

CH. BIEHLER

Sur les équations linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 19
(1880), p. 311-331

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__311_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

les n équations linéaires entre les inconnues x_1, x_2, \dots, x_n .

Appelons Δ le déterminant des n^2 coefficients des inconnues,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\nu} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\nu} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,\nu} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et supposons $\Delta \geq 0$.

Multiplions les éléments de la première colonne de Δ par x_1 , ceux de la deuxième par x_2 , ceux de la troisième par x_3, \dots , ceux de la dernière par x_n ; ajoutons par lignes horizontales les éléments ainsi modifiés et substituons aux éléments de la colonne d'ordre ν dans Δ les sommes ainsi obtenues; par cette substitution le déterminant Δ sera multiplié par x_ν , et l'on aura

$$\Delta x_\nu = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\nu-1} & X_1 - K_1 & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\nu-1} & X_2 - K_2 & a_{2,\nu+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,\nu-1} & X_n - K_n & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui figure dans le second membre peut être décomposé en deux autres, savoir

$$\Delta x_\nu = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\nu-1} & X_1 & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\nu-1} & X_2 & a_{2,\nu+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,\nu-1} & X_n & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\nu-1} & K_1 & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\nu-1} & K_2 & a_{2,\nu+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,\nu-1} & K_n & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Désignons par $\Delta_\nu(\mathbf{X})$ ce que devient Δ quand on y remplace les éléments $a_{1,\nu}, a_{2,\nu}, \dots, a_{n,\nu}$ de la colonne

d'ordre ν respectivement par X_1, X_2, \dots, X_n , et soit $\Delta_\nu(\mathbf{K})$ ce que devient le même déterminant Δ quand on y remplace les éléments de la même colonne par les quantités K_1, K_2, \dots, K_n ; l'égalité précédente pourra s'écrire

$$\Delta x + \Delta_\nu(\mathbf{K}) = \Delta_\nu(\mathbf{X}).$$

En faisant successivement $\nu = 1, \nu = 2, \dots, \nu = n$ dans cette formule, on obtiendra la série des identités

$$\begin{aligned} \Delta x_1 + \Delta_1(\mathbf{K}) &= \Delta_1(\mathbf{X}), \\ \Delta x_2 + \Delta_2(\mathbf{K}) &= \Delta_2(\mathbf{X}), \\ \dots\dots\dots &\dots\dots, \\ \Delta x_n + \Delta_n(\mathbf{K}) &= \Delta_n(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Les quantités $\Delta_\nu(\mathbf{X})$ sont des fonctions linéaires et homogènes de X_1, X_2, \dots, X_n ; par suite, toute solution du système

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = 0, \\ X_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ X_n = 0 \end{cases}$$

annule les déterminants $\Delta_\nu(\mathbf{X})$ et par suite satisfait au système

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta x_1 + \Delta_1(\mathbf{K}) = 0, \\ \Delta x_2 + \Delta_2(\mathbf{K}) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Delta x_n + \Delta_n(\mathbf{K}) = 0. \end{cases}$$

Inversement, dans l'hypothèse admise de $\Delta \neq 0$, la solution du système (2) satisfait au système (1).

Si l'on multiplie en effet la première équation du système (2) par $a_{\mu,1}$, la deuxième par $a_{\mu,2}, \dots$, la dernière par $a_{\mu,n}$, en ajoutant membre à membre les équations obtenues, il viendra

$$\begin{aligned} \Delta(a_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \dots + a_{\mu,n}x_n) \\ + a_{\mu,1}\Delta_1(\mathbf{K}) + a_{\mu,2}\Delta_2(\mathbf{K}) + \dots + a_{\mu,n}\Delta_n(\mathbf{K}) = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\Delta(\mathbf{X}_\mu - \mathbf{K}_\mu) + a_{\mu,1}\Delta_1(\mathbf{K}) + a_{\mu,2}\Delta_2(\mathbf{K}) + \dots + a_{\mu,n}\Delta_n(\mathbf{K}) = 0.$$

Mais

$$a_{\mu,1}\Delta_1(\mathbf{K}) + a_{\mu,2}\Delta_2(\mathbf{K}) + \dots + a_{\mu,n}\Delta_n(\mathbf{K}) - \mathbf{K}_\mu\Delta$$

est, au signe près, le déterminant d'ordre $n + 1$

$$\begin{vmatrix} a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \dots & a_{\mu,n} & \mathbf{K}_\mu \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \mathbf{K}_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \mathbf{K}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \dots & a_{\mu,n} & \mathbf{K}_\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & \mathbf{K}_n \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul, comme ayant deux rangées identiques; l'équation précédente devient donc

$$\Delta\mathbf{X}_\mu = 0,$$

et, comme $\Delta > 0$, on a $\mathbf{X}_\mu = 0$ pour toutes les valeurs de μ depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = n$.

On voit donc que, si Δ est différent de zéro, les systèmes (1) et (2) sont équivalents, et le système (2) donne pour les inconnues x_1, x_2, \dots, x_n des valeurs uniques et déterminées.

