NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. RÉALIS

Sur les équations du troisième et du quatrième degré dont les racines s'expriment sans l'emploi des radicaux cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 296-301

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__296_0>

SUR LES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ DONT LES RACINES S'EXPRIMENT SANS L'EMPLOI DES RADICAUX CUBIQUES;

PAR M. S. REALIS,
Ingénieur à Turin.

1. On a ce théorème :

1° *Si les coefficients de l'équation*

$$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0 \tag{1}$$

sont des quantités rationnelles assujetties à la relation

$$k(k-1)^2P^3 - 4kPR + Q^2 = 0, \tag{2}$$

où k est un nombre rationnel, l'expression algébrique des racines x ne contient pas de radical cubique.

Pour $k = \frac{2}{3}$, par exemple, on a la relation

$$2P^3 - 72PR + 27Q^2 = 0,$$

ce qui s'accorde avec l'énoncé de la Question 387 des *Nouvelles Annales* (*).

Pour $k = 0$, on a $Q = 0$, et l'équation (1) devient bicarrée.

Pour $k = \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$, la formule (2) fournit des conditions très-simples dont quelques-unes figurent dans des ouvrages didactiques.

2° *Réciproquement, si l'expression algébrique des racines x ne contient pas de radicaux cubiques, la re-*

(*) Proposée par M. Faure au t. XVI de la 1re série, p. 183, et résolue par M. Blerzy au t. XVIII, p. 432, et par M. Martelli au t. III de la 2e série, p. 401.

lation (2) *subsiste entre les coefficients rationnels* P, Q, R *pour une valeur rationnelle de* k. *On suppose ici que* P *est différent de zéro.*

C'est, ainsi que nous allons le voir, une conséquence directe de ce fait bien connu, que *lorsqu'une équation du quatrième degré à coefficients commensurables est résoluble sans l'emploi de radicaux cubiques, l'équation résolvante a une racine commensurable, et réciproquement.* Le théorème ne doit donc pas être regardé comme nouveau. Cependant, comme il a une importance propre et qu'il n'a peut-être pas encore été énoncé sous une forme simple et explicite, il nous a paru opportun de le présenter ici, en le justifiant par la démonstration qui suit.

2. Pour rattacher le théorème à la résolution de l'équation (1), nous rappellerons d'abord que la résolvante de cette équation est, par la méthode de Lagrange,

$$\alpha^3 + 2P\alpha^2 + (P^2 - 4R)\alpha - Q^2 = 0.$$

D'après l'expression connue des racines x en fonction des racines α, il est manifeste que, lorsque cette résolvante admet une racine rationnelle (ce qui fait que les deux autres racines dépendent d'une équation du second degré), les racines x s'expriment par des radicaux carrés.

Les coefficients P, Q, R sont supposés rationnels; par conséquent, si une racine α est rationnelle, en faisant $\alpha = -kP$, k sera rationnel. On peut donc remplacer l'équation en α par la transformée

$$(2) \qquad k(k-1)^2P^3 - 4kPR + Q^2 = 0$$

et affirmer que, lorsque cette relation (2) a lieu entre les coefficients P, Q, R pour une valeur rationnelle de k, l'expression algébrique des racines x ne renferme pas de radical cubique.

Réciproquement, si x s'exprime sans l'emploi des racaux cubiques, la résolvante en α (et par suite sa transformée en k, si P est différent de zéro) aura nécessairement une racine rationnelle (voir SERRET, *Algèbre supérieure*, 4e édition, t. II, p. 467). Inutile de rappeler que la résolvante de Ferrari, considérée par M. Serret, se ramène à celle de Lagrange au moyen d'une simple transformation linéaire.

Le théorème est donc démontré.

Ajoutons, à l'appui de ce qui précède, que si l'on cherche à déterminer trois quantités α, β, γ de manière que l'on ait

$$-\alpha + 2\beta = \mathrm{P}, \quad 2\alpha\gamma = \mathrm{Q}, \quad -\alpha\gamma^2 + \beta^2 = \mathrm{R},$$

on est conduit aux équations

$$\alpha^3 + 2\mathrm{P}\alpha^2 + (\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{R})\alpha - \mathrm{Q}^2 = 0,$$
$$\beta = \frac{\alpha + \mathrm{P}}{2}, \quad \gamma = \frac{\mathrm{Q}}{2\alpha},$$

dont la première coïncide avec la résolvante rapportée ci-dessus. L'équation (1) devient par là

$$\begin{aligned} &x^4 - (\alpha - 2\beta)x^2 + 2\alpha\gamma x - (\alpha\gamma^2 - \beta^2) \\ &\quad = [x^2 + x\sqrt{\alpha} + (\beta - \gamma\sqrt{\alpha})][x^2 - x\sqrt{\alpha} + (\beta + \gamma\sqrt{\alpha})] = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, α étant un nombre rationnel, elle se décompose en deux équations du second degré dont les coefficients, et par suite les racines, sont exprimés sans l'intervention d'aucun radical cubique. On reconnaîtra de même que, si les quatre racines x s'expriment sans radical cubique, l'une au moins des valeurs de α doit être rationnelle.

