NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GENTY

Constructions diverses et solutions de problèmes graphiques relatifs aux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 216-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__216_0>

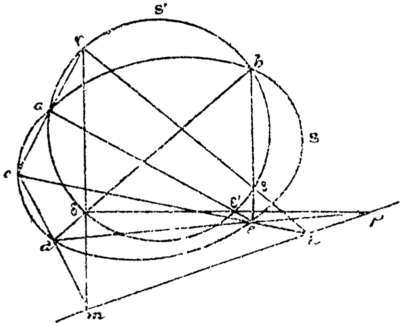
CONSTRUCTIONS DIVERSES ET SOLUTIONS DE PROBLÈMES GRAPHIQUES RELATIFS AUX CONIQUES;

Par M. GENTY.

Problème I. — *Étant donnés deux points* a *et* b *communs à deux coniques* S *et* S′, *et trois autres points de chacune d'elles* c, d *et* e, f, g *et* h, *trouver la seconde corde commune de ces deux courbes.*

Solution. — Mener les droites ac et bd; chercher, au moyen du théorème de Pascal, les points d'intersection γ

Fig. 1.



et δ de ces deux droites avec la conique S′. Les droites cd et $\gamma\delta$ se coupent en un point m de la corde commune cherchée.

On obtiendra deux autres points n et p de cette droite par une construction analogue.

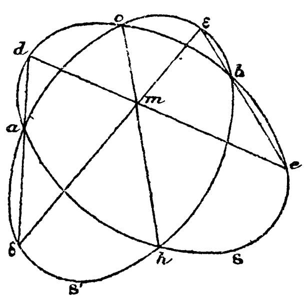
La construction s'applique évidemment sans modification quand les points a et b se confondent, c'est-à-dire quand les coniques S et S′ sont tangentes au point a. De même, deux des points c, d, e peuvent se confondre; l'un d'eux peut même se confondre avec le point a ou le point b; l'examen de ces cas particuliers ne présente aucune difficulté.

Si, par exemple, les points c et d sont confondus en un seul, on mène les droites ac et bc qui coupent S' aux points γ et γ' respectivement, et l'intersection de la droite $\gamma\gamma'$ avec la tangente à la conique S' au point c, supposée connue ou construite, est un point de la corde commune.

Problème II. — *Étant donnés trois points a, b et c communs à deux coniques* S *et* S', *et deux autres points d, e et f, g de chacune d'elles, trouver le quatrième point commun à ces deux courbes.*

Ce problème n'est évidemment qu'un cas particulier du précédent. Si, en effet, on considère la corde ab comme

Fig. 2.



une corde commune aux coniques, on pourra trouver, à l'aide de la construction ci-dessus, un point m de la seconde corde commune. La droite cm sera donc cette corde elle-même, et elle coupera S et S' au point h cherché. En considérant successivement les droites bc et ca comme des cordes communes, on trouvera deux autres droites passant aux points a et b respectivement et au point h.

Applications.

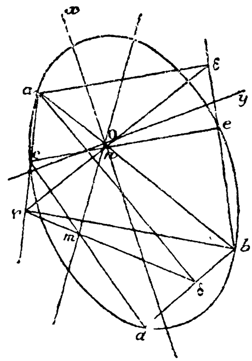
1° *Trouver les directions des axes d'une conique* S', *dont on donne cinq points* a, b, c, d, e (*ou bien quatre points et la tangente en l'un de ces points, ou encore trois points et les tangentes à la courbe en deux de ces points*).

Il suffit de trouver un système de cordes communes de S avec un cercle : les bissectrices des angles formés par ces cordes communes sont parallèles aux directions cherchées.

Nous prendrons pour le cercle S' le cercle décrit sur ab comme diamètre, et alors la construction est la suivante :

Du point a abaisser sur les droites bd et be des perpendiculaires $a\delta$, $a\varepsilon$; du point b abaisser sur ac la perpen-

Fig. 3.



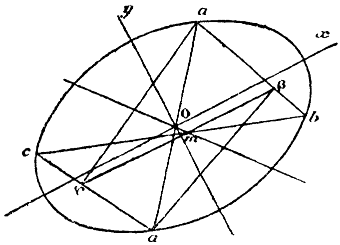
diculaire $b\gamma$. Soient m le point d'intersection des droites cd et $\gamma\delta$, n celui des droites ce et $\gamma\varepsilon$: les bissectrices des angles des droites mn et ab ont les directions cherchées.

