NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TISSOT

Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 385-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__385_0>

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)].

Cartes de France et d'Espagne.

57. Sur la carte de France construite par le Dépôt de la Guerre, la plus grande altération d'angle est de 18 minutes; la plus grande altération de l'unité de longueur est $\frac{1}{380}$. Elles eussent été respectivement $10'30''$ et $\frac{1}{650}$, si, au lieu du parallèle de 45 degrés de latitude, comme parallèle moyen, on avait pris celui de $46°30'$. Enfin, elles se trouveraient réduites à 25 secondes et $\frac{1}{1100}$, si l'on faisait usage des formules (3) avec

$$A = 0,306, \quad C = -0,368, \quad l_0 = 41°30',$$

le méridien moyen étant celui de Paris. Nous nous bornerons à ces quelques indications au sujet d'une carte qui n'est plus à faire. Nous nous étendrons, au contraire, sur l'application des recherches qui précèdent à la construction de la carte d'Espagne.

58. La carte auxiliaire de ce pays a été construite à l'échelle de 1 millimètre pour 2 minutes d'arc, sur une feuille divisée en petits carrés de 1 millimètre de

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVIII, p. 337.

côté, les coordonnées rectangulaires de chaque point étant l'excès de sa latitude sur 40 degrés, et le produit de sa longitude par cos 40°. Sur une autre feuille, quadrillée comme la première, on a tracé les onze ellipses du n° 46; chacune a été reportée sur papier transparent; puis on l'a réduite ou amplifiée, à l'aide d'un compas de proportion, de manière à en obtenir trois ou quatre autres qui lui soient homothétiques. On a déterminé l'ellipse limite de chacune des onze feuilles ainsi obtenues, puis mesuré en millimètres le diamètre Δ, qui est incliné à 45 degrés sur les axes. Chacun des nombres trouvés a été multiplié par l'arc de 2 minutes, c'est-à-dire par $\frac{\pi}{5400}$, la lettre π représentant le rapport de la circonférence au diamètre; on a pris le quart du produit, puis on a élevé au carré, ce qui a donné la valeur correspondante de l'altération de l'unité de longueur. On a pu ainsi former le tableau suivant :

Numéros des ellipses.	Rapports des axes.	Δ en millimètres.	Valeurs correspondantes de ε.
1......	0	322	0,0022
2......	0,1	321	0,0022
3......	0,2	316	0,0021
4......	0,3	310	0,0020
5......	0,4	303	0,0020
6......	0,5	299	0,0019
7......	0,6	293	0,0018
8......	0,7	292	0,0018
9......	0,8	298	0,0019
10......	0,9	304	0,0019
11......	1	309	0,0020

L'ellipse n° 8 est celle qui correspond au *minimum*. Lorsqu'on la place sur la carte auxiliaire de manière à envelopper l'Espagne, elle en touche le contour aux points suivants : cap Ortégal, cap Saint-Adrien, île de Tarifa, cap de Creus. Son centre est alors de 21 minutes à l'ouest du méridien de Madrid, et de 22 minutes au nord du parallèle de 40 degrés ; enfin, son grand axe fait, avec la direction des parallèles de la carte, un angle de 12°30′, qu'il faut porter de l'est vers le nord. Avec ces données, il serait facile de calculer A, B, C par les formules (8), (5) et (2). Le mode de représentation se trouverait défini par les expressions (3) de x et de y, après qu'on y aurait remplacé les trois coefficients par les valeurs obtenues. La plus grande altération de l'unité ds longueur serait 0,0018, ou seulement 0,0009 si l'on choisit l'échelle de manière à avoir, au centre et sur l'ellipse limite, des altérations égales et de signes contraires (n° 48).

La demi-longueur du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes de l'ellipse limite est de 146 millimètres. Ayant construit un carré de 146 millimètres de côté, on constate facilement qu'il est possible de le placer sur la carte auxiliaire de manière que le contour de l'Espagne l'enveloppe entièrement. Quand il a cette position, il est impossible qu'une branche d'hyperbole passant par deux de ses sommets soit extérieure au contour ; par conséquent, pour la portion de la contrée couverte par le carré, et à plus forte raison pour la contrée elle-même, la plus grande altération de l'unité de longueur produite par un système de projection correspondant à une valeur de F négative ou supérieure à $\frac{1}{2}$ surpasserait 0,0009. Il est donc inutile de faire une seconde série d'essais portant sur des hyperboles.

