NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIEHLER

Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 149-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__149_0>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONT TOUTES LES RACINES SONT RÉELLES;

PAR M. CH. BIEHLER.

I. Considérons l'équation

$$(1)\qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = A + Bi,$$

dans laquelle le module du second membre est égal à l'unité; nous allons démontrer que les racines de cette équation sont réelles et inégales.

En effet, soit $a_\mu + ib_\mu$ une des m valeurs de l'expression $\sqrt[m]{A+Bi}$; on sait que $a_\mu^2 + b_\mu^2 = 1$, et la racine x_μ de l'équation (1) correspondant à cette valeur sera donnée par l'équation

$$(2)\qquad \frac{1+ix_\mu}{1-ix_\mu} = a_\mu + ib_\mu,$$

d'où

$$(3)\qquad x_\mu = \frac{i(1-a_\mu - ib_\mu)}{1+a_\mu+ib_\mu}.$$

En multipliant les deux termes du second membre par $1 + a_\mu - ib_\mu$, il viendra

$$x_\mu = \frac{2b_\mu}{(1+a_\mu)^2 + b_\mu^2}$$

ou

$$(4)\qquad x_\mu = \frac{b_\mu}{1+a_\mu}.$$

Toutes les racines de l'équation (1) sont donc réelles.

Elles sont inégales, car, si deux racines x_λ, x_μ étaient égales, on aurait

$$\frac{b_\lambda}{1 + a_\lambda} = \frac{b_\mu}{1 + a_\mu}. \tag{5}$$

En vertu des relations

$$a_\lambda + b_\lambda^2 = 1,$$
$$a_\mu + b^\mu = 1,$$

l'équation (5) devient

$$\frac{1 - a_\lambda}{b_\lambda} = \frac{1 - a_\mu}{b_\mu}. \tag{6}$$

La comparaison des égalités (5) et (6) donne

$$a_\lambda = a_\mu, \quad b_\lambda = b_\mu;$$

par suite, comme les m valeurs de $\sqrt[m]{A + Bi}$ sont distinctes, les m racines de l'équation (1) seront aussi distinctes.

II. Comme première application de ce théorème, nous allons démontrer algébriquement que les racines de l'équation de degré m qui donne les valeurs de $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{m}$, connaissant $\operatorname{tang}\alpha$, sont réelles et inégales.

Cette équation peut s'écrire

$$ia = \frac{(1 + ix)^m - (1 - ix)^m}{(1 + ix)^m + (1 - ix)^m}, \tag{7}$$

en posant

$$\operatorname{tang}\alpha = a \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{m} = x.$$

L'équation (7) peut aussi se mettre sous la forme

$$(1 + ix)^m(1 - ia) - (1 - ix)^m(1 + ia) = 0$$

ou bien

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^m = \frac{1 + ia}{1 - ia}. \tag{8}$$

Le second membre de cette équation est une expression dont le module est égal à l'unité ; ce module est, en effet, la racine carrée de la quantité

$$\frac{(1-a^2)^2+4a^2}{(1+a^2)^2};$$

on en conclut, en se reportant au théorème démontré précédemment, que les racines de l'équation (7) sont réelles et inégales.

Pour la même raison, les racines des équations

$$(9) \qquad (1+ix)^m-(1-ix)^m=0,$$

$$(10) \qquad (1+ix)^m+(1-ix)^m=0,$$

tirées de (7) en y faisant $a=0$ et $a=\infty$, sont réelles et inégales.

On peut d'ailleurs les mettre sous la forme

$$(11) \qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m=1,$$

$$(12) \qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m=-1;$$

les seconds membres ont pour module l'unité.

III. Comme seconde application du même théorème, nous allons démontrer que les racines de l'équation de degré m qui donne $\cos\frac{\alpha}{m}$ quand on connaît $\cos\alpha$ sont réelles.

Si l'on pose $\cos\frac{\alpha}{m}=x$, $\cos\alpha=a$, l'équation dont il s'agit est

$$(13) \qquad \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m-2a=0.$$

Faisons actuellement la substitution

$$x=\frac{1-y^2}{1+y^2};$$

à toute valeur réelle de y correspond une valeur réelle de x.

Par cette substitution, $x^2 - 1$ devient $\frac{-4y^2}{(1+y^2)^2}$, et l'équation (13) prend la forme

$$(14)\qquad \frac{(1+2iy-y^2)^m+(1-2iy-y^2)^m}{(1+y^2)^m}-2a=0,$$

ou bien

$$(15)\qquad \frac{(1+iy)^{2m}+(1-iy)^{2m}}{(1+y^2)^m}-2a=0,$$

ou enfin

$$(16)\qquad \left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)^m+\left(\frac{1-iy}{1+iy}\right)^m-2a=0.$$

Cette équation est du deuxième degré en $\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)^m$; elle donne

$$(17)\qquad \left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)^m=a\pm i\sqrt{1-a^2}.$$

Le module de chacune des expressions $a+i\sqrt{1-a^2}$, $a-i\sqrt{1-a^2}$ est égal à l'unité; par suite, les racines de l'équation en y sont toutes réelles.

On obtient ainsi $2m$ valeurs de y; ces $2m$ valeurs de y ne fournissent que m valeurs de x. Les expressions conjuguées $a+i\sqrt{1-a^2}$, $a-i\sqrt{1-a^2}$ fournissent en effet, pour $\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)$, des valeurs qui sont elles-mêmes conjuguées; par suite, les valeurs de y correspondantes seront de signes contraires. Les valeurs de y^2 sont donc égales deux à deux et donnent une seule et même valeur pour x.