2° *Trouver les directions des axes d'une conique donnée par son centre* O *et trois points* a, b *et* c.

On prend pour la conique S' le cercle décrit du point O comme centre avec Oa pour rayon.

Construction. — Soit a' le point de la conique symétrique du point a par rapport au centre. Abaisser du point a' une perpendiculaire $a'\beta$ sur ab, du point a une perpendiculaire $a\gamma$ sur $a'c$, et soit m le point d'intersection

Fig. 4.

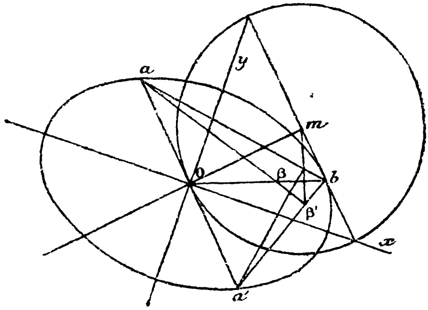


des droites bc et $\beta\gamma$: le demi-diamètre de la conique dirigé suivant Om est égal à Oa, et les bissectrices Ox et Oy des angles des droites Oa et Om donnent les directions des axes.

3° *Trouver les directions des axes d'une conique, connaissant deux demi-diamètres conjugués* Ob *et* Oa *de la courbe. On prend pour* S′ *le même cercle que ci-dessus.*

Construction. — Abaisser des points a et a' des per-

Fig. 5.



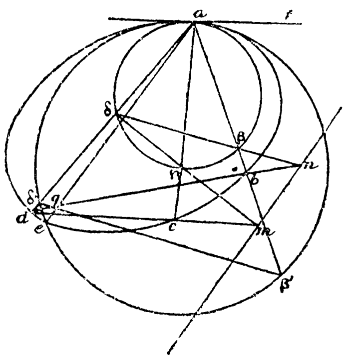
pendiculaires $a\beta'$ et $a'\beta$ sur les droites $a'b$ et ab respectivement, et déterminer le point de rencontre m des droites $\beta\beta'$ et de la tangente en b à la conique : les directions cherchées sont les bissectrices des angles formés par les droites Om et Oa. Il est facile de reconnaître qu'on peut obtenir ces bissectrices en joignant le point O aux points d'intersection de la ligne bm avec le cercle décrit du point m comme centre avec mO pour rayon.

On détermine ensuite très simplement les longueurs des axes.

4° *On donne quatre points a, b, c, d d'une conique* S *et la tangente au point a : on demande le centre de courbure de la courbe en ce point.*

Construction. — Chercher, au moyen de la construction connue, la corde d'intersection mn de la conique S

Fig. 6.



avec un cercle quelconque tangent au point a à cette courbe. Mener par le point a une parallèle à mn : elle rencontre S en un point e du cercle de courbure au point a ; ce cercle se trouve ainsi complètement déterminé.

5° *Construire une conique, connaissant son cercle osculateur au point a et deux autres points b et d de la courbe.*

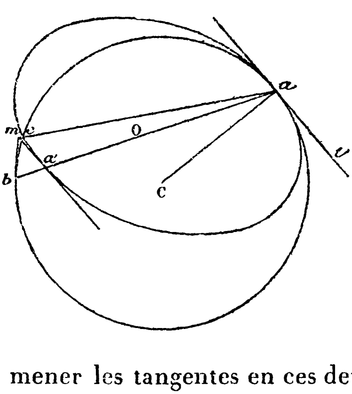
Construction (*voir* la *fig.* 6). — Soient δ' et β' les points d'intersection respectifs des droites ad et ab avec le cercle de courbure au point a, q le point d'intersection des droites db, $\delta'\beta'$. La droite aq rencontre le cercle de courbure en son point d'intersection e avec la conique. On peut maintenant construire cette courbe, puisqu'on en connaît quatre points a, b, d, e et la tangente at au point a.

6° *Construire une conique, connaissant le centre* O *et le centre de courbure en un point* a.

Si par le point de contact a de deux coniques S et S′, tangentes en ce point, on mène une corde qui les rencontre de nouveau aux points b et b' respectivement, les tangentes à ces deux points se coupent sur la corde commune des deux coniques.

Construction. — Décrire le cercle osculateur au point a; déterminer les points d'intersection a' et b du diamètre Oa avec la conique et le cercle osculateur respectivement

Fig. 7.

