NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. DE LAUNAY

Question proposée au concours général de 1878, pour la classe de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 410-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__410_1>

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878, POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

SOLUTION DE M. L. DE LAUNAY,

Élève du lycée Fontanes (classe de M. Desboves) (*).

Déterminer les rayons des deux bases d'un tronc de cône, connaissant : 1° la hauteur h du tronc; 2° le volume, qui est équivalent aux $\frac{3}{4}$ de la sphère de diamètre h; 3° la surface latérale équivalente à celle du cercle de rayon a.

On ne considérera que les troncs formés par des plans qui coupent les arêtes d'un même côté du sommet, et l'on indiquera le nombre des solutions qui correspondent aux diverses valeurs du rapport $\frac{a}{h}$.

Soient x et y les deux rayons de bases, l'expression du volume sera $\frac{\pi h}{3}(x^2+y^2+xy)$, et comme, par hypothèse, elle est égale aux $\frac{3}{4}$ du volume d'une sphère de diamètre h, c'est-à-dire à $\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}\pi h^3$ ou $\frac{1}{8}\pi h^3$, on a la

(*) Premier prix du Concours général.

première équation du problème

$$\frac{\pi h}{3}(x^2+y^2+xy)=\frac{1}{8}\pi h^3,$$

ou, en supprimant le facteur commun πh et multipliant par 3 les deux membres de l'équation,

$$(1)\qquad x^2+y^2+xy=\frac{3}{8}h^2.$$

La surface latérale a pour expression (l désignant l'apothème du tronc) $\pi l(x+y)$ ou $\pi\sqrt{h^2+(x-y)^2}(x+y)$; on a donc, après avoir élevé au carré, la seconde équation du problème

$$(2)\qquad (x+y)^2[h^2+(x-y)^2]=a^4.$$

Pour résoudre le système des équations (1) et (2), on peut employer plusieurs méthodes.

Première méthode. — Prenons pour inconnues auxiliaires la somme des rayons et leur différence; en remarquant que l'on a identiquement

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2,$$

la première équation devient

$$(x+y)^2-\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=\frac{3}{8}h^2,$$

ou, toutes réductions faites,

$$(3)\qquad 6(x+y)^2+2(x-y)^2=3h^2,$$

d'où, en substituant dans cette équation la valeur de $(x+y)^2$ tirée de l'équation (2),

$$\frac{6a^4}{h^2+(x-y)^2}+2(x-y)^2=3h^2,$$

ou

$$6a^4+2h^2(x-y)^2+2(x-y)^4=3h^4+3h^2(x-y)^2,$$

d'où l'on déduit l'équation définitive

$$(4) \qquad 2(x-y)^4 - h^2(x-y)^2 + 6a^4 - 3h^4 = 0.$$

Nous sommes ramenés à résoudre une équation bicarrée en $x - y$, d'où l'on tire

$$x - y = \pm\sqrt{\frac{h \pm \sqrt{h^4 - 8(6a^4 - 3h^4)}}{4}}.$$

$$x - y = \pm\frac{\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}}{2}.$$

Mais, les équations (1) et (2) étant symétriques par rapport à x et y, on peut convenir d'appeler toujours x la plus grande des deux quantités x et y; $x - y$ est alors toujours positif et l'on a finalement

$$(5) \qquad x - y = \frac{\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}}{2}.$$

Portons maintenant ces valeurs de $x - y$ dans l'équation (3), il vient

$$6(x+y)^2 = 3h^2 - \frac{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{2}$$

$$= \frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{2},$$

d'où enfin

$$(6) \qquad x + y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}}.$$

Maintenant ces valeurs de $x - y$ et de $x + y$ étant connues, on en déduit x et y par les équations

$$(7) \quad x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}},$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 \mp \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}.$$

Discussion. — Pour que les valeurs de x et de y soient admissibles, il faut d'abord qu'elles soient réelles. Pour que $(x-y)^2$ soit réel, il faut que la quantité $25h^4 - 48a^4$ soit positive, c'est à dire que l'on ait

$$(9) \qquad \frac{a^4}{h^4} < \frac{25}{48}, \quad \frac{a}{h} < \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt[4]{3}}.$$

Mais une valeur de $(x-y)^2$ admissible doit être non-seulement réelle, mais encore positive pour que $x-y$ soit réel.

Or, le produit des racines de l'équation (4) est $\frac{6a^4 - 3h^4}{2}$; nous sommes donc conduits à distinguer trois cas, suivant que $6a^4 - 3h^4$ sera supérieur, inférieur ou égal à zéro, c'est-à dire suivant que $\frac{a^4}{h^4}$ sera supérieur, inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$: ces trois hypothèses sont d'ailleurs possibles, puisque $\frac{1}{2}$ est plus petit que $\frac{25}{48}$; nous avons donc déjà pour $\frac{a^4}{h^4}$ deux valeurs principales $\frac{1}{2}$, $\frac{25}{48}$.