Il n'y a pas lieu non plus d'essayer les paraboles. On le reconnaît en constatant que, si une droite de 146 millimètres de longueur a ses deux extrémités en dehors du contour de la carte auxiliaire, toute parabole passant par ces deux extrémités, et ayant son axe perpendiculaire à la droite, ou bien coupera le contour, ou bien interceptera sur l'axe, entre son sommet et la droite, une longueur moindre que la portion de l'axe comprise entre la même droite et le contour du pays.

59. Le point central que nous avons déterminé se trouve près du méridien de Madrid et dans le voisinage du parallèle de 40 degrés : il convient de le transporter à l'intersection de ces deux lignes. De plus, le grand axe des ellipses ayant une direction peu différente de celle des parallèles de la carte auxiliaire, nous pouvons abandonner les formules (3) et avoir recours aux expressions plus simples (9) de x et de y qui correspondent à $E = 0$. En renouvelant, pour les onze formes d'ellipses, les essais déjà effectués, mais en s'astreignant cette fois à placer l'un des axes sur le parallèle de 40 degrés de la carte provisoire, et l'autre sur le méridien de Madrid, on est conduit à former le tableau suivant :

Numéros des ellipses.	Rapports des axes.	Δ en millimètres.	Valeurs correspondantes de ε.
1......	0	335	0,0024
2......	0,1	333	0,0024
3......	0,2	330	0,0023
4......	0,3	324	0,0022
5......	0,4	315	0,0021
6......	0,5	310	0,0020
7......	0,6	308	0,0020
8......	0,7	306	0,0020
9......	0,8	321	0,0022
10......	0,9	340	0,0024
11......	1	351	0,0026

L'ellipse n° 8 est, comme tout à l'heure, celle qui réduit à son minimum la plus grande valeur de ε. Elle touche le contour de la carte auxiliaire au cap de Creus. La valeur correspondante de A est 0,165. La plus grande altération de l'unité de longueur est 0,0010, soit en plus, soit en moins.

60. Les onze ellipses limites passent dans le voisinage du cap Ortégal, et ce point se trouve à peu près sur le diamètre qui fait des angles de 45 degrés avec les axes; c'est pourquoi il y a peu de différence entre les diverses longueurs de ce diamètre, et, par conséquent, entre les valeurs correspondantes de ε. C'est donc ici le cas de renoncer même aux formules (9) et d'adopter le système remarquable de projection que nous avons étudié en dernier lieu (n° 54); il correspond à l'ellipse n° 1, laquelle se réduit à deux droites parallèles. La plus grande altération de l'unité de longueur ne se trouvera pas beaucoup augmentée par ce nouveau changement : de 0,0010, elle deviendra 0,0012.

Pour introduire les nombres dans la formule (14), nous avons supposé que l'on adoptait l'échelle de $\frac{1}{50000}$. Le rayon équatorial, qui jusqu'ici nous servait d'unité, a été pris égal à 6377398 mètres, et le carré e^2 de l'excentricité de l'ellipse méridienne à 0,0066744; ce sont les valeurs calculées par Bessel. Celles qui ont été obtenues depuis par l'*Ordnance Survey*, savoir 6378284 mètres et 0,0067853, s'adaptent mieux à la forme générale de la surface du globe, puisqu'on a fait concourir à leur détermination un plus grand nombre de mesures effectuées dans des régions très-diverses ; mais elles se rapprochent peut-être moins des éléments qu'il conviendrait d'adopter pour l'Espagne en particulier. La connaissance de ces éléments résultera précisément des opérations géodésiques que nécessite la construction de la carte. En tout cas, les changements que nos résultats devront subir se réduiront à des corrections dont le calcul se fera rapidement.

