Nouvelles annales de mathématiques

Le Cointe

Sur une question de minimum

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 23-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__23_1>

SUR UNE QUESTION DE MINIMUM;

PAR LE P. LE COINTE, S. J.,
Professeur à l'école de l'Immaculée Conception, à Toulouse.

Soient

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_m$$

m fonctions linéaires de n variables $x, y, z, \ldots, w$, *et*, X_i *désignant d'une manière générale l'une de ces fonctions, posons*

$$X_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + h_i w + l_i.$$

Considérons la somme S *des carrés de ces m fonctions,* *et proposons-nous d'en trouver le minimum, dont l'existence est évidente* (*).

Nous désignerons par μ la valeur de ce minimum, et par

(1) $$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad \ldots, \quad w = \rho$$

le système de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w$ donnant ce minimum.

La fonction S est du second degré par rapport à chacune de ces variables; nous pouvons donc poser

(2) $$Ax^2 + Bx + C = S,$$

A étant une quantité indépendante de $x, y, z, \ldots, w$, B et C des quantités indépendantes de x et fonctions de $y, z, \ldots, w$.

De cette équation (2) nous tirons

(3) $$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4A(C - S)},$$

et il est aisé de constater que les valeurs

$$y = \beta, \quad z = \gamma, \quad \ldots, \quad w = \rho,$$

jointes à la valeur $S = \mu$, annulent l'expression

(4) $$B^2 - 4A(C - S)$$

placée sous le radical dans l'équation (3); car les valeurs (1) avec $S = \mu$ vérifient l'une ou l'autre des deux équations (3), en lesquelles se trouve décomposée l'équation (2); et, comme la valeur $x = \alpha$ est réelle, si l'expression (4) n'était pas annulée par ces valeurs, elle serait nécessairement égale à un nombre $\lambda^2 > 0$; comme

(*) Cette question est souvent posée aux examens d'admission à l'École Polytechnique.

elle est une fonction continue des quantités y, z, ..., w, S, si l'on venait à donner à ces quantités de nouvelles valeurs β', γ', ..., ρ', μ', très-peu différentes des précédentes, celle de S étant choisie moindre que μ, on aurait, pour l'expression (4), une valeur dans le voisinage de λ^2, et par conséquent positive. La valeur correspondante α' de x, fournie par l'une ou l'autre des équations (3), serait réelle, et, par suite, le système des valeurs

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad z = \gamma', \quad \ldots, \quad w = \rho'$$

donnerait, pour la fonction S, une valeur μ' moindre que la valeur minimum μ de cette fonction, ce qui est impossible.

De cette première propriété résulte que les valeurs (1) donnent

$$x = -\frac{B}{2A},$$

puisque, dans les équations (3), le radical est nul pour ces valeurs jointes à la valeur $S = \mu$. Or, cette dernière équation pouvant s'écrire sous la forme

$$2Ax + B = 0,$$

on voit que son premier membre est la dérivée S'_x du premier membre de l'équation (2), prise par rapport à x.

Ce que nous venons de dire pour la variable x s'applique à chacune des autres variables de la fonction S, et par conséquent nous arrivons à la conclusion suivante, savoir :

Que les valeurs des n variables x, y, z, ..., w de la fonction S *qui fournissent le minimum de cette fonction sont une solution du système des n équations* *linéaires*

$$(5)\quad \frac{1}{2}S'_x=0,\quad \frac{1}{2}S'_y=0,\quad \frac{1}{2}S'_z=0,\quad \ldots,\quad \frac{1}{2}S'_w=0,$$

obtenues en égalant à zéro les moitiés des dérivées partielles de cette même fonction, prises par rapport à chacune de ces variables.

Relativement à la question précédente, nous allons établir plusieurs théorèmes qui serviront à compléter ce qui vient d'être dit, et nous y ferons usage de la notation suivante.

