NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. BARBARIN

Note sur le planimètre polaire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 212-215

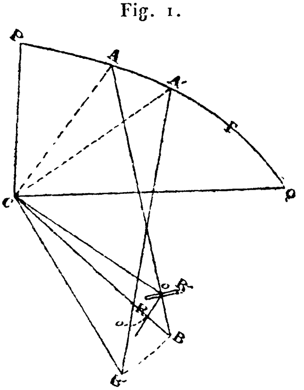
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__212_0>

NOTE SUR LE PLANIMÈTRE POLAIRE;

PAR M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Nice.

ABC est un levier articulé, composé de deux branches AB, BC réunies par une charnière B. L'extrémité C est fixe; l'extrémité A décrit une courbe donnée Γ. Je me

Fig. 1.



propose d'abord d'établir une relation entre l'aire de la courbe Γ et l'arc décrit dans le mouvement du levier par un point donné O de la branche AB.

On peut passer de la position ABC du levier à la position infiniment voisine A′B′C par une rotation d'angle $\widehat{ACA'} = d\omega$ autour du point fixe C. Dans ce mouvement, le point O décrit l'arc OO′, et l'on a aussi

$$\widehat{OCO'} = \widehat{BCB'} = d\omega.$$

Dans le triangle ACO, on a, en posant $CA = \rho$, $OA = a$, $CO = r$,

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\widehat{AOC}. \tag{1}$$

Dans le triangle COB, en posant $OB = b$, $CB = c$, on a de même

$$(2) \qquad c^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\widehat{COB}.$$

Donc, en retranchant ces deux égalités membre à membre,

$$(3) \qquad \rho^2 - c^2 = a^2 - b^2 + 2(a+b)r\cos\widehat{COB}.$$

Si l'on fait $OO' = dS$, comme $rd\omega = dS$, on a, en éliminant r,

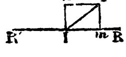
$$(4) \qquad \rho^2\frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2)\frac{d\omega}{2} + (a+b)\,dS\cos\widehat{COB}.$$

Mais $\rho^2\dfrac{d\omega}{2}$ est l'aire du secteur ACA'; donc, si l'on intègre entre deux limites ω_1, ω_2 de l'argument, correspondant au secteur plan CPQ, on a

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \text{aire CPQ} &= (a^2 + c^2 - b^2)\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \\ &\quad + (a+b)\int_{\omega_1}^{\omega_2} dS\cos\widehat{COB}, \end{aligned}\right.$$

$dS\cos\widehat{COB}$ étant considéré comme une fonction de ω, variable indépendante. Telle est la relation cherchée. On pourrait en déduire aisément l'aire de la courbe Γ si l'on pouvait déterminer l'intégrale $\displaystyle\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\widehat{COB}\,dS$. Un artifice mécanique permet de résoudre cette difficulté. Soit

Fig. 2.



RR' une roue verticale dont le centre est I. Supposons que le centre de la roue subisse un déplacement horizontal rectiligne II'. Ce dernier peut être considéré comme la résultante de deux déplacements horizontaux rectangulaires, l'un suivant Im, l'autre In perpendiculaire au plan de la roue.

Le premier fait tourner la roue de la quantité Im égale à $II' \cos \widehat{I'Im}$; le second ne fait que déplacer la roue parallèlement à elle-même, sans provoquer de rotation. Donc la quantité dont la roue a tourné pour un déplacement II' de son centre est uniquement la projection de II' sur le plan de la roue.

Plaçons donc perpendiculairement à AB une roue RR' dont O soit le centre. La quantité du dont cette roue aura avancé pour le déplacement OO' sera mesurée par $du = dS \cos(OO', RR')$. Or, pour fixer les idées, nous supposerons la quantité du positive quand le mouvement de la roue s'effectue dans le même sens que celui de A vers A' et négative dans le cas contraire. Dans la disposition de la figure, on a

$$du = -dS \cos \widehat{COA} = dS \cos \widehat{COB},$$

et par suite

$$\int (a+b)\, dS \cos \widehat{COB} = \int (a+b)\, du.$$

Soit donc U la somme algébrique des quantités du dont la roue a avancé dans chaque déplacement élémentaire; on a

$$(6) \qquad \text{aire CPQ} = (a^2 + c^2 - b^2)\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + (a+b)\text{U}.$$

C'est sur ce principe qu'est fondé l'usage d'un ingénieux instrument, le *planimètre polaire*, inventé en 1856 par M. Amsler-Laffon, à Schaffouse, et qui rend aujourd'hui de grands services aux Ponts et Chaussées et à l'Administration forestière pour le calcul rapide de l'aire contenue dans un contour déterminé. La roulette ROR′ est divisée et se meut devant un vernier fixe. Une vis sans fin communique le mouvement de la roue verticale à un disque horizontal divisé qui sert de compteur. L'extrémité A est munie d'un tracelet pointu avec lequel on décrit toutes les sinuosités de la courbe.

Il y a deux façons d'employer le planimètre.

1° La pointe fixe C est à l'intérieur de l'aire à mesurer. Les limites d'intégration sont alors $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 2\pi$. Une lecture faite sur le compteur, sur la roue et sur le vernier donne U. On en déduit la surface cherchée

$$S = (a^2 + c^2 - b^2)\pi + (a + b)U. \tag{7}$$

La constante $(a^2 + c^2 - b^2)\pi$ est calculée une fois pour toutes et inscrite sur l'instrument même; il n'y a donc qu'à calculer $(a + b)U$ et à y ajouter cette constante K. On peut même éviter cette addition en choisissant le point O sur AB de façon que

$$a^2 + c^2 - b^2 = 0;$$

on a alors tout simplement

$$S = (a + b)U. \tag{7'}$$

2° On peut mettre la pointe fixe C à l'extérieur du contour de l'aire mesurée; alors les deux limites d'intégration ω_1, ω_2 sont égales, et il reste uniquement

$$S = (a + b)U. \tag{8}$$

Une simple lecture donne encore l'aire.