac{v_0^3\sin\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{v_0^3\sin\varphi}{g}\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{v_0^3\sin\varphi}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{8}\sin^4\varphi - \ldots\right).$$

Ainsi, tant que l'angle φ est petit, l'intégrale $\int_0^{t_1} \mathrm{T}\,dt$ est plus petite dans le premier mouvement que dans le second.

4. Le célèbre Jacobi, dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, professées en 1842-43 à Königsberg et éditées en 1866 par Clebsch, s'exprime ainsi, en parlant du principe de la moindre action, p. 44 : « Dies Princip wird fast in allen Lehrbüchern, auch in den besten, in denen von Poisson, Lagrange und Laplace, so dargestellt, dass

es nach meiner Ansicht nicht zu verstehen ist. Es wird nämlich gesagt, es soll das Integral

$$\int \Sigma m_i v_i ds_i$$

(worin $v_i = \frac{ds_i}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes m_i bezeichnet) ein Minimum sein, wenn man das Integral von einer Position des Systems zu andern ausdehne. Es wird dabei gesagt, dieser Satz gelte nur, so lange der Satz der lebendigen Kräfte gelte, aber es wird zu sagen vergessen, dass man durch den Satz der lebendigen Kraft die Zeit aus obigem Integral eliminirt und alles auf Raumelemente reducirt annehmen müsse. Das Minimum des obigen Integrals ist übrigens so zu verstehen, dass, wenn die Anfangs-und Endpositionen gegeben sind, das Integral unter allen von der einen zur andern Position möglichen Wegen für den wirklich durchlaufenen ein Minimum wird. »

Ayant éliminé de l'intégrale $\int \Sigma m_i v_i ds_i$ le temps t à l'aide de l'équation des forces vives, Jacobi arrive à l'expression juste (wahre Form), d'après son opinion, du principe de la moindre action :

« Sind zwei Positionen des Systems gegeben, und dehnt man das Integral

$$\int \sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}$$

auf die ganze Bahn des Systems von der ersten Position zur zweiten aus, so ist sein Werth für die wirkliche Bahn ein Minimum in Beziehung auf alle mögliche Bahnen, d. h. solche, welche mit den Bedingungen des Systems (wenn es deren gibt) vereinbar sind. Es wird also

$$\int \sqrt{2(U+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}$$

ein Minimum oder

$$\delta\int\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\,\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}=0. \text{ »}$$

Certainement on peut éliminer le temps t de l'intégrale $\int\Sigma m_i v_i\, ds_i$ à l'aide de l'équation des forces vives ; mais il n'y a aucune nécessité dans cette élimination. Les expressions

$$\delta\int\Sigma\, m_i v_i\, ds_i=0,$$

les variables étant liées par l'équation

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2=\mathrm{U}+h,$$

et

$$\delta\int\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}$$

sont des expressions tout à fait équivalentes. Pas une seule n'est plus vraie que l'autre. Jacobi a entièrement tort d'affirmer que l'exposition du principe de la moindre action, donnée par Lagrange, est incompréhensible. Il ne l'a pas comprise et il a donné sa propre expression, qui essentiellement ne diffère en rien de celle de Lagrange.

L'exposition du principe de la moindre action faite par Lagrange pèche, comme nous l'avons dit, par une certaine imprécision : l'exposition de Jacobi a le même défaut. Jacobi non plus ne précise pas exactement les mouvements comparés. En assujettissant les mouvements comparés à la condition

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2=\mathrm{U}+h,$$

Jacobi suppose, à ce qu'il paraît, qu'ils doivent tous s'effectuer sous l'action des mêmes forces motrices ; mais, comme nous le savons déjà, cette limitation n'est pas du tout nécessaire.

5. L'opinion du célèbre géomètre de Königsberg sur l'exposition du principe de la moindre action par Lagrange a été reçue par ses compatriotes sans réplique et sans objection. En parlant du principe en question dans leurs ouvrages, les mathématiciens allemands contemporains ont en vue exclusivement l'expression de ce principe donnée par Jacobi. C'est aussi dans cette forme qu'ils l'exposent dans leurs cours de Mécanique (*). Sans se donner la peine d'approfondir la question, ils prennent la forme de Jacobi pour la seule exacte. Ils voient dans l'*explication* du principe, donnée par Jacobi, un grand pas fait par la Science. Ils traitent avec courroux les géomètres étrangers, qui n'admettent pas ou qui ignorent ce mérite de leur grand compatriote. M. Serret, par exemple, a bien souffert pour ne pas avoir fait attention, dans son excellent *Mémoire sur le principe de la moindre action*, imprimé dans les *Comptes rendus*, t. LXXII et LXXIII, aux travaux de Jacobi et d'autres géomètres allemands. (Voir *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. III, p. 174.)

M. Mayer, prefesseur à l'Université de Leipzig, qui s'occupe de longue date, mais avec peu de succès, du principe de la moindre action, a publié dernièrement sa brochure *Geschichte des Princips der kleinsten Action*. L'étude historique du sujet aurait dû l'amener à une estimation exacte du principe et à l'appréciation juste du mérite de Lagrange. Mais M. Mayer ne s'est pas donné la peine de bien étudier la littérature de la question. En imitant Jacobi, il dit que le principe de la moindre ac-

---

(*) SCHELL, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*.
Dans la même forme on expose le principe de la moindre action dans quelques nouveaux cours français de Mécanique, par exemple, dans le *Traité de Mécanique rationnelle* par LAURENT.

tion, tel qu'il est exposé par Lagrange, n'a aucun sens. Tâchant de l'expliquer, il arrive à la conclusion que c'est le principe d'Hamilton qui est exprimé par le théorème de Lagrange.

6. L'expression du principe de la moindre action, donnée par Lagrange, a été blâmée, comme nous l'avons déjà dit, non-seulement par Jacobi, mais encore par Ostrogradsky. Dans son *Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 6e série, Sciences mathématiques et physiques, t. IV) et dans sa lettre à Braschmann, publiée dans le premier volume du *Journal de la Société Philomathique de Moscou*, Ostrogradsky déclare que l'analyse de l'article 40 (3e section, 2e Partie, t. I) de la *Mécanique analytique* est inexacte, et que le principe de la moindre action doit être exprimé par l'équation

$$\delta \int (\Pi + T)\, dt = 0,$$

c'est-à-dire que ce principe est celui d'Hamilton.

L'opinion d'Ostrogradsky a trouvé des défenseurs dans la littérature mathématique russe, tels que Braschmann, Rachmaninoff; mais elle a eu aussi des adversaires, Sloudsky, Sokoloff, Somoff. La controverse ainsi levée a fini au profit de Lagrange. Il a été démontré que son analyse n'a point de fautes et que son théorème est essentiellement différent du principe d'Hamilton.