Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 425-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__425_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES

Question 1302

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 527);

PAR M. MORET-BLANC.

Dans une conique à centre, inscrire le quadrilatère maximum ayant pour un de ses côtés un diamètre donné, et pour côté opposé une corde parallèle à une droite donnée. (F. GABRIEL-MARIE.)

Si la conique était une hyperbole, il est évident que la surface du quadrilatère croîtrait indéfiniment avec les distances de la corde aux deux extrémités du diamètre donné. La conique devant être une ellipse, qui est la projection d'un cercle, on est ramené à résoudre le problème dans le cas du cercle.

Ayant décrit un cercle sur le grand axe de l'ellipse donnée comme diamètre, déterminons les diamètres du cercle qui ont pour projections le diamètre donné de l'ellipse et celui qui est parallèle à la direction donnée. Soient AB le premier, CD une corde du cercle parallèle au second et α leur angle.

Abaissons AE, BF et OG perpendiculaires sur CD, et soit $OG = z$.

L'aire S du quadrilatère ABDC est égale à celle du trapèze ABFE diminuée de celles des deux triangles ACE et BDF. Or, la base de chacun de ces triangles est égale à

$$EG - CG = a\cos\alpha - \sqrt{a^2 - z^2},$$

la demi-somme de leurs hauteurs est z, et la somme de leurs surfaces est

$$\left(a\cos\alpha - \sqrt{a^2 - z^2}\right)z;$$

on a donc

$$S = 2az\cos\alpha - \left(a\cos\alpha - \sqrt{a^2 - z^2}\right)z = az\cos\alpha + z\sqrt{a^2 - z^2}.$$

Égalant à zéro la dérivée par rapport à z, pour avoir la valeur qui convient au maximum, il vient

$$a\cos\alpha - \frac{a^2 - 2z^2}{\sqrt{a^2 - z^2}} = 0,$$

$$a^2\cos^2\alpha\left(a^2 - z^2\right) = \left(2z^2 - a^2\right)^2,$$

et, en développant et ordonnant,

$$4z^4 - \left(4a^2 - a^2\cos^2\alpha\right)z^2 + a^4\sin^2\alpha = 0.$$

Si l'on pose $z^2 = au$, il vient, en divisant par u^2,

$$4u^2 - \left(4a - a\cos^2\alpha\right)u + a^2\sin^2\alpha = 0.$$

On est ramené à construire deux lignes, connaissant leur somme $a - \frac{a}{4}\cos^2\alpha$ et leur produit $\frac{a^2\sin^2\alpha}{4}$; on aura ensuite z par une moyenne proportionnelle entre a et u.

Le quadrilatère ABCD étant construit dans le cercle, on le projettera sur l'ellipse.

Question 1311

(voir 2e serie, t. XVIII, p. 33[illegible]);

PAR M. MARCELLO ROCCHETTI,

Professeur au lycée R. Campanella, à Reggio (Calabria).

Quatre nombres entiers α, β, γ, δ positifs ou négatifs étant donnés, soit fait, pour abréger,

$$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$Q = \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha(\beta + \gamma + \delta),$$

$$R = \gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 - \beta(\gamma + \delta + \alpha),$$

$$S = \delta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma(\delta + \alpha + \beta).$$

On peut démontrer, par un calcul direct, que le nombre

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

est le produit de deux facteurs, dont l'un s'exprime par une somme de quatre carrés et l'autre par une somme de trois carrés. (S. Realis.)

Posons

$$(1)\quad A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2, \quad \text{et} \quad B = \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

il vient

$$P = A - B\delta, \quad Q = A - B\alpha, \quad R = A - B\beta, \quad S = A - B\gamma;$$

d'où

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = A(4A - B^2),$$

et, en remplaçant A et B par leurs valeurs (1),

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)[(\alpha + \gamma - \beta - \delta)^2 + (\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2 + (\alpha + \delta - \beta - \gamma)^2].$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Droz; Ferdinando Pisani; Sondat; Louis Cauret.

Question 1314

(voir 2e série, t. XVIII, p. 335);

Par M. Ferdinando PISANI.

Si, dans un triangle ABC, *on a* $A \pm B = 90^\circ$, *alors*

$$2.c^{\pm 2} = (a + b)^{\pm 2} + (a - b)^{\pm 2},$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

On demande une démonstration simple de cette extension du théorème de Pythagore.

(Donald Mc. Alister.)

1° Lorsque $A + B = 90^\circ$, $c^2 = a^2 + b^2$;

$$2c^2 = 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

2° Soit $A - B = 90^\circ$, ou $A = 90^\circ + B$. Au sommet de l'angle obtus A, élevons au côté AB une perpendiculaire AD qui rencontrera le côté BC, en un point D situé entre B et C. On a, par hypothèse, $A = 90^\circ + B$, et, par construction, $A = 90^\circ + DAC$; donc $DAC = B$. Il s'ensuit que les triangles DAC, BAC sont semblables; leur similitude donne

$$AD = \frac{bc}{a}, \quad DC = \frac{b^2}{a},$$

d'où

$$BD = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Dans le triangle rectangle BAD,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2;$$

donc

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} = \frac{b^2c^2}{a^2} + c^2 = \frac{(a^2 + b^2)c^2}{a^2},$$

$$(a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)c^2.$$

De cette égalité, on tire successivement

$$2(a^2 - b^2)^2 = [(a - b)^2 + (a + b)^2]c^2,$$

$$\frac{2}{c^2} = \frac{(a - b)^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{(a + b)^2}{(a^2 - b^2)^2},$$

$$\frac{2}{c^2} = \frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(a - b)^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même proposition a été démontrée au moyen des formules de la Trigonométrie, par MM. de Virieu et Rocchetti.

