NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARTHUR LEINCHUGEL

Concours d'admission à l'École spéciale militaire (1878). Deuxième question

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 368-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__368_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1878)

DEUXIÈME QUESTION

(voir p. 90);

SOLUTION DE M. ARTHUR LEINCHUGEL,
Étudiant en Mathématiques.

On donne les trois côtés a, b, c d'un triangle, et l'on suppose $a > b > c$. Déterminer la quantité x qu'il faut retrancher de chaque côté pour que le triangle qui aurait pour côtés $a - x$, $b - x$, $c - x$ soit rectangle. (Discussion sommaire.)

On doit avoir, d'après l'énoncé,

$$(a - x)^2 = (b - x)^2 + (c - x)^2$$

ou

$$(1) \qquad x^2 - 2(b + c - a)x + b^2 + c^2 - a^2 = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont réelles, car on a

$$(b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2) = 2(a - b)(a - c) > 0;$$

leur somme $2(b + c - a)$ est positive, puisque le côté a du triangle donné est moindre que la somme des deux autres côtés.

Le produit $b^2 + c^2 - a^2$ de ces racines peut s'écrire

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A;$$

donc, quand $A > 90^\circ$, on a $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, et les racines sont de signe contraire.

Pour $A < 90^\circ$, on a $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, et les deux racines sont positives.

Si $A = 90^\circ$, $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, et l'équation (1) se réduit à

$$x[x - 2(b + c - a)]; \text{ d'où } x = 0 \text{ et } x = 2(b + c - a).$$

La racine $2(b + c - a)$, étant plus grande que c, ne peut convenir.

On voit facilement que, dans les hypothèses $A \gtrless 90^\circ$, la racine correspondant au signe $+$, pris devant le radical, est plus grande que c, et, par suite, doit être rejetée (*).