NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PTASZYCKI

Sur un problème de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 279-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__279_1>

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. PTASZYCKI,
à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Le système de trois points matériels, dont les masses sont égales à l'unité, se meut dans le plan des coordonnées rectangulaires, de sorte que, pendant tout le temps du mouvement du système, son centre de gravité reste à l'origine des coordonnées; ses moments d'inertie par rapport aux axes $x'x$ et $y'y$ sont des quantités constantes égales à a et b et ses axes principaux d'inertie coïncident avec les axes des coordonnées. Alors :

I. *Les points du système se meuvent sur une ellipse, dont l'équation est*

$$\frac{x^2}{\frac{2a}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2b}{3}} = 1.$$

II. *L'aire du triangle, dont les sommets sont les trois points du système, dans toutes ses positions, est une quantité constante égale à* $\frac{\sqrt{3ab}}{2}$.

1. Pendant tout le temps du mouvement, les coordonnées des trois points du système doivent satisfaire aux cinq équations suivantes :

$$(1) \qquad x + x_1 + x_2 = 0,$$
$$(2) \qquad y + y_1 + y_2 = 0,$$
$$(3) \qquad x^2 + x_1^2 + x_2^2 = a,$$
$$(4) \qquad y^2 + y_1^2 + y_2^2 = b,$$
$$(5) \qquad xy + x_1y_1 + x_2y_2 = 0.$$

Cela posé, de l'identité

$$\begin{aligned}(x^2 + x_1^2 + x_2^2)(y^2 + y_1^2 + y_2^2) - (xy + x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ = (xy_1 - x_1y)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_2y - xy_2)^2,\end{aligned}$$

en remarquant que, en vertu des équations (1) et (2),

$$xy_1 - x_1y = x_1y_2 - x_2y_1 = x_2y - xy_2,$$

et ayant égard aux équations (3), (4) et (5), on tire

$$ab = 3(x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Mais

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2,$$

ou, d'après les équations (3), (4) et (5),

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (a - x^2)(b - y^2) - x^2y^2;$$

donc

$$ab = (a - x^2)(b - y^2) - x^2y^2,$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{\frac{2a}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2b}{3}} = 1.$$

2. L'aire P du triangle, dont les sommets sont (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), est égale à

$$P = \pm \frac{1}{2}[xy_1 + x_1y_2 + x_2y - (xy_2 + x_1y + x_2y_1)];$$

mais, à l'aide des équations

$$(x+x_1+x_2)(y+y_1+y_2)=0,\quad xy+x_1y_1+x_2y_2=0,$$

on conclut que

$$xy_1+x_1y_2+x_2y=-(xy_2+x_1y+x_2y_1);$$

donc

$$(6)\qquad P^2=(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2=(xy_2+x_1y+x_2y_1)^2.$$

Or, de l'identité

$$\begin{aligned}&(x^2+x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2+y^2)-(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2\\&=(xy_2-x_1y_1)^2+(x_1y-x_2y_2)^2+(x_2y_1-xy)^2,\end{aligned}$$

comme, à cause des équations (1) et (2),

$$xy_2-x_1y_1=x_1y-x_2y_2=x_2y_1-xy,$$

on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}&(x^2+x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2+y^2)-(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2\\&=(xy_2-x_1y_1)(x_1y-x_2y_2)+(xy_2-x_1y_1)(x_2y_1-xy)\\&\quad+(x_1y-x_2y_2)(x_2y_1-xy);\end{aligned}$$

en l'ajoutant, après l'avoir multipliée par 2, à l'*identité* précédente, on obtient l'expression

$$\begin{aligned}&3(x^2+x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2+y^2)-3(xy_1+x_1y_2+x_2y)^2\\&=[xy_2+x_1y+x_2y_1-(xy+x_1y_1+x_2y_2)]^2,\end{aligned}$$

qui donne immédiatement, en ayant égard aux équations (3), (4), (5) et (6),

$$3ab-3P^2=P^2;$$

et par conséquent

$$P=\frac{\sqrt{3ab}}{2}.$$