Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e^ série, tome 18 (1879), p. 374-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__374_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1263

(voir 2e série, t. XVII, p. 239);

PAR M. MORET-BLANC.

1° *Si par deux points* M, N, *pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on mène des droites faisant avec les côtés du triangle des angles* α *de même orientation, les deux transversales qui joignent respectivement les trois sommets d'angles issus de* M, *et les trois sommets d'angles issus de* N, *se coupent en un point* P *sous un angle constant.*

2° *Déterminer le lieu du point* P, *quand on fait varier l'angle* α. (P. TERRIER.)

1° Soient Ma, Mb, Mc les obliques menées du point M aux côtés BC, CA, AB sous l'angle α. Elles sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du point M sur ces côtés, et font avec celles-ci des angles égaux à $90° - \alpha$; il en résulte que les points a, b, c sont sur une droite faisant avec la droite de Simpson, relative au point M, l'angle $90° - \alpha$. En effet, si l'on portait les longueurs Ma, Mb, Mc sur les perpendiculaires, leurs extrémités seraient sur une parallèle à la droite de Simpson, laquelle prendra la position abc en la faisant tourner de $90° - \alpha$ autour du point M.

De même, Na', Nb', Nc' étant les droites analogues menées du point N, les points a', b', c' sont sur une droite faisant avec la droite de Simpson, relative au point N, l'angle $90^\circ - \alpha$, de même orientation que le premier. Il en résulte que les droites abc, $a'b'c'$ font entre elles un angle égal à celui des droites de Simpson, relatives aux points M et N, et par conséquent indépendant de α.

2° Soit RS une droite quelconque. Les droites abc, $a'b'c'$ tracent sur RS deux divisions homographiques dont les points doubles sont les points où le lieu du point P rencontre la droite RS : ce lieu est donc une *conique*.

On déterminera les points où elle rencontre les côtés du triangle en considérant les obliques qui aboutissent respectivement aux sommets.

Remarque. — Chaque série de droites, les droites abc, par exemple, enveloppe une conique tangente aux trois côtés du triangle.

En effet, chaque droite trace sur deux côtés du triangle deux divisions homographiques, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de α correspondent un point a et un point b ; les droites qui joignent les points correspondants de deux divisions homographiques tracées sur deux droites enveloppent, comme on sait, une conique.

Les côtés du triangle font d'ailleurs partie de la série des droites ; on les obtient en déterminant l'angle α, de manière que l'une des obliques aboutisse à un sommet.

Note. — Solutions analogues de MM. Ferdinando Pisani et Robaglia.

Question 1264

(voir 2e série, t XVII, p. 240).

PAR M. VLADIMIR HABBÉ.

On donne une droite dont le coefficient d'inclinaison est $\tan \alpha$ *(axes rectangulaires) : indiquer une construction graphique qui donne directement* $\tan^3 \alpha$.

Application à la construction graphique d'une tangente à la cissoïde et à la strophoïde, parallèlement à une direction donnée. (H. Brocard.)

Soit AB la droite donnée qui forme avec l'axe OX l'angle OAB $= \alpha$. Au point B, où elle coupe l'axe OY, menons à cette droite la perpendiculaire BC, qui rencontre en C le prolongement de OX. Menons encore à BC la perpendiculaire CD, dont l'intersection avec le prolongement de OY est D.

Dans le triangle rectangle DOA, on aura

$$\text{tang}\,\text{DAO} = \text{tang}^3\alpha.$$

En effet, les triangles rectangles AOB, BOC, COD DOA donnent, respectivement,

$$\text{OB} = \text{OA}\,.\,\text{tang}\,\alpha,\quad \text{OC} = \text{OB}\,\text{tang}\,\alpha,$$

$$\text{OD} = \text{OC}\,.\,\text{tang}\,\alpha,\quad \text{tang}\,\text{DAO} = \frac{\text{OD}}{\text{OA}},$$

et, en multipliant membre à membre ces quatre égalités, il vient

$$\text{tang}\,\text{DAO} = \text{tang}^3\alpha.$$

Note. — Nous avons reçu plusieurs autres solutions très-simples de la première partie de cette question; la seconde partie, relative aux tangentes, n'a pas été résolue.

Question 1278

(voir 2e série, t. XVII, p. 336);

Par M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Trouver la somme des puissances semblables des racines de l'équation trinôme

$$x^{2n} + px^n + q = 0$$

lorsque l'exposant t est un multiple de n. (Pellet.)