Remarque. — La seconde partie du théorème suppose que P est différent de zéro. Si $P = 0$, on verra, par ce qui va suivre, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$x^4 + Qx + R = 0$$

soit résoluble par radicaux carrés, s'exprime par la relation

$$k(k-1)^2(4R)^3 - Q^4 = 0,$$

dans laquelle k doit être rationnel.

3. Si l'on suppose $R = 0$ dans l'équation (1), P et Q étant rationnels et différents de zéro, on conclura de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation cubique

$$(4) \qquad x^3 + Px + Q = 0$$

ait une racine rationnelle peut s'exprimer par la relation

$$k(k-1)^2P^3 + Q^2 = 0,$$

k étant rationnel.

C'est, en effet, ce qui se prouve directement sur l'équation (3), en y faisant $x = \frac{Q}{(k-1)P}$, sans passer par la considération de l'équation du quatrième degré. On voit de plus que les trois racines x sont rationnelles lorsqu'il y a trois valeurs rationnelles de k vérifiant la relation indiquée, et réciproquement.

Au point de vue de la détermination de x, la transformation précédente ne fait que transposer la difficulté sans donner le moyen de la résoudre. Mais il n'en est pas ainsi au point de vue théorique, où l'on se propose seulement de formuler les conditions relatives à la rationnalité des racines x.

Faisant, dans la relation ci-dessus, $k - 1 = h$, et passant les quantités connues dans le second membre, les conditions dont il s'agit se présentent sous une forme tout à fait nette et explicite. On obtient, en effet, la relation

$$(5) \qquad h^2 + h^3 = -\frac{Q^2}{P^3},$$

c'est-à-dire une formule dont l'un des membres exprime une *forme fractionnaire abstraite* (la somme algébrique du carré et du cube d'un même nombre rationnel), tandis que l'autre membre est une fonction déterminée des coefficients, fonction dont la valeur doit appartenir de *une* ou de *trois* manières à la forme indiquée, selon que l'équation (3) admet *une* ou *trois* racines rationnelles.

Il y a avantage cependant à ne considérer cette formule (4) que relativement à la rationnalité d'une racine de la proposée. Pour exprimer que les deux autres racines sont également commensurables, il est préférable d'avoir recours à la condition bien connue qui assujettit les racines à être des fonctions rationnelles l'une de l'autre et des quantités connues (voir l'*Algèbre supérieure* déjà citée). Cette condition ayant lieu, il suffira, pour la rationnalité des trois valeurs de x, que la quantité positive $-\frac{Q^2}{P^3}$ soit considérée comme devant être égale à la somme du carré et du cube d'un même nombre rationnel *positif*.

D'après cela, nous énoncerons le théorème suivant, où nous admettons, pour plus de précision et sans nuire à la généralité, que les valeurs numériques de P et Q sont entières :

1° *Pour que l'équation*

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

à coefficients entiers, admette une racine entière, il faut et il suffit que le rapport $-\frac{Q^2}{P^3}$ *soit égal à la somme algébrique du carré et du cube d'un même nombre rationnel.*

2° *Pour que l'équation considérée ait ses trois racines entières (et inégales), il faut et il suffit que le rapport mentionné soit égal à la somme du carré et du cube d'un même nombre rationnel positif, et que la quantité* $-4P^3-27Q^2$ *soit égale à un carré pris positivement.*

Nous ne nous arrèterons pas sur quelques spécifications ultérieures qui pourraient être ajoutées à l'énoncé, et qui n'échapperont pas au lecteur.

Les coefficients P et Q étant donnés en nombres, on vérifiera directement si la condition mentionnée en dernier lieu est remplie; quant aux conditions fournies par la formule (4), prise dans sa généralité, elles sont purement théoriques.

Nous avons donné sur ce sujet quelques indications pratiques dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 289 et 424, ainsi que dans les énoncés de plusieurs *Questions* proposées dans les derniers volumes de ce Recueil.