Appelons Λ l'excès, évalué en demi-degrés, de la latitude d'un parallèle sur 40 degrés, c'est-à-dire posons

$$\lambda = \frac{\pi}{360}\Lambda;$$

la formule (14) nous donnera, pour le rayon du parallèle de la carte exprimé en décimillimètres,

$$R = 1522157{,}7 - 11108{,}2622\Lambda - 0{,}4788\Lambda^2 - 0{,}1413\Lambda^3.$$

61. Les méridiens et les parallèles de la carte se coupant à angle droit, les axes de l'ellipse indicatrice se trouveront, en chaque point, sur ces deux lignes; a sera la plus grande, et b la plus petite des deux quantités

$$h = -\frac{360}{\pi}\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\Lambda}, \quad k = \frac{R\sin 40^\circ}{r}.$$

La plus grande altération d'angle, au point considéré, sera donnée en secondes par

$$2\omega = \frac{a-b}{\sin 1''}.$$

Le long du parallèle de 40 degrés, les angles sont rigoureusement conservés ainsi que les distances. Pour le parallèle de 36 degrés, qui est le plus au sud, on a

$$\Lambda = -8, \quad R = 1611017{,}51, \quad \frac{dR}{d\Lambda} = -11121{,}731,$$

d'où résulte

$$h = 1{,}002434, \quad K = 1{,}002387, \quad 2\omega = 10''.$$

Soit ζ un nombre déterminé par la condition

$$\zeta = 1{,}002434(1 \quad \zeta) - 1,$$

laquelle donne

$$\zeta = 0{,}001216.$$

Si l'on multiplie tous les termes de R par $1 - \zeta$, il viendra

$$R = 1520307 - 11088{,}765\,A - 0{,}478\,A^2 - 0{,}141\,A^3.$$

En adoptant cette nouvelle valeur de R, on ne modifiera pas les altérations d'angles, et l'on réduira de moitié la plus grande altération de l'unité de longueur, qui alors se produira tantôt en plus et tantôt en moins. On trouve, en effet, pour le parallèle de 36 degrés,

$$h = 1 + 0{,}001214, \quad k = 1 + 0{,}001168, \quad 2\omega = 10'',$$

pour celui de 40 degrés,

$$h = 1 - 0{,}001216, \quad k = 1 - 0{,}001216, \quad 2\omega = 0,$$

et pour celui de $43^\circ 50'$, qui est le plus au nord,

$$h = 1 + 0{,}001016, \quad k = 1 + 0{,}001060, \quad 2\omega = 9''.$$

Enfin, on peut, jusqu'à un certain point, tenir compte des termes de R où A entrerait à une puissance supérieure à la troisième, et qui ont été négligés, en modifiant un peu les coefficients des autres termes. Les altérations ne se trouvent diminuées ainsi que de quantités insignifiantes, mais la formule devient un peu plus simple. Nous prendrons définitivement

$$(15) \quad R = 1520344 - 11089{,}03\,A - 0{,}51\,A^2 - 0{,}141\,A^3.$$

Avec cette expression de R, la plus grande altération de l'unité de longueur est 0,00119, et la plus grande altération d'angle n'atteint pas 4 secondes. Ces mêmes altérations seraient respectivement 0,0018 et 12 minutes avec la projection de Bonne, qui a été employée en France par le Dépôt de la Guerre. Elles s'élèveraient à

0,0360 et à 3 degrés si l'on avait recours au développement conique, qui cependant ne diffère du système proposé que par la loi suivant laquelle les rayons des parallèles de la carte dépendent de la latitude. Enfin, sur notre carte, nous pouvons placer les îles Baléares et le Portugal sans que les plus grandes altérations augmentent; il n'en serait pas de même si l'on faisait usage de la projection de Bonne.

62. En résumé, dans le système de projection qui nous paraît le mieux approprié à la construction de la carte d'Espagne, les méridiens sont représentés par des droites partant d'un même point, les parallèles par des circonférences ayant ce point pour centre. L'angle de deux méridiens de la carte est égal au produit de l'angle des méridiens correspondants du globe par le sinus de 40 degrés. Les rayons des parallèles de la carte, supposée construite à l'échelle de $\frac{1}{500000}$, sont donnés, en décimillimètres, par la formule (15), dans laquelle λ exprime en demi-degrés l'excès de la latitude du parallèle sur 40 degrés. On aura recours aux formules (13), pour calculer les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la carte. Les altérations d'angles ou de distances sont indépendantes de la longitude.

63. Pour terminer cette application, nous donnerons deux tableaux dont les nombres se rapportent à des latitudes croissant de demi-degré en demi-degré, à partir de 36 degrés, qui est la latitude la plus méridionale de l'Espagne, jusqu'à 44 degrés. Comme le parallèle de 44 degrés est en dehors de la contrée, nous avons introduit aussi dans nos tableaux la latitude de 43°50', qui est celle du point le plus septentrional.