Discussion.

2. Considérons actuellement le cas où le déterminant Δ est égal à zéro, et supposons en outre que tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à p ($p < n$) soient nuls.

L'un des déterminants mineurs d'ordre p est supposé différent de zéro; supposons que ce soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}.$$

nuls; par suite, (α) prend la forme plus simple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 - K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 - K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p - K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} - K_{p+\alpha} \end{vmatrix} ;$$

le déterminant (α) étant nul, on aura

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on considère un système de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n$ qui annulent X_1, X_2, \dots, X_p (ce système, comme nous l'avons vu, est formé par des valeurs arbitraires de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ et par des valeurs correspondantes déterminées de x_1, x_2, \dots, x_p), pour ces valeurs, l'équation précédente se réduira à

$$X_{p+\alpha} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,p+\alpha} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

et, comme le multiplicateur de $X_{p+\alpha}$ est, par hypothèse, différent de zéro, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ ne pourra être satisfaite pour les valeurs des inconnues qui annulent X_1, X_2, \dots, X_p , que si le déterminant

$$(\alpha') \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix}$$

est nul. Si ce déterminant n'est pas nul, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ est incompatible avec les p premières équations; il y aura donc, dans le système proposé, autant d'équations incompatibles avec $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_p = 0$ qu'il y a de déterminants (α') différents de zéro. Si (α') est nul, $X_{p+\alpha}$ est une fonction linéaire et homogène de X_1, X_2, \dots, X_p , définie par l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Cas où le système proposé est homogène.

3. Ce qui précède montre que, dans le cas où Δ est différent de zéro, un système linéaire et homogène, dans lequel le nombre des équations est égal à celui des inconnues, ne peut être satisfait que pour des valeurs nulles des inconnues.

Si $\Delta = 0$ et si, en outre, tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à p sont nuls sans que tous les déterminants d'ordre p soient nuls, la discussion précédente

Cherchons la condition pour que ces équations soient compatibles. Désignons par Δ le déterminant d'ordre $n + 1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix};$$

on aura aussi identiquement

$$3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & X_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Si les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{n+1} = 0$ admettent une solution commune, l'équation précédente montre qu'on devra avoir $\Delta = 0$; par suite, $\Delta = 0$ est la condition nécessaire pour que les équations proposées soient compatibles.

Inversement, supposons que Δ soit nul et supposons, de plus, que l'un des déterminants mineurs de Δ d'ordre n , formé avec les coefficients des inconnues, soit différent de zéro, par exemple le déterminant

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu-1,1} & a_{\mu-1,2} & \dots & a_{\mu-1,n} \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \dots & a_{\mu+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix},$$

les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{\mu-1} = 0, X_{\mu+1} = 0, \dots, X_{n+1} = 0$ admettront une solution unique et déterminée. D'ailleurs, l'équation $\Delta = 0$ peut s'écrire,

d'après (3),

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \Delta(n+1)\mathbf{X}_{n+1} - \Delta(n)\mathbf{X}_n + \dots \\ \pm \Delta(\mu+1)\mathbf{X}_{\mu+1} \mp \Delta(\mu)\mathbf{X}_\mu \\ \dots \pm \Delta(\mu-1)\mathbf{X}_{\mu-1} \mp \dots \pm \Delta_1\mathbf{X}_1 = 0. \end{array} \right.$$

Pour les valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n qui annulent $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{\mu-1}, \mathbf{X}_{\mu+1}, \dots, \mathbf{X}_{n+1}$, l'identité (4) se réduit à

$$\Delta(\mu)\mathbf{X}_\mu = 0,$$

et, comme $\Delta(\mu)$ est supposé différent de zéro, pour ces valeurs on aura aussi

$$\mathbf{X}_\mu = 0,$$

c'est-à-dire que les $\mu + 1$ équations proposées sont compatibles.

On voit donc que si les déterminants mineurs de Δ , coefficients de $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \dots, a_{n+1,n+1}$, ne sont pas tous nuls, la condition $\Delta = 0$ indique que les équations proposées ont une solution commune. Si tous les déterminants mineurs de Δ d'ordre supérieur à p et ne renfermant pas les éléments $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \dots, a_{n+1,n+1}$ sont nuls, et si un déterminant d'ordre p , par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix},$$

est différent de zéro, les équations $\mathbf{X}_1 = 0, \mathbf{X}_2 = 0, \dots, \mathbf{X}_p = 0$ admettent pour x_1, x_2, \dots, x_p une solution déterminée quand on donne à $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ des valeurs arbitraires, mais déterminées.

