Nouvelles annales de mathématiques

Arthur Leinchugel

Concours d'admission à l'École centrale. 2e session. 17 et 18 octobre 1878

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 365-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__365_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

2e SESSION : — 17 ET 18 OCTOBRE 1878.

(voir 2e série, t. XVIII, p. 93);

SOLUTION DE M. ARTHUR LEINCHUGEL,

Étudiant en Mathématiques.

1° *On donne dans un plan une droite* P *et un point* F, *pris en dehors et à une distance* a *de cette droite : écrire l'équation générale des hyperboles qui ont le point* F *pour un de leurs foyers, et la droite* P *pour une de leurs asymptotes.*

2° *Du centre de chacune de ces hyperboles on mène* *à la droite P une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à son intersection M avec la directrice correspondant au foyer F : trouver l'équation de la courbe lieu des points M, et indiquer la position de cette courbe.*

3° *Former l'équation du lieu des projections du foyer F sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles considérées.*

Prenons pour axe des x la droite donnée et pour axe des y la perpendiculaire FO, abaissée du foyer F sur cette droite.

1° La directrice correspondant au foyer F passant par l'origine O, l'équation générale des coniques ayant un de leurs foyers au point F est

$$x^2 + (y - a)^2 = (\lambda x + \mu y)^2.$$

L'axe des x étant l'une des asymptotes des hyperboles considérées, $\lambda = +1$, et l'équation générale de ces coniques est

$$x^2 + (y - a)^2 = (x + \mu y)^2. \tag{1}$$

2° Les coordonnées du centre C de l'hyperbole représentée par l'équation (1) sont $y = 0$, $x = -\frac{a}{\mu}$, et l'équation de la perpendiculaire CM à la droite P est

$$\mu x + a = 0. \tag{2}$$

L'équation de la directrice OM correspondant au foyer F est

$$\mu y + x = 0. \tag{3}$$

Multiplions respectivement les équations (2) et (3) par y et x, et retranchons membre à membre les équations résultantes ; il vient

$$x^2 - ay = 0.$$

Le lieu des points M est donc une parabole de paramètre $\frac{a}{2}$, ayant OF pour axe et Ox pour tangente au sommet.

On peut trouver facilement ce lieu par la Géométrie. En effet, abaissons sur OF la perpendiculaire MP, et soit D le point d'intersection de FC avec OM. Les triangles semblables OMP, OFD donnent

$$OD.OM = OF.OP.$$

Or,

$$OC^2 = OD.OM;$$

donc

$$OC^2 = OF.OP = OF \times MC, \quad \text{ou} \quad x^2 = ay.$$

3° La figure étant symétrique par rapport à CF, *le lieu des projections du foyer* F *sur la seconde asymptote de chacune des hyperboles considérées* est évidemment la circonférence décrite de F comme centre, avec a pour rayon. L'équation de ce lieu est

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

En traitant cette dernière question au moyen de l'équation générale (1), on arrive à une équation du quatrième degré dans laquelle on peut mettre en facteur le premier membre de l'équation (4). Cette équation du quatrième degré montre que le point F est un point isolé.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Robaglia; G. Lambiotte, élève à l'École polytechnique de Bruxelles; G. Kœnigs, de Toulouse; H. Rigolot.