LAGUERRE

Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 193-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__193_0>

SUR UNE MÉTHODE POUR OBTENIR PAR APPROXIMATION LES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE QUI A TOUTES SES RACINES RÉELLES;

Par M. LAGUERRE.

[suite (1).]

IV.

9. Pour éclaircir, par quelques exemples, les considérations qui précèdent, je considère d'abord l'équation

$$f = x^3 + 3x^2 - 17x + 5,$$

et je me propose de calculer la racine immédiatement supérieure à 2.

L'équation étant du troisième degré, la formule de correction est

$$\frac{1}{X - x} = \frac{-f' + \sqrt{4f'^2 - 6ff''}}{3f}.$$

On trouve aisément les valeurs suivantes,

$$f = -9, \quad f' = 7, \quad f'' = 18,$$

d'où l'on déduit

$$X - 2 = \frac{27}{7 + \sqrt{1168}} = 0,655,$$

et la valeur approchée $X = 2,655$; la véritable valeur étant avec trois décimales exactes $2,669$, l'erreur est plus petite que $\frac{1}{50}$.

La méthode de Newton est ici inapplicable et conduit

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 161.

à la valeur

$$2+\frac{9}{7}=3,28\ldots.$$

10. Je considérerai l'équation

$$x^3-7x-7=0,$$

en me proposant de calculer sa plus grande racine.

On peut, comme je l'ai montré plus haut (n° 6), prendre pour limites des racines les quantités

$$\frac{-b\pm(n-1)\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Dans le cas actuel, on a $n=3$, $a=1$, $b=0$ et $c=-\frac{7}{3}$; on en déduit les deux limites

$$\pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

La plus grande racine est donc inférieure à

$$2\sqrt{\frac{7}{3}}=3,055\ldots.$$

Pour abréger les calculs, je substituerai immédiatement le nombre $3,05$; si, en effet, il était trop faible, la suite des calculs l'indiquerait en amenant une correction positive.

On a

$$f=0,022625,\quad f'=20,9075,\quad f''=18,3,$$

d'où

$$X=3,05-\frac{0,067875}{20,9075+\sqrt{1745,655}}=3,0489154\ldots,$$

valeur dont les cinq premières décimales sont exactes et qui est approchée par excès.

11. Soit encore l'équation $X_n = 0$ qui définit le polynôme de Legendre du degré n; on sait que les racines de cette équation sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$.

Proposons de trouver une valeur approchée de la plus grande racine de cette équation; en la désignant par α et en prenant $+1$ comme point de départ, on trouve aisément

$$X_n(1) = 1, \quad X'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$X''_n(1) = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{8};$$

la formule (7) donne

$$\frac{1}{\alpha - 1} = -\frac{\dfrac{n(n+1)}{2} - \sqrt{\dfrac{(n-1)^2 n^2 (n+1)^2}{4} - \dfrac{n^2(n-1)^2(n+1)(n+2)}{8}}}{n}$$

$$= -\frac{n+1+(n-1)\sqrt{\dfrac{n^2+n}{2}}}{2},$$

d'où

$$\alpha = 1 - \frac{2}{n+1+(n-1)\sqrt{\dfrac{n^2+n}{2}}}.$$

La quantité α est approchée par excès. Si, comme exemple, nous faisons $n = 7$, il vient

$$\alpha = 1 - \frac{1}{4+6\sqrt{7}} = 0,9496\ldots;$$

la valeur de la racine, calculée avec quatre décimales, est, d'après Gauss [1],

$$0,9491.$$

---

[1] *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (*Œuvres de Gauss*, t. III, p. 195).

Si l'on employait la correction de Newton, on trouverait pour valeur approchée

$$\alpha = 1 - \frac{1}{28} = 0{,}9643\ldots;$$

on voit qu'elle s'éloigne notablement de la véritable valeur.

V.