Posant $x^n = y$, l'équation devient

$$(1) \qquad y^2 + py + q = 0,$$

et, en appelant y', y'' les racines de cette dernière, on aura

$$x'^n = y' \quad \text{et} \quad x''^n = y''.$$

Ces équations se ramènent à la forme

$$(2) \qquad z^n - 1 = 0,$$

en posant

$$x' = z\sqrt[n]{y'} \quad \text{et} \quad x'' = z\sqrt[n]{y''}.$$

Représentons les racines de l'équation (2) par z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_n$; nous aurons, pour les valeurs de x,

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = z_1\sqrt[n]{y'} \\ x'_2 = z_2\sqrt[n]{y'} \\ x'_3 = z_3\sqrt[n]{y'} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x'_n = z_n\sqrt[n]{y'} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x''_1 = z_1\sqrt[n]{y''} \\ x''_2 = z_2\sqrt[n]{y''} \\ x''_3 = z_3\sqrt[n]{y''} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x''_n = z_n\sqrt[n]{y''} ; \end{array}\right.$$

par suite, en désignant par S_t la somme des puissances semblables de ces racines, nous aurons

$$S_t = (z_1^t + z_2^t + z_3^t + \ldots + z_n^t)\left(y'^{\frac{t}{n}} + y''^{\frac{t}{n}}\right).$$

Or, on sait que la somme des puissances semblables des racines de l'équation binôme $z^n - 1 = 0$ est égale à n lorsque l'indice de la puissance est multiple de n ; donc

$$S_t = n\left(y'^{\frac{t}{n}} + y''^{\frac{t}{n}}\right).$$

On est ainsi ramené à une question connue : trouver la somme des puissances semblables des racines de l'équation (1) du second degré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Louis Manipond, élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Grenoble.

Question 1295

(voir 2e série, t. XVII, p. 526);

PAR M. P. SONDAT.

Démontrer :

1° *Que, si une solution de l'équation indéterminée*

$$u^3 + v^3 + x^3 + y^3 = 0$$

est donnée par l'égalité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

on obtient une nouvelle solution en faisant

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\beta + \gamma + \delta) - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2, \\ v &= \beta(\alpha + \gamma + \delta) - \alpha^2 + \gamma^2 + \delta^2, \\ x &= \gamma(\alpha + \beta + \delta) + \alpha^2 + \beta^2 - \delta^2, \\ y &= \delta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2; \end{aligned}$$

2° *Que, si l'on part de cette seconde solution pour en obtenir une troisième par le même procédé, on retombera, à un facteur commun près, sur les valeurs* α, β, γ, δ. (S. Réalis.)

1. En posant

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ B &= \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2, \end{aligned} \right.$$

on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \alpha A - B, \\ v &= \beta A - B, \\ x &= \gamma A + B, \\ y &= \delta A + B, \end{aligned} \right.$$

et, en remplaçant dans l'équation proposée, on a

$$u^3 + v^3 + x^3 + y^3 = A^3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3),$$

c'est-à-dire que, en vertu de l'égalité admise, cette équation est satisfaite par les valeurs (2).

2. On aura une troisième solution, formée par les valeurs

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= uA' - B',\\ v' &= vA' - B',\\ x' &= xA' + B',\\ y' &= yA' + B',\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} A' &= u + v + x + y,\\ B' &= u^2 + v^2 - x^2 - y^2.\end{aligned}\right.$$

Mais, d'après (1) et (2),

$$A' = A^2,$$
$$B' = -A^2 B,$$

d'où

$$u' = A^3\alpha,\quad v' = A^3\beta,\quad x' = A^3\gamma,\quad y' = A^3\delta,$$

et l'on retrouve, à un facteur commun près, les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; D. Charvet, élève en Mathematiques spéciales au Lycée de Grenoble; Louis Cauret.

Question 1301

(voir 2e série, t. XVII, p. 127);

PAR M. LEZ.

Dans un segment d'une conique quelconque, inscrire un trapèze maximum, la corde qui limite le segment étant une des bases du trapèze.

(F. GABRIEL-MARIE.)