D'ailleurs, l'équation (3) étant du premier degré par rapport à $(x+y)^2$, à chaque valeur de $x-y$ correspondra une valeur de $(x+y)^2$; pour que cette valeur soit admissible, il faut qu'elle soit positive, c'est-à-dire, d'après l'équation (3), que $3h^2$ soit plus grand que $2(x-y)^2$; nous devons donc comparer $\frac{3}{2}h^2$ à $(x-y)^2$; or, en substituant $\frac{3}{2}h^2$ à $(x-y)^2$ dans l'équation (4), on obtient $\frac{9}{2}h^4 - \frac{3}{2}h^4 + 6a^4 - 3h^4$ ou $6a^4$.

Le résultat de la substitution est donc toujours positif et par suite la valeur de $(x+y)^2$ positive.

D'ailleurs, pour que x et y soient positifs, il faut que $x - y$ soit plus petit que $x + y$, ou

$$
\begin{aligned}
&6(x-y)^2 < 6(x+y)^2,\\
&6(x-y)^2 < 3h^2 - 2(x-y)^2,\\
&8(x-y)^2 < 3h^2,\\
&(x-y)^2 < \frac{3}{8}h^2.
\end{aligned}
$$

Comparons donc $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$, et pour cela substituons $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$ dans l'équation (4) ; le résultat de la substitution est

$$\frac{9}{32}h^4 - \frac{3}{8}h^4 + 6a^4 - 3h^4 = \frac{9h^4 - 12h^4 - 96h^4 + 192a^4}{32},$$

ou enfin

$$\frac{192a^4 - 99h^4}{32}.$$

Nous sommes donc conduits à distinguer trois cas, suivant que $192\,a^4$ est supérieur, égal ou inférieur à $99h^4$, c'est-à-dire suivant que $\frac{a^4}{h^4}$ est supérieur, égal ou inférieur à $\frac{99}{192}$.

D'ailleurs $\frac{99}{192}$ est égal à $\frac{1}{2} + \frac{3}{192}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{64}$, quantité plus petite que $\frac{25}{48}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{48}$.

Cela posé (*), faisons croître $\frac{a^4}{h^4}$, en passant par les

(*) Un tableau de la discussion permet de la suivre plus facilement.

trois valeurs principales que nous avons trouvées et qui, rangées dans l'ordre croissant, sont $\frac{1}{2}$, $\frac{99}{192}$, $\frac{25}{48}$.

Supposons d'abord $\frac{a^4}{h^4}$ plus petit que $\frac{1}{2}$; alors, dans l'équation (4), le produit des racines est négatif; l'une d'elles est négative et à rejeter, l'autre est positive.

Mais $\frac{a^4}{h^4}$ est aussi plus petit que $\frac{99}{192}$, et $192a^4 - 99h^4$ est plus petit que o; le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ à $(x-y)^2$ est donc négatif; l'une des valeurs de $(x-y)^2$ est plus petite que $\frac{3}{8}h^2$ et l'autre plus grande; comme il y a une racine négative, c'est elle qui est plus petite; l'autre est plus grande et à rejeter : donc, dans ce cas, o solution.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{1}{2}$, le produit des racines est égal à zéro : l'une des valeurs de $(x-y)^2$ est donc nulle ; il y a dans ce cas une solution : un cylindre.

D'ailleurs, l'autre racine est plus grande que $\frac{3}{8}h^2$ et à rejeter.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{99}{192}$, le produit des racines est positif, et, comme leur somme l'est aussi, elles sont toutes deux positives; d'ailleurs, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ étant toujours négatif, une seule de ces racines est admissible; on n'a donc pour $x-y$ et $x+y$ qu'une seule valeur et par suite un seul système de valeurs pour x et y.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{99}{192}$, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ est nul ; $\frac{3}{8}h^2$ est donc une des racines de l'équation en $(x-y)^2$; par suite, pour cette racine, $x-y$ est égal à $x+y$ et y est nul, c'est-à-dire qu'on a un cône ; d'ailleurs l'autre solution est admissible.