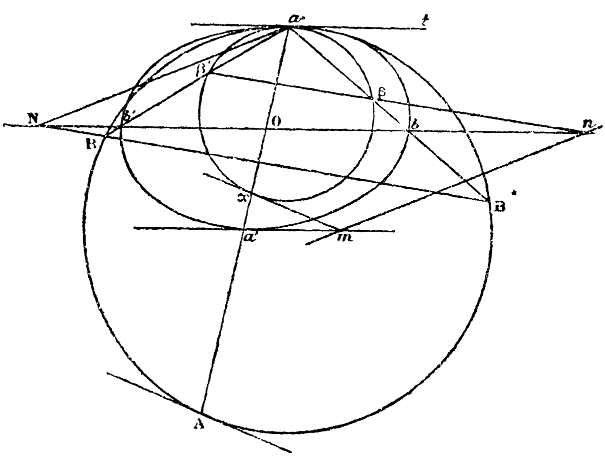


(Oa = Oa'); mener les tangentes en ces deux points, en remarquant que la tangente au point a' est parallèle à la tangente at au point a. Soit m le point d'intersection de ces deux tangentes : la droite am coupe le cercle osculateur en son point d'intersection avec la conique. On peut maintenant construire cette courbe avec la plus grande facilité, puisqu'on en connaît le centre, deux points et la tangente à l'un d'eux.

7° *Étant donnés deux diamètres conjugués aa', bb' d'une conique, construire le cercle osculateur au point a.*

Construction. — Décrire un cercle quelconque tangent à la conique au point a; mener les droites ab, ab', aa', qui coupent ce cercle aux points β, β' et α respectivement. Soient n le point d'intersection des droites $\beta\beta'$ et

Fig. 8.



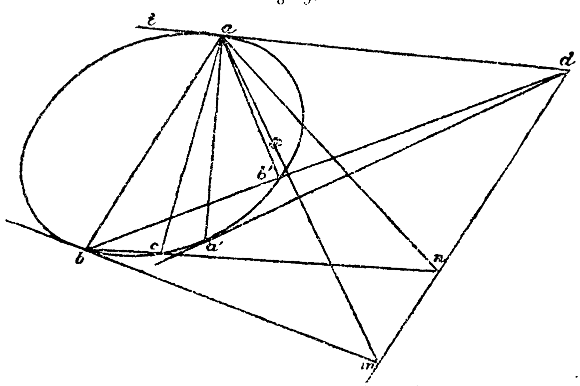
bb', m celui des tangentes à la conique et au cercle aux points a' et α respectivement : la droite mn est la corde commune aux deux courbes. Si donc on mène par le point a une parallèle aN à mn, on aura la corde d'intersection de la conique avec son cercle osculateur au point a. Soit N le point d'intersection de cette droite avec bb'; si l'on mène par le point N une parallèle à $\beta\beta'$, elle rencontrera les droites ab et ab' en deux points B et B' du cercle osculateur.

De même, si M est le point de rencontre de la droite aN avec la tangente à la conique au point a', et que du point M on mène une parallèle à $m\alpha$, cette droite rencontrera aa' en un point A du cercle cherché, et elle est tangente à ce cercle en ce point.

La ligne $\beta\beta'$ fait avec les lignes ab et ab' les mêmes angles que la tangente at au point a fait avec les lignes ab' et ab respectivement; la ligne $m\alpha$ fait avec aa' le même angle que at. Cette remarque montre très simplement comment on peut construire la corde d'intersection d'une conique avec l'un de ses points considéré comme un cercle infiniment petit, étant donnés la tangente en ce point et trois autres points, ou bien la tangente en ce point, deux autres points et la tangente à la conique en l'un d'eux. Ce dernier problème fera l'objet du paragraphe suivant.

8° *Étant donnés trois points a, b, c d'une conique, les tangentes aux points a et b respectivement, trouver*

Fig. 9.



la corde d'intersection de la conique avec le point a considéré comme un cercle infiniment petit.

Construction. — Mener une droite am telle que

$\widehat{mab} = \widehat{bat}$, et prendre son intersection m avec la tangente en b à la conique; mener une autre droite an telle que $\widehat{nac} = \widehat{bat}$, et chercher l'intersection n de cette droite avec bc : la droite mn est la corde cherchée. Soient d son point d'intersection avec at et a' le point de contact de la tangente menée du point d à la conique: la droite aa' est la normale au point a; et si l'on mène par le point a deux droites quelconques ab, ab' faisant des angles égaux avec la normale aa' et rencontrant la conique aux points b et b', la droite bb' passe par le point fixe d. Il est évident que les axes de la conique sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites da et dm.