M. N. Artemieff, à Saint-Pétersbourg, en a donné deux démonstrations, l'une géométrique, l'autre par la Trigonométrie.

M. O. Save, de l'Athénée de Mons, en a donné une démonstration géométrique.

Question 1315

(voir 2e série, t. XVIII, p. 336);

PAR M. LOUIS CAURET.

Étant donnés un triangle inscrit ABC *et le diamètre* DE *perpendiculaire à* BC, *si du point* C *comme centre,* *avec la moitié de* BC *pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre* CE *en* N, *que par* N *on mène* NM *parallèle à* CA, *et coupant* AE *en* M, *il s'agit de démontrer que*

$$\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{AB}}{2} \;(*).$$

Ce théorème sert à déterminer le grand axe d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.

(A. CAMBIER.)

Dans le triangle AEC, on a

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{CN}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}};$$

ou, puisque $\mathrm{CN} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$,

$$(1) \qquad 2.\mathrm{AM}.\mathrm{CE} = \mathrm{AE}.\mathrm{BC}.$$

Le quadrilatère ABEC étant inscrit, on a aussi

$$\mathrm{AB}.\mathrm{CE} + \mathrm{AC}.\mathrm{BE} = \mathrm{AE}.\mathrm{BC};$$

et, comme BE = CE,

$$(2) \qquad (\mathrm{AB} + \mathrm{AC})\mathrm{CE} = \mathrm{AE}.\mathrm{BC}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent

$$2\,\mathrm{AM}.\mathrm{CE} = (\mathrm{AB} + \mathrm{AC})\mathrm{CE};$$

d'où

$$\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{AC}}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La somme et la différence des demi-axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués, étant représentées par deux côtés AB, AC d'un triangle inscrit dans

(*) Il est supposé que les deux points E, A sont situés de différents côtés de CB; autrement, la droite AM ne serait pas égale à la demi-somme des côtés AB, AC du triangle ABC : elle serait égale à leur demi-différence. (*Note du Rédacteur.*)

une circonférence que l'on sait décrire, on aura, par ce qui précède,

$$AM = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = a.$$

Remarque.—Si l'on suppose $AB = a+b$, ou $AB > AC$, on aura le demi petit axe de l'ellipse en retranchant AM de AB. De A comme centre avec AM pour rayon, on décrira une circonférence rencontrant AB en P; le segment BP sera égal à b.

Note. — Solutions analogues de MM. Lez, Ferdinando Pisani et Robaglia.

Question 1317

(voir 2e série, t. XVIII, p. 336);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

« *Démontrer que le polynôme*

$$x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2x^{n-1} + 1$$

est divisible par $(x-1)^4$.

Trouver l'expression générale du quotient. »

(GENTY.)

Ce polynôme et ses trois premières dérivées se réduisent à zéro par $x = 1$; il est donc divisible par $(x-1)^4$. On peut le débarrasser immédiatement du facteur $(x-1)^2$, en le mettant sous la forme

$$(x^n - 1)^2 - n^2x^{n-1}(x-1)^2.$$

La division du polynôme par $(x-1)^2$ le réduit à

$$(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)^2 - n^2x^{n-1}.$$

En divisant de nouveau par $(x-1)^2$, on a d'abord le quotient

$$Q = \left(\frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1}{x-1}\right)^2 - \frac{n^2x^{n-1}}{(x-1)^2}.$$

Mais

$$\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}{x-1}$$
$$=[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-2)x+n-1]+\frac{n}{x-1},$$

et

$$\frac{x^{n-1}}{(x-1)^2}=\left(\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}\right)+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Donc, en posant

$$x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-2)x+n-1=\alpha,$$

on aura

$$\mathrm{Q}=\left(\alpha+\frac{n}{x-1}\right)^2-n^2\left(\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}\right)-\frac{n^2}{(x-1)^2}$$
$$=\alpha^2+\frac{2n\alpha}{x-1}-n^2\left(\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}\right).$$

Or,

$$\frac{\alpha}{x-1}=\left[x^{n-3}+3x^{n-4}+6x^{n-5}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]+\frac{n(n-1)}{2(x-1)},$$

et

$$\frac{x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1}{x-1}$$
$$=[x^{n-3}+2x^{n-4}+\ldots+(n-3)x+n-2]+\frac{n-1}{x-1};$$

il en résulte

$$\mathrm{Q}=[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-2)x+n-1]^2$$
$$+2n\left[x^{n-3}+3x^{n-4}+6x^{n-5}+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$
$$-n^2[x^{n-3}+2x^{n-4}+\ldots+(n-3)x+n-2].$$

Le quotient est composé du carré d'un polynôme de degré $(n-2)$; d'un second polynôme du degré $(n-3)$, multiplié par $2n$; et d'un troisième du degré $(n-3)$, multiplié par $(-n^2)$. Les coefficients des termes du premier et du troisième se composent de la suite naturelle des nombres entiers; les coefficients des termes du second sont les nombres triangulaires consécutifs.

Note. — La même question a été résolue par MM. de Virieu et Marcello Rocchetti.