12. Un autre exemple plus intéressant est fourni par l'équation du degré n qui détermine $\cos\frac{\pi}{2n}$.

Cette quantité est la plus grande racine de l'équation

$$f(x) = 1 - \frac{n}{1}\frac{n}{1}(1-x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n+1)}{1.3}(1-x)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{n(n+1)(n+2)}{1.3.5}(1-x)^3 + \ldots = 0.$$

Cherchons-en une valeur approchée α, en prenant l'unité pour point de départ.

On a

$$f(1) = 1,\quad f'(1) = n^2,\quad f''(1) = \frac{n^2(n^2-1)}{3}.$$

La formule (7) donne donc

$$\frac{1}{\alpha - 1} = -\frac{n^2 + \sqrt{n^4(n-1)^2 - \frac{n^3(n-1)^2(n+1)}{3}}}{n} = -\left[n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2-n}{3}}\right]$$

et enfin

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n + (n-1)\sqrt{\frac{2n^2-n}{3}}}.$$

On a donc approximativement

$$\cos\frac{\pi}{2n} = 1 - \frac{1}{n + (n-1)\sqrt{\dfrac{2n^2 - n}{3}}},$$

ou, en posant $x = \frac{1}{n}$,

$$(8) \qquad \cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{x + (x-1)\sqrt{\dfrac{2-x}{3}}}.$$

13. Cette formule approximative n'est justifiée que si $\frac{1}{x}$ est un nombre entier égal ou supérieur à 2. On peut cependant l'employer pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $+1$.

Pour donner une idée de l'approximation qu'elle comporte, je transcris ici, pour un certain nombre d'arcs, les valeurs des cosinus correspondants calculés au moyen de la formule (8), et en regard leurs véritables valeurs. Dans celles qui sont exprimées en décimales, les quatre premiers chiffres décimaux sont exacts.

Angles.	Valeur du cosinus calculee par la formule (8)	Valeur exacte du cosinus
0°	1	1
18.	0,9512	0,9511
30. . . .	0,8662	0,8660
45.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
54.	0,5878	0,5878
60	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
75.	0,2591	0,2588
90.	0	0

Je ferai remarquer que, quand l'angle est compris entre 0° et 45° ou entre 60° et 90°, la valeur calculée est supérieure à la valeur exacte ; elle lui est inférieure quand l'angle est compris entre 45° et 60°.

Si l'on pose

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{Vx^2}{x + (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}},$$

la fonction V diffère très peu de l'unité quand x varie de 0 à $+1$. Elle s'en écarte le plus pour $x = 0$; on a alors, comme il est facile de le voir,

$$V = \frac{\pi^2}{4\sqrt{6}} = 1,00731\ldots$$

Le maximum de l'erreur commise en employant la formule (8) est environ 0,0003.

VI.

14. La méthode que j'ai exposée ci-dessus présente des avantages incontestables sur celle de Newton ; toutefois, elle exige l'extraction d'une racine carrée et la substitution dans le polynôme $f''(x)$ de la valeur approchée de la racine.

L'extraction de la racine carrée n'augmente guère les calculs lorsque l'on peut employer les logarithmes. Quant à la substitution dans la dérivée seconde, il est facile, dans un très grand nombre de cas, d'en obtenir le résultat.

Il existe en effet une classe nombreuse d'équations, ayant toutes leurs racines réelles, qui jouent un rôle important en Analyse [à cette classe appartiennent notamment les polynômes de Legendre, les polynômes définis par l'expression $\cos n(\operatorname{arc}\cos x)$, etc.] et qui jouissent des propriétés suivantes :

En premier lieu, en désignant par V_n le polynôme qui forme le premier membre d'une de ces équations et par n son degré, V_n s'exprime linéairement en fonction de V_{n-1} et de V_{n-2}.

En second lieu, V'_n et V''_n s'expriment d'une façon très simple quand on connaît V_n et V_{n-1}.

Pour trouver le résultat de la substitution d'un nombre donné α dans V_n, on calculera successivement et par voie récurrente le résultat qu'on obtient en effectuant la substitution dans $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n$; cela posé, les valeurs de $V'_n(\alpha)$ et $V''_n(\alpha)$ s'en déduisent presque sans calcul.

VII.