Ayant écrit m suites (ou lignes) de n quantités, de façon que les termes de même rang se correspondent en colonnes verticales, nous placerons de chaque côté de ce tableau un double trait vertical, de telle sorte que les m suites seront enfermées entre ces deux doubles traits, et le tableau ainsi constitué représentera le système de déterminants obtenus en supprimant, de toutes les manières possibles, $(m-n)$ lignes si m est $>n$, ou $(n-m)$ colonnes si m est $<n$ (*). Dans le cas de $m=n$, ce tableau représentera simplement le déterminant des m^2 éléments qui y figureront.

THÉORÈME I. — *Si m est $\geqq n$, le déterminant du système des équations* (5) *est égal à la somme des carrés des déterminants représentés par la notation*

$$(6)\qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & k_m \end{matrix} \right\|.$$

(*) Cette notation n'est pas nouvelle; elle est employée dans les *Leçons d'Algèbre supérieure* de G. SALMON.

Démonstration. — Pour établir cette proposition, et afin de mieux fixer les idées, nous supposerons $n = 3$. On reconnaîtra sans peine que cette hypothèse n'ôte rien à la généralité de la démonstration.

Le déterminant des équations (5) est alors

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m & a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m & b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_m c_m \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m & b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_m c_m & c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_m^2 \end{vmatrix},$$

et il est à remarquer que chacun des 9 éléments de ce déterminant est un polynôme de m termes.

Si l'on désigne par (r, s, t) l'un des arrangements 3 à 3 des m nombres 1, 2, 3, ..., m, chacun de ces nombres pouvant entrer plusieurs fois dans le même arrangement, et par $\Delta_{r,s,t}$ le déterminant de 9 éléments, obtenu en remplaçant, dans le déterminant (7), les éléments de la première colonne respectivement par leurs termes de rang r, ceux de la seconde colonne respectivement par leurs termes de rang s, et enfin ceux de la troisième respectivement par leurs termes de rang t, on sait que ce déterminant (7) est la somme de tous les déterminants tels que $\Delta_{r,s,t}$ obtenus en variant de toutes les manières possibles l'arrangement (r, s, t).

Or on a

$$\Delta_{r,s,t} = \begin{vmatrix} a_r^2 & a_s b_s & a_t c_t \\ a_r b_r & b_s^2 & b_t c_t \\ a_r c_r & b_s c_s & c_t^2 \end{vmatrix} = a_r b_s c_t \begin{vmatrix} a_r & a_s & a_t \\ b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{vmatrix},$$

et par suite, si deux des nombres r, s, t sont égaux, il vient

$$\Delta_{r,s,t} = 0.$$

De plus, si l'on suppose que les trois nombres r, s, t soient distincts entre eux, il est à observer que, dans l'expression ci-dessus de $\Delta_{r,s,t}$, le premier facteur $a_r b_s c_t$ est le terme principal du déterminant qui figure comme second facteur, de sorte que, si l'on forme tous les déterminants tels que $\Delta_{r,s,t}$ qui correspondent à toutes les permutations des trois nombres r, s, t, la somme de tous ces déterminants sera le carré du suivant :

$$\begin{vmatrix} a_r & a_s & a_t \\ b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{vmatrix}.$$

Donc, etc.

Remarque. — Si $n = 2$, la relation, objet du théorème précédent, n'est autre que celle qui est connue sous le nom d'*identité de Lagrange.*

Théorème II. — *Si m est $\geqq n$, et que les déterminants représentés par la notation* (6) *ne soient pas tous nuls, le minimum de la somme* S *est égal à la somme des carrés des déterminants représentés par la notation*

$$(8) \qquad \left\Vert \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & b_m & c_m & \ldots & k_m & l_m \end{matrix} \right\Vert,$$

divisée par la somme des carrés des déterminants représentés par la notation (6).

Démonstration. — Rendons la fonction S homogène par l'introduction d'une nouvelle variable ζ, c'est-à-dire que nous posons

$$X_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + k_i w + l_i \zeta.$$

Désignons par Δ le déterminant des équations homogènes

$$(9)\qquad \frac{1}{2}S'_x = 0,\quad \frac{1}{2}S'_y = 0,\quad \ldots,\quad \frac{1}{2}S'_w = 0,\quad \frac{1}{2}S'_\zeta = 0,$$

et par Δ_p^q ce qu'il devient lorsqu'on y supprime la ligne de rang p et la colonne de rang q.

