Nouvelles annales de mathématiques

H. Lemonnier

Calcul d'un déterminant

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 518-524

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__518_1>

CALCUL D'UN DETERMINANT;

PAR M. H. LEMONNIER.

Calcul du déterminant

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & . & \ldots & n & 1 \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n & \ldots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \ldots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

Premier procédé :

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & \ldots & \ldots & 1-n & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & 1 & 1-n & \ldots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & \ldots & 0 & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & . & \ldots & 0 & -n & n \\ 1 & 0 & 0 & . & \ldots & -n & n & 0 \\ . & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & -n & n & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -n & 2n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & -n & 2n & -n \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & -n & 2n & -n & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -n & 2n & -n & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -n & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -n & 2n & -n & \dots & \dots & 0 \\ -n & 2n & -n & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -n & 2n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -n & 2n & -n \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & 2n & -n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2n & -n & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

l'ordre des déterminants s'abaissant d'une unité.

Le premier de ces derniers déterminants est

$$n^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le second est

$$n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 3 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & 0 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 & 1 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2} \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 3 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

l'ordre devenant $n-2$.

$$= n^{n-2}\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & 6 \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & -2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\
2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{vmatrix}$$

$$= n^{n-2}\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 6 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 2 & -2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 1 \\
2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{vmatrix}(-1)^{n-3},$$

l'ordre devenant $n-3$.

$$= n^{n-2}\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 10 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 2 & -5 \\
0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 1 \\
2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{vmatrix}(-1)^{n-3+n-4},$$

déterminant d'ordre $n-4$.

$$= n^{n-2}\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 15 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 2 & -9 \\
0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 1 \\
2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{vmatrix}(-1)^{n-3+n-4+n-5},$$

d'ordre $n-5$.

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= n^{n-2}\begin{vmatrix}
-1 & 0 \\
2 & \frac{n(n-1)}{2}
\end{vmatrix}(-1)^{n-3+\dots+2}$$

$$= - n^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}$$

$$= - n^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}};$$

par conséquent,

$$\mathrm{N} = n^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + n^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= n^{n-2}\,\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Il se présente là deux suites de nombres qui sont

$$0,\quad 1,\quad 2.1+1=3,\quad 2.3+0=6,$$
$$2.6-2=10,\quad 2.10-5=15,\quad 2.15-9=21,\ \ldots;$$
$$(-1)1+1=0,\quad (-1)3+1=-2,\quad (-1)6+1=-5,$$
$$(-1)10+1=-9,\quad (-1)15+1=-14,\ \ldots;$$

ceux de la première et de la deuxième ligne ont pour expression générale $\frac{n(n-1)}{2}$ pour $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$ ceux de la troisième et de la quatrième ligne $-\frac{n(n-3)}{2}$, et l'on a bien

$$2\,\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

et

$$(-1)\frac{n(n-1)}{2} + 1 = -\frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Deuxième procédé plus simple :

$$\mathrm{N} = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & . & \ldots & n & 1 \\ \ldots\ldots & . & . & \ldots & \ldots\ldots & . \\ n-1 & n & . & \ldots & n-3 & 1 \\ n & 1 & . & \ldots & n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \cdot & 1 & 1 \\ 2 & 1 & & & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \cdot & \cdot & 1-n & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ n-1 & 1 & 1-n & & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \cdot & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \cdot\ \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & \cdot & -n & 0 \\ 1 & 0 & & \cdot\ \cdot & -n & n & 0 \\ & & & & & \cdot & \\ 1 & 0 & -n & n & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & -n & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & \cdot & & & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & & & & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & & \cdot\ \cdots\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & & \cdot & 0 \end{vmatrix},$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & & & \cdot\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdot & & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & 0 \end{vmatrix}$$

d'ordre $n-1$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & & & & -1 \\ 0 & 0 & & & -1 & 2 \\ 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & -1 & 2 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \end{vmatrix},$$

d'ordre $n-2$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{n-1+n-2+\cdots+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

On trouve de même que

$$N_{p,1} = \begin{vmatrix} p+1 & \cdots & p+n \\ \cdots & & \cdots \\ p+n & \cdots & p+n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & \cdots & p+n-1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p+n & \cdots & p+n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ p+2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p+n-1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ p+n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & \cdots & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & \cdots & -n & 0 \\ 1 & 0 & & \cdots & -n & n & 0 \\ & & & & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & -n & n & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & & & & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -n & 2n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -n & 2n & -n & 0 \\ & & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & -n & 2n & -n & & & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] n^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & . & .... & ... & .... & 1 & 1 \\ 0 & . & .... & ... & .... & -1 & 0 \\ 0 & . & .... & ... & -1 & 2 & 0 \\ .... & . & .... & ... & .... & .... & . \\ -1 & 2 & -1 & ... & .... & .... & 0 \end{vmatrix},$$

d'ordre $n-1$.

$$= \left[np + \frac{n(n+1)}{2}\right] n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Le déterminant est nul seulement au cas de $p = -\frac{n+1}{2}$, alors que la somme des termes dans une ligne ou une colonne est nulle.

La valeur pour $p = -1$ est à remarquer.

Si l'on multiplie tous les éléments par q, le déterminant est multiplié par q^n; qu'on change ensuite pq en p, on obtient

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \dots & p+q \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ p+nq & p+q & \dots & p+(n-1)q \end{vmatrix}$$

$$= q^n \left[n\frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2}\right] n^{n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= q^{n-1}\left(p + \frac{n+1}{2} q\right) n^{n-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$