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est compris entre $\frac{99}{192}$ et $\frac{25}{48}$, le résultat de la substitution de $\frac{3}{8}h^2$ est positif; donc les deux racines sont ou toutes deux plus petites que $\frac{3}{8}h^2$ ou toutes deux plus grandes; leur somme étant égale à $\frac{h^2}{2}$, elles ne peuvent pas être toutes deux plus grandes; donc elles sont toutes deux plus petites et par conséquent admissibles. Dans ce cas, il semble qu'il y ait quatre systèmes de solutions, mais on n'en a en réalité que deux :

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}},$$

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{5h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}} - \frac{1}{4}\sqrt{h^2 + \sqrt{25h^4 - 48a^4}};$$

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 + \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} + \frac{1}{4}\sqrt{h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}},$$

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5h^2 + \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{h^2 - \sqrt{25h^4 - 48a^4}}.$$

Quand $\frac{a^4}{h^4}$ est égal à $\frac{25}{48}$, on a une solution double pour $x-y$; et enfin, quand $\frac{a^4}{h^4}$ est plus grand que $\frac{25}{48}$, on n'a pas de solution.

Ces divers résultats peuvent se résumer dans le Tableau suivant :

Variations de $\frac{a^4}{h^4}$.	*Nombres de solutions.*
$\frac{a^4}{h^4} < \frac{1}{2}$	0 sol.
$\frac{a^4}{h^4} = \frac{1}{2}$	1 sol. : cylindre.
$\frac{1}{2} < \frac{a^4}{h^4} < \frac{99}{192}$	1 sol.
$\frac{a^4}{h^4} = \frac{99}{192}$	2 sol. : 1 cône et 1 tronc de cône.
$\frac{99}{192} < \frac{a^4}{h^4} < \frac{25}{48}$	2 sol.
$\frac{a^4}{h^4} > \frac{25}{48}$	0 sol.

On voit, comme détail de la discussion, que $\frac{a^4}{h^4}$ a un maximum $\frac{25}{48}$; on peut se proposer de le trouver directement.

Supposons h^4 constant; nous cherchons le maximum de a^4 ou, d'après l'équation (2), de

$$(x+y)^2[h^2+(x-y)^2],$$

ce que l'on peut écrire

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &[(x^2+y^2-xy)+xy][h^2+(x^2+y^2+xy)-3xy] \\ &\quad = \left(\frac{3}{8}h^2+xy\right)\left(h^2+\frac{3}{8}h^2-3xy\right). \end{aligned} \right.$$

Ce dernier produit est égal à

$$\left(\frac{3}{8}h^2+xy\right)\left(\frac{11}{8}h^2-3xy\right),$$

ou, en développant, à

$$\frac{33}{64}h^4-\frac{9}{8}h^2xy+\frac{11\,h^2xy}{8}-3x^2y^2.$$

Nous sommes donc ramenés finalement à trouver le maximum de

$$2h^2xy - 24x^2y^2 = xy(h^2 - 12xy),$$

ou de $12xy(h^2 - 12xy)$, c'est-à-dire le maximum du produit de deux quantités dont la somme est constante ; ce maximum a lieu quand les facteurs sont égaux, c'est-à-dire quand xy est égal à $\frac{h^2}{24}$; et alors a^4 est égal (10) à

$$\left(\frac{3}{8}h^2 + \frac{h^2}{24}\right)\left(h^2 + \frac{3}{8}h^2 - \frac{3h^2}{2}\right)$$

ou bien à

$$\frac{10h^2}{24} \times \frac{30h^2}{24},$$

ou, enfin, à $\frac{25h^2}{48}$; ce que nous avions déjà trouvé par une autre méthode.

Seconde méthode. — Au lieu de prendre pour inconnues la somme et la différence des inconnues x, y, on aurait pu prendre xy et $x + y$.

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$(x + y)^2 [h^2 + (x + y)^2 - 4xy] = a^4,$$

d'où, en tenant compte de l'équation et de la relation

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4},$$

$$(x + y)^2 \left[h^2 + (x + y)^2 - 4(x + y)^2 + \frac{3}{2}h^2\right] = a^4,$$

$$(x + y)^2[2h^2 - 6(x + y)^2 + 3h^2] = a^4,$$

$$6(x + y)^4 - 5h^2(x + y)^2 + 2a^4 = 0,$$

$$x + y = \sqrt{\frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12}},$$

$$xy = \frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12} - \frac{3}{8}h^2,$$

$$= \frac{h^2 + 2\sqrt{25h^4 - 48a^4}}{24} :$$

x et y seront, par conséquent, les racines d'une équation du second degré

$$X^2 - X\sqrt{\frac{5h^2 \pm \sqrt{25h^4 - 48a^4}}{12}} + \frac{h^2 + 2\sqrt{25h^4 - 48a^4}}{24} = 0.$$

Note. Solutions analogues de MM. Moret-Blanc et Robaglia.