Le premier tableau fait connaître les rayons de courbure et les grandes normales de l'ellipse méridienne, le rayon équatorial étant pris pour unité, puis les longueurs des mêmes lignes et celles des rayons des parallèles terrestres, exprimées en mètres, le rayon équatorial étant supposé égal à 6377398 mètres.

l	ρ	N	ρ	N	r
36° 0′	0,99677137	1,00115497	6356808 m	6384764 m	5165382 m
36,30	0,99685462	1,00118284	6357339	6384941	5132579
37, 0	0,99693833	1,00121087	6357872	6385120	5099384
37,30	0,99702247	1,00123903	6358409	6385300	5065799
38, 0	0,99710701	1,00126733	6358948	6385480	5031827
38,30	0,99719194	1,00129576	6359490	6385662	4997471
39, 0	0,99727723	1,00132430	6360034	6385844	4962733
39,30	0,99736284	1,00135296	6360580	6386026	4927615
40, 0	0,99744875	1,00138171	6361128	6386210	4892120
40,30	0,99753494	1,00141055	6361677	6386394	4856252
41, 0	0,99762139	1,00143948	6362229	6386578	4820012
41,30	0,99770806	1,00146848	6362781	6386763	4783403
42, 0	0,99779492	1,00149754	6363335	6386948	4746428
42,30	0,99788196	1,00152666	6363890	6387134	4709089
43, 0	0,99796915	1,00155583	6364446	6387320	4671390
43,30	0,99805645	1,00158503	6365003	6387506	4633333
43,50	0,99811471	1,00160452	6365375	6387631	4607765
44, 0	0,99814385	1,00161427	6365561	6387693	4594922

Dans le second tableau, on trouvera les rayons des parallèles de la carte exprimés en décimillimètres; leurs dérivées par rapport à Λ changées de signe; les rapports des arcs infiniment petits de méridiens, sur la carte, aux arcs correspondants du globe; les rapports analogues pour les arcs de parallèles. Ces rapports sont ici les axes de l'ellipse indicatrice; jusqu'à 40 degrés, le grand axe se trouve sur le parallèle, et le petit sur le méridien; le contraire a lieu à partir de 40 degrés. L'avant-dernière colonne renferme les plus grandes altérations d'angles évaluées en secondes; elles sont très-faibles, parce que les deux axes de l'ellipse indicatrice diffèrent peu l'un de l'autre; la plus grande différence n'atteint pas 0,00002. Pour la même raison, on peut considérer l'altération de l'unité de longueur, en chaque point, comme ne variant pas avec la direction. Les valeurs de cette altération sont contenues dans la dernière colonne.

l	R	$-\frac{dR}{d\lambda}$	h	K	2ω	ε
° ′	dmm				″	
36, 0	1609096	11107,94	1+0,001191	1+0,001191	0	+ 0,00119
36,30	1597991	11102,62	0628	0636	2	063
37, 0	1586890	11098,14	0141	0153	3	015
37,30	1575794	11094,50	1−0,000272	1−0,000256	3	− 0,00026
38, 0	1564701	11091,72	0607	0591	3	060
38,30	1553610	11089,78	0867	0853	3	086
39, 0	1542521	11088,68	1051	1041	2	105
39,30	1531433	11088,43	1160	1154	1	116
40, 0	1520344	11089,03	1192	1192	0	119
40,30	1509254	11090,47	1148	1154	1	115
41, 0	1498163	11092,76	1028	1039	2	103
41,30	1487069	11095,90	0833	0848	3	084
42, 0	1475971	11099,88	0562	0579	3	057
42,30	1464868	11104,70	0214	0232	4	022
43, 0	1453761	11110,38	1+0,000210	1+0,000194	3	+ 0,00020
43,30	1442647	11116,90	0708	0701	2	070
43,50	1435235	11121,71	1084	1083	0	108
44, 0	1431527	11124,26	1283	1288	1	129

Chaque feuille de la carte sera un véritable levé topographique, l'échelle variant, mais très-lentement avec la latitude, de 8 décimètres moins 1 millimètre à 8 décimètres plus 1 millimètre, pour 4 myriamètres. La longueur de 8 décimètres est celle du grand côté du cadre dans les feuilles de la carte de France.

Carte d'une zone. Carte d'un fuseau. Cartes ayant pour objet la conservation des aires.

