NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. AMIGUES

Note sur la série de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 105-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__105_1>

NOTE SUR LA SÉRIE DE TAYLOR;

PAR M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Jules Kœnig a déduit des propriétés élémentaires des séries une démonstration nouvelle de la formule de Taylor [1]. On peut, en partant du même principe, donner une démonstration encore plus simple.

On sait que pour tout polynôme de degré $m, f(x)$, on a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(x).$$

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1874.

Cette formule remarquable conduit tout naturellement à étudier la série suivante

$$(1)\qquad f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots,$$

dans laquelle $f(x)$ est une fonction quelconque.

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de h et pour toutes les valeurs de x qui ne rendent infinie aucune des quantités $f(x), f'(x), f''(x), \ldots.$

Cette convergence se déduit *a fortiori* de la convergence de la série suivante

$$\mathrm{M} + \frac{h'}{1}\mathrm{M} + \frac{h'^2}{1.2}\mathrm{M} + \frac{h'^3}{1.2.3}\mathrm{M} + \ldots,$$

dans laquelle h' représente la valeur absolue de h et M la plus grande valeur absolue des quantités $f(x), f'(x)$, $f''(x), \ldots.$

La série convergente (1) est une fonction de x et de h, et il est visible que cette fonction a même dérivée par rapport à x et par rapport à h. Or toute fonction $\lambda(x, h)$ qui a cette propriété est de la forme $\psi(x+h)$.

En effet, soit

$$x + h = u;$$

on a alors

$$\lambda(x, h) = \lambda(x, u - x) = \psi(x, u) = \psi(x, x + h).$$

Exprimant alors que $\psi(x, x+h)$ a la même dérivée par rapport à x que par rapport à h, on a

$$\psi'_x(x, x+h) + \psi'_{x+h}(x, x+h) = \psi'_{x+h}(x, x+h)$$

ou, en réduisant,

$$\psi'_x(x, x+h) = 0.$$

Donc la fonction ψ ne contient x que par la somme $x + h$.

On a ainsi pour faire la somme de la série (1) la formule

$$\psi(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

Cette égalité ayant lieu pour $h=0$ et pour toute valeur de x, on voit que la forme ψ n'est autre que la forme f, d'où la formule de Taylor

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

Nous ferons remarquer en premier lieu que la démonstration précédente s'étend au cas où h et x ont des valeurs imaginaires. Seulement, dans ce cas, h' représente le module de h et M le plus grand module des quantités $f(x), f'(x), f''(x), \ldots.$

En outre, cette démonstration, comme celle de M. Kœnig, offre cet avantage qu'elle permet de développer les fonctions en série en évitant la fastidieuse discussion *du reste*.

Néanmoins, comme la forme *du reste* est utile dans certaines questions, notamment dans l'étude de la résolution numérique des équations par la méthode de Newton, il importe de compléter ces démonstrations et toutes celles qui leur seraient analogues.

A cet effet, désignons par A une quantité quelconque et par $\varphi(h)$ une fonction arbitraire de h, assujettie à cette condition que $\varphi(0)=0$.

On a évidemment

$$\tag{2}\left\{\begin{aligned}f(x+h)=&f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\ldots\\&+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+\mathrm{A}\varphi(h)\\&+\left[-\mathrm{A}\varphi(h)+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n+1}f^{(n+1)}(x)+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Déterminons A de façon que la seconde partie du second membre soit nulle, c'est-à-dire par l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = & -A\varphi(h) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x) \\ & + \frac{h^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} f^{(n+2)}(x) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace x par z et h par $x+h-z$, ce second membre, sans cesser d'être une série convergente, devient une fonction de z que nous désignerons par $F(z)$. On a donc

$$\begin{aligned} F(z) = & -A\varphi(x+h-z) + \frac{(x+h-z)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(z) \\ & + \frac{(x+h-z)^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} f^{(n+2)}(z) + \ldots. \end{aligned}$$

Il est maintenant visible que $F(x) = 0$, d'après l'équation (3), qui définit A ; et aussi que $F(x+h) = 0$, puisqu'on suppose $\varphi(0) = 0$. Donc, quand z varie de x à $x+h$, la fonction $F(z)$ ne peut être ni toujours croissante ni toujours décroissante : donc la fonction $F'(z)$ ne peut être, entre ces limites, ni toujours positive ni toujours négative. Cette dérivée est très simple :

$$(4)\quad F'(z) = A\varphi'(x+h-z) - \frac{(x+h-z)^n}{1\ 2\ldots n} f^{n+1}(z).$$

Supposons que les fonctions $\varphi'(x+h-z)$ et $f^{(n+1)}(z)$ soient continues quand z varie de x à $x+h$. Alors la fonction $F'(z)$ est aussi continue entre ces limites, et, comme elle n'y garde pas le même signe, elle doit s'annuler pour

$$z = x + \theta h \quad (0 < \theta < 1).$$

Écrivant que la valeur (4) de $F'(z)$ s'annule pour cette valeur particulière de z, on obtient

$$o = A\varphi'[h(1-\theta)] - \frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

ce qui donne une valeur de A sous forme finie, mais avec une quantité θ dont on ne connaît que les limites.

La formule (2) devient alors, en y portant cette valeur de A et en remarquant que la seconde partie du second membre est nulle,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{\varphi(h)}{\varphi'[h(1-\theta)]}\frac{h^n(1-\theta)^n}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Cette forme du reste est très générale, puisqu'elle contient une fonction arbitraire $\varphi(y)$ qui n'est assujettie qu'à deux conditions, savoir : que $\varphi(o)$ soit nulle et que $\varphi'(y)$ reste continue quand y varie entre o et h. Cette forme n'est point nouvelle; M. Bourget l'a obtenue par un calcul différent de celui qui précède ([1]).

La fonction $\varphi(h) = h^i$ satisfait aux conditions prescrites, pourvu que i soit un entier supérieur à o. On obtient ainsi la forme classique du reste

$$f(x+h) = f(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{1}{i}\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}(1-\theta)^{n-i+1}f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Enfin, pour $i = 1$ on a la forme de Cauchy et pour $i = n+1$ on a la forme de Lagrange.

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1870.