Si

$$(10)\qquad x = \alpha,\quad y = \beta,\quad z = \gamma,\quad \ldots,\quad w = \rho,\quad \zeta = 1$$

est le système de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w, \zeta$ qui vérifient les n premières des équations (9), c'est-à-dire le système de valeurs de ces variables qui donnent le minimum de la fonction S, on a

$$\alpha = (-1)^n \frac{\Delta_{n+1}^1}{\Delta_{n+1}^{n+1}},\qquad \beta = (-1)^{n-1} \frac{\Delta_{n+1}^2}{\Delta_{n+1}^{n+1}},$$

$$\gamma = (-1)^{n-2} \frac{\Delta_{n+1}^3}{\Delta_{n+1}^{n+1}},\quad \ldots,\quad \rho = (-1) \frac{\Delta_{n+1}^n}{\Delta_{n+1}^{n+1}}.$$

De plus, si, pour abréger, nous désignons par

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_n,\ M_{n+1}$$

les $(n+1)$ éléments de la dernière ligne du déterminant Δ, l'expression de $\frac{1}{2}S'_\zeta$ est

$$M_1 x + M_2 y + M_3 z + \ldots + M_n w + M_{n+1} \zeta.$$

Or, le théorème des fonctions homogènes donne

$$x.S'_x + y.S'_y + z.S'_z + \ldots + w.S'_w + \zeta.S'_\zeta = 2S,$$

et par suite, pour le système des valeurs (10), il vient

$$\begin{aligned} S &= M_1\alpha + M_2\beta + M_3\gamma + \ldots + M_n\rho + M_{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\Delta_{n+1}^{n+1}} \big[M_1 \Delta_{n+1}^1 - M_2 \Delta_{n+1}^2 + M_3 \Delta_{n+1}^3 - \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1} M_n \Delta_{n+1}^n + (-1)^n M_{n+1} \Delta_{n+1}^{n+1}\big], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{\Delta}{\Delta_{n+1}^{n-1}}.$$

Mais, d'après le théorème I, Δ_{n+1}^{n-1} et Δ sont respectivement les sommes des carrés des déterminants représentés par les notations (6) et (8).

Donc, etc.

Théorème III. — *Si m est $\geqq n$, et que les déterminants représentés par la notation (6) soient tous nuls, la fonction S peut être ramenée à la somme des carrés de m fonctions linéaires de $(n-1)$ variables.*

Démonstration. — Car, si l'on pose, d'une manière générale,

$$V_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + k_i w,$$

les fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_m$ sont telles que $(m-n+1)$ quelconques d'entre elles sont des fonctions linéaires homogènes des $(n-1)$ autres, par exemple $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ et, par suite, la fonction S peut être considérée comme la somme des carrés de m fonctions linéaires aux $(n-1)$ variables $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$.

Donc, etc.

Remarque. — Dans ce cas, déterminant les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ de ces variables qui fournissent le minimum de S, on pourra déterminer une infinité de systèmes de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w$ correspondant à ce minimum, en résolvant les équations

$$V_1 = \alpha_1, \quad V_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad V_{n-1} = \alpha_{n-1}.$$

Théorème IV. — *Si m est $< n$, et que les déterminants représentés par la notation (6) ne soient pas tous nuls, le minimum de la fonction S est zéro, et corres-*

pond à une infinité de systèmes de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, w$.

Démonstration. — Car, si, pour fixer les idées, nous supposons, par exemple, $m = 2$, et que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul, on peut donner aux variables $z, \ldots, w$ des valeurs quelconques et déduire ensuite pour x et y des valeurs telles qu'on ait

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0.$$

Donc, etc.

Théorème V. — *Si* m *est* $< n$, *et que les déterminants représentés par la notation* (6) *soient tous nuls, la fonction* S *peut être ramenée à la somme des carrés de* m *fonctions linéaires de* $(n - 1)$ *variables.*

Démonstration semblable à celle du théorème III.