En opérant comme pour la discussion d'un système de

n équations à n inconnues (n° 2), on arrive à l'identité

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} \end{array} \right. \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_p \\ X_{p+\alpha} \end{array} \\
 \\
 - \left| \begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{array} \right| = 0.
 \end{array}$$

Pour un système de valeurs de x_1, x_2, \dots, x_n qui annulent X_1, X_2, \dots, X_p , cette identité se réduit à la suivante :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{array} \right. X_{p+\alpha} \\
 \\
 - \left| \begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{array} \right| = 0.
 \end{array}$$

Si donc le déterminant

$$(6) \quad \left| \begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,n+1} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,n+1} \end{array} \right|$$

On aura identiquement

$$(5) \Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & X_n \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \dots & a_{n+\nu,n} & X_{n+\nu} \end{vmatrix}.$$

Comme $\Delta \geq 0$, les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots, \quad X_n = 0$$

admettent une solution unique et déterminée; si l'équation $X_{n+\nu} = 0$ doit être compatible avec les précédentes, il faudra que l'on ait $\Delta(\nu) = 0$. Les équations $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0$, \dots , $\Delta(p) = 0$ seront donc (dans le cas de $\Delta \geq 0$) les conditions nécessaires pour que les $n + p$ équations proposées soient compatibles.

Ces conditions sont aussi suffisantes, car l'identité (5) devient

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & X_n \\ a_{n+\nu,1} & a_{n+\nu,2} & \dots & a_{n+\nu,n} & X_{n+\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

et, par suite, le système de valeurs des inconnues qui annule X_1, X_2, \dots, X_n annule aussi $X_{n+\nu}$, puisque Δ est toujours supposé différent de zéro. Par suite enfin, $\Delta(1) = 0$, $\Delta(2) = 0$, \dots , $\Delta(p) = 0$ sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les $n + p$ équations proposées soient compatibles, sous la condition $\Delta \geq 0$.

Dans le cas où les $n + p$ équations proposées sont compatibles, tous les déterminants d'ordre $n + 1$ formés avec les coefficients de $n + 1$ des équations proposées sont nuls.

Cela résulte de la proposition établie au n° 4.

Supposons maintenant que tous les déterminants d'ordre supérieur à q que l'on peut former avec les coefficients des inconnues, en prenant pour éléments d'une rangée les coefficients d'une même équation et pour éléments d'une colonne les coefficients d'une même inconnue dans les mêmes équations, soient nuls, et que le déterminant d'ordre q

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. On établira, comme on l'a fait au n° 2, l'identité

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & X_q \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & X_{q+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & a_{q,n+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Cela posé, si le déterminant

$$(6') \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & a_{q,n+1} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} & a_{q+\alpha,n+1} \end{vmatrix}$$

établir l'identité

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} \end{array} \right| \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_q \\ X_{q+\alpha} \end{array} \\ - \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} \end{array} \right| \begin{array}{l} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_q \\ K_{q+\alpha} \end{array} \end{array} \right. = 0.$$

Si donc le déterminant

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} \end{array} \right| \begin{array}{l} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_q \\ K_{q+\alpha} \end{array}$$

est différent de zéro, l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ est incompatible avec $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_q = 0$.

7. Si les équations proposées sont homogènes, c'est-à-dire si $K_1 = 0, K_2 = 0, \dots, K_n = 0$, l'identité (6) et toutes celles qu'on obtient en faisant varier α de 1 à $n - q$, prennent la forme

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \\ a_{q+\alpha,1} & a_{q+\alpha,2} & \dots & a_{q+\alpha,q} \end{array} \right| \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_q \\ X_{q+\alpha} \end{array} \end{array} \right. = 0,$$

et l'équation $X_{q+\alpha} = 0$ est compatible avec les q premières.

de zéro et chacune des $p + 1$ autres soient nuls à la fois.

2° Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n + p$ inconnues, un déterminant d'ordre $n - 1$ est différent de zéro, et que les $p + 1$ déterminants d'ordre n formés par les $n - 1$ colonnes qui donnent le déterminant différent de zéro et chacune des $p + 1$ restantes soient nuls à la fois, tous les autres déterminants d'ordre n tirés du système proposé seront aussi nuls.

3° Si, dans un système de n équations linéaires et homogènes à $n + p$ inconnues, tous les déterminants d'ordre $n - 1$ sont nuls, et qu'un déterminant d'ordre $n - 2$ soit différent de zéro, le système se réduit à $n - 2$ équations distinctes.

4° Si tous les déterminants d'ordre $n - 2$ sont nuls et qu'un déterminant d'ordre $n - 3$ soit différent de zéro, le système proposé se réduit à $n - 3$ équations distinctes.

Supposons à cet effet qu'un déterminant d'ordre q ($q < n$) soit différent de zéro ; soit, pour fixer les idées,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} \end{vmatrix}$$

ce déterminant, et considérons le déterminant d'ordre $q + 1$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & a_{1,q+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & a_{2,q+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & a_{q,q+1} \\ a_{q+1,1} & a_{q+1,2} & \dots & a_{q+1,q} & a_{q+1,q+1} \end{vmatrix}.$$

gènes de X_1, X_2, \dots, X_q et, par suite, toutes les équations se réduisent aux q premières.

En suivant la même méthode, on démontrerait aisément que *tous les déterminants d'ordre $q + 1$ sont nuls, si les équations proposées se réduisent à q d'entre elles.*
(*A suivre.*)