64. La méthode que nous avons suivie dans la recherche du système de projection le mieux approprié à la représentation d'une contrée particulière ne suppose pas nécessairement que cette contrée soit peu étendue dans les deux sens; on peut l'appliquer à toute la zone comprise entre deux parallèles dont les latitudes ne diffèrent pas trop l'une de l'autre, et aussi à un fuseau limité par deux méridiens dont l'angle n'est pas trop considérable. On développe, dans le premier cas, suivant les puissances de s, et, dans le second, suivant celles de m. La condition que les altérations d'angles soient du troisième ordre seulement, et les altérations de distances, du second, suffisent pour déterminer complétement les formules; il ne reste pas, dans celles-ci, de coefficients dont on ait la faculté de disposer pour réduire à son *minimum* la plus grande altération de l'unité de longueur.

65. Pour une zone comprise entre deux parallèles, le mode de projection auquel on se trouve conduit est celui des méridiens rectilignes et des parallèles circulaires définis par les formules (12) et (13); on devait s'y attendre d'après la remarque que nous avons faite à la fin du nº 54.

Appliqué à la zone comprise entre les parallèles de $37^\circ 30'$ et $52^\circ 30'$, zone dont fait partie l'Europe centrale, et qui occupe plus du sixième de la surface du globe, le système que nous venons d'indiquer ne produit pas d'altérations au-dessus de $1' 20''$ pour les angles, ni au-dessus de $\frac{1}{230}$ pour l'unité de longueur. Avec la projection de Bonne, les limites analogues eussent été respectivement $14^\circ 40$ et $\frac{1}{7}$.

Pour toute l'Algérie, c'est-à-dire pour le Tell et le Sahara algériens, les limites d'altérations sont, avec notre système, 3″ et $\frac{1}{2000}$, tandis qu'avec la projection de Bonne elles seraient 11′ et $\frac{1}{600}$; et l'on pourrait, sans augmenter les deux premières, placer sur la carte la régence de Tunis et la plus grande partie de l'empire du Maroc.

66. Quand il s'agit d'un fuseau, on trouve que le mode de projection qui remplit les conditions énoncées est celui des formules

$$(16) \qquad x = s + \frac{1}{2} r m^2 \sin l, \qquad y = rm\left(1 + \frac{1}{6} m^2 \cos 2l\right).$$

De ces formules on déduit

$$\theta = m^3 \sin l\left(\frac{5}{6} - \sin^2 l\right), \qquad h - k = \frac{1}{300} m^4 \cos^4 l.$$

On a d'ailleurs

$$(a - b)^2 = (h - k)^2 + \theta^2, \qquad 2\omega = \frac{a - b}{\sin 1''},$$

ω étant exprimé en secondes. Quant à l'altération de l'unité de longueur, elle est

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(m \cos l)^2,$$

ou seulement la moitié de cette quantité si l'on suppose l'échelle choisie de manière que les altérations soient deux à deux égales et de signes contraires.

Pour un fuseau de 15 degrés on aura, comme limites des altérations, 1′20″ et $\frac{1}{230}$; avec la projection de Bonne, on aurait eu 7°30′ et $\frac{1}{15}$.

Le territoire de l'Égypte proprement dite se compose d'une longue vallée encaissée, depuis Assouan jusqu'au Caire, par deux chaînes de montagnes dont les versants extérieurs s'étendent dans de vastes déserts. Il n'y a pas à se préoccuper de ces déserts, dans la construction de la carte; on doit plutôt songer à l'étendre au sud d'Assouan en remontant le Nil. Nous supposerons donc qu'il s'agisse d'une contrée située entre le neuvième et le trente-deuxième degré de latitude avec une étendue en longitude de 5 degrés. Le mode de projection à adopter sera celui des formules (16), lequel donnera pour limite des deux altérations $5''$ et $\frac{1}{2000}$, tandis que la projection de Bonne aurait donné $25'$ et $\frac{1}{250}$.

67. Pour certaines cartes qui ont un but spécial, la condition la plus importante à remplir est la conservation des aires. On peut se proposer de chercher le système de projection qui, tout en ne modifiant celles-ci que de quantités négligeables, réduit à son *minimum* la plus grande altération d'angle. Cette question, que nous ne faisons qu'indiquer, se résoudra par une méthode analogue à celle que nous avons employée dans la résolution de la question inverse.

(*A suivre.*)