15. J'ai montré précédemment qu'on pouvait obtenir une infinité d'intervalles ne renfermant aucune racine d'une équation donnée qui a toutes ses racines réelles.

On peut déterminer également une infinité d'intervalles renfermant au moins une racine d'une telle équation.

Pour abréger, je dirai que deux nombres A et A' séparent les racines d'une équation lorsque *chacun des intervalles* compris entre ces nombres renferme au moins une racine, et qu'ils ne les séparent pas lorsque l'un des intervalles renferme toutes les racines tandis que l'autre n'en renferme aucune.

Cela posé, j'ai donné sans démonstration [1] la proposition suivante :

Si l'on désigne par x une quantité réelle arbitraire,

---

[1] *Sur la résolution des équations qui ont toutes leurs racines réelles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIX, p. 996).

les nombres ξ *et* ξ' *qui satisfont à la relation*

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\xi - x)(\xi' - x)(f'^2 - ff'')\\ &\quad + (\xi + \xi' - 2x)ff' + nf^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

et dont l'un est arbitraire séparent les racines de l'équation

$$f(\mathrm{X}) = 0.$$

Le nombre n désigne ici, comme ci-dessus, le degré du polynôme $f(\mathrm{X})$.

16. Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que, en désignant par y, η et η' des quantités introduites pour rendre les expressions homogènes et dont la valeur soit égale à l'unité, la relation précédente devient

$$(\xi f'_x + \eta f'_y)(\xi' f'_x + \eta' f'_y) + (\xi y - x\eta)(\xi' y - x\eta')\mathrm{H} = 0,$$

H représentant, comme plus haut, le covariant

$$(n-1)f'^2 - nff''.$$

La relation, sous cette nouvelle forme, ne renfermant que des covariants de $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, la propriété énoncée est *projective*; il suffit donc, pour l'établir, de la démontrer pour deux valeurs particulières des variables indépendantes x et ξ'.

Je supposerai $x = \infty$ et $\xi' = 0$.

L'équation (9) devient alors, si l'on fait

$$f(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^n + nb\mathrm{X}^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}c\mathrm{X}^{n-2} + \ldots,$$

$$ab\xi = (n-1)ac - nb^2,$$

d'où

$$\xi = (n-1)\frac{c}{b} - n\frac{b}{a},$$

et, en désignant par α, β, ..., ω les racines de $f = 0$,

$$\xi = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \omega^2}{\alpha + \beta + \ldots + \omega}.$$

Il faut maintenant prouver qu'une racine au moins de l'équation est comprise entre o et ξ et que toutes les racines ne sont pas comprises dans cet intervalle.

Pour fixer les idées, je supposerai ξ positif et je distinguerai deux cas :

1° Si toutes les racines sont positives, ξ est une valeur moyenne entre les quantités

$$\frac{\alpha^2}{\alpha}, \frac{\beta^2}{\beta}, \ldots, \frac{\omega^2}{\omega},$$

c'est-à-dire

$$\alpha, \beta, \ldots, \omega;$$

il en résulte qu'une au moins de ces racines est comprise entre o et ξ et une au moins en dehors de ces limites.

La proposition est donc démontrée.

2° Si quelques racines sont négatives, soient

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$$

les racines positives de l'équation; on a évidemment

$$\xi > \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \lambda^2}{\alpha + \beta + \ldots + \lambda}.$$

La quantité ξ étant supérieure à la valeur moyenne des racines positives, l'une au moins de ces racines est comprise dans l'intervalle o, ξ; toutes ces racines peuvent même y être comprises, mais il y a au moins une racine négative en dehors de cet intervalle.

La proposition subsiste donc encore dans ce cas.

17. Il résulte de ce qui précède que, si les quantités ξ et ξ' ne séparent pas les racines de l'équation $f = 0$, l'équation (9) a toutes ses racines imaginaires, et que, si elles les séparent, cette même équation a nécessairement des racines réelles. Mais je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet; quant aux applications que l'on peut faire de ce qui précède à la résolution par approximation d'une équation ayant toutes ses racines réelles, je renverrai à la Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et que j'ai rappelée plus haut.