1. Examinons d'abord le cas le plus simple, où la conique est une parabole. Prenons pour axe des x le diamètre passant par le milieu M de la corde donnée DE, et pour axe des y la tangente au point O de rencontre du diamètre et de la courbe ; l'équation de la parabole sera

$$y^2 = 2px,$$

et, si m, n représentent les abscisses OM, ON des points où le diamètre OX rencontre les bases du trapèze inscrit, les ordonnées correspondantes MD, NC, c'est-à-dire les moitiés des bases du trapèze, auront, respectivement, pour valeurs $\sqrt{2qm}$, $\sqrt{2qn}$, et la surface sera exprimée par

$$S = \sin\theta . (m - n)(\sqrt{2qm} + \sqrt{2qn}).$$

Or, la dérivée de cette expression, prise par rapport à l'inconnue n, est

$$\sin\theta . \sqrt{2q}\left(\frac{m - 3n}{2\sqrt{n}} - \sqrt{m}\right):$$

les valeurs de n, qui l'annulent, sont déterminées par l'équation

$$(m - 3n)^2 = 4mn,$$

dont les racines sont

$$n' = m, \quad n'' = \frac{m}{9}.$$

Cette dernière répond à la question.

2. Dans le cas d'une conique à centre, d'une ellipse, par exemple, prenons encore pour axes coordonnés un système de diamètres conjugués OA, OB, le premier passant par le milieu M de la corde donnée.

En désignant par α, β les demi-diamètres conjugués OA, OB, et par m, n les abscisses OM, ON des milieux des bases du trapèze, les ordonnées correspondant à ces abscisses, ou les demi-bases du trapèze, seront exprimées en longueur par

$$\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - m^2}, \quad \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - n^2}.$$

La surface sera

$$S = (n - m)\,\frac{\beta}{\alpha}\sin\theta\left(\sqrt{\alpha^2 - m^2} + \sqrt{\alpha^2 - n^2}\right),$$

dont la dérivée, par rapport à n, est

$$\frac{\beta}{\alpha}\sin\theta\left(\sqrt{\alpha^2 - m^2} + \frac{\alpha^2 + mn - 2n^2}{\sqrt{\alpha^2 - n^2}}\right).$$

En égalant à zéro cette dérivée, il vient

$$2n^2 - mn - \alpha^2 = \sqrt{(\alpha^2 - m^2)(\alpha^2 - n^2)};$$

d'où

$$(2n^2 - mn - \alpha^2)^2 = (\alpha^2 - m^2)(\alpha^2 - n^2),$$

et par suite

(1) $$4n^4 - 4mn^3 - 3\alpha^2n^2 + 2\alpha^2mn + \alpha^2m^2 = 0.$$

L'équation (1) est vérifiée par $n = m$, et se réduit à

(2) $$4n^3 - 3\alpha^2n - \alpha^2m = 0,$$

en supprimant la racine égale à m.

Cette dernière équation est celle qui permet de trouver $\cos\frac{\varphi}{3}$ en fonction de $\cos\varphi$ (*).

(*) En divisant tous les termes de l'équation (2) par α^3, on a

$$4\left(\frac{n}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\frac{n}{\alpha}\right) - \frac{m}{\alpha} = 0,$$

et, parce que $\frac{m}{\alpha}$ est moindre que l'unité, on peut considérer $\frac{m}{\alpha}$ comme le cosinus d'un angle déterminé φ. En prenant pour inconnue $\frac{n}{\alpha}$, les racines de l'équation

$$4\left(\frac{n}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\frac{n}{\alpha}\right) - \frac{m}{\alpha} = 0$$

sont alors les valeurs de $\cos\frac{\varphi}{3}$. (*Note du Rédacteur.*)

Au reste, les racines de l'équation (2) sont les abscisses de points de rencontre de la parabole $x^2 = \frac{\alpha y}{2}$ et de la circonférence $y^2 + x^2 - 2\alpha y - mx = 0$. Ces deux courbes passent par l'origine des coordonnées : il est facile de les construire. De cette manière, nous déterminerons, géométriquement, l'abscisse du point N, milieu du plus petit côté du trapèze maximum, inscrit dans un segment donné elliptique. La même méthode conduira à un résultat semblable pour l'hyperbole.

Remarquons enfin que, si la corde donnée est un diamètre de l'ellipse, on aura $m = 0$, et les valeurs de n seront données par l'équation

$$n(4n^2 - 3\alpha^2) = 0, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2},$$

ce qui est le cosinus du tiers de $\frac{\pi}{2}$, dans un cercle de rayon α.

NOTE. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.