NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LEGOUX

Sur les trajectoires d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 340-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__340_1>

SUR LES TRAJECTOIRES D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A L'ACTION D'UNE FORCE CENTRALE;

Par M. A. LEGOUX,
Professeur a la Faculte des Sciences de Grenoble.

Nous ne nous occuperons, dans ce qui va suivre, que du cas de l'attraction. La méthode s'applique sans peine au cas de la répulsion.

Si l'on représente par $m\mu r^n$ la valeur de l'attraction et par K le double de l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'unité de temps, l'équation différentielle de la trajectoire est, comme on sait,

$$\mu r^n = \frac{K^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)$$

ou, en posant $z = \frac{1}{r}$,

$$(1) \qquad \frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{\mu}{K^2} z^{-(n+2)} = 0;$$

en intégrant une première fois, on a, si $n + 1 \gtrless 0$,

$$(2) \qquad \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = B - z^2 - A z^{-(n+1)},$$

B et A étant des constantes définies par les égalités

$$A = \frac{2\mu}{(n+1)K^2}, \quad B = z_0^2 + p_0^2 + \frac{2\mu}{(n+1)K^2} z_0^{-(n+1)},$$

où z_0 et p_0 sont les valeurs initiales de z et $\frac{dz}{d\theta}$.

En général, on ne peut pas intégrer complètement l'équation (2). Nous montrerons plus loin qu'on peut l'intégrer dans le cas où $B = 0$. Mais on peut, au moyen de cette équation, indiquer la forme générale de la courbe, trouver ses sommets, le sens de sa concavité, ses asymptotes et son rayon de courbure.

D'abord on reconnaît sans peine que l'équation

$$B - z^2 - A z^{-(n+1)} = 0$$

a au plus deux racines réelles positives; elle peut avoir une racine double, une racine simple ou pas de racine [1].

---

(1) Dans cet article nous supposerons toujours qu'il s'agit des racines positives.

1° $n+1>0$. — A et B sont positifs, et, suivant que

$$B \gtreqless \frac{n+3}{n+1}\left(\frac{\mu}{K^2}\right)^{\frac{2}{n+3}},$$

on a deux racines, une racine double ou aucune racine positive. On peut mettre l'équation (2) sous la forme

$$d\theta = \frac{z^{\frac{n+1}{2}}\,dz}{\sqrt{-z^{n+3}+Bz^{n+1}-A}}.$$

Si l'on désigne par z' et z'' les deux racines positives, on reconnaît que z ne peut varier qu'entre les limites z' et z'', que par conséquent la trajectoire sera comprise entre deux cercles ayant l'origine pour centre et pour rayons $\frac{1}{z'}$, $\frac{1}{z''}$; de plus, si l'on désigne par V l'angle de la tangente en un point avec le rayon vecteur,

$$\operatorname{tang} V = \frac{r\,d\theta}{dr} = -\frac{z\,d\theta}{dz}.$$

Or, pour $z=z'$ et $z=z''$, $\operatorname{tang} V=\infty$; donc la courbe sera tangente aux cercles limites.

Si $z=z'$, les deux cercles précédents coïncident et la trajectoire est une circonférence.

2° $n+1<0$. — A est négatif et B peut être positif ou négatif.

Soient

$$n+1=-n', \quad A=-A';$$

l'équation (2) peut s'écrire

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{A'z^{n'}-z^2+B}}.$$

Ce cas en comprend plusieurs autres suivant que

$$n'>2, \quad n'<2, \quad n'=2.$$

$n' > 2$. — Si $B > 0$, le polynôme sous le radical a deux, une ou zéro racines positives. Soient z' et z'' ces racines, et supposons $z' < z''$; il faut, pour que $d\theta$ soit réel, que $z < z'$ ou $z > z''$, ce qui montre que la courbe se composera de deux parties, l'une située à l'intérieur du cercle ayant l'origine pour centre et $\frac{1}{z''}$ pour rayon, l'autre extérieure au cercle concentrique au premier et de rayon $\frac{1}{z'}$. D'ailleurs, la courbe sera tangente à ces deux cercles. Si $z' = z''$, ces deux cercles coïncident, et, s'il n'y a pas de racines réelles positives, z pourra prendre toutes les valeurs possibles de 0 à $+\infty$.

Soit maintenant $B < 0$; le polynôme sous le radical n'aura qu'une seule racine réelle z', et z pourra varier depuis z' jusqu'à $+\infty$. La courbe sera située à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{1}{z'}$.

$n' < 2$. — Si $B > 0$, on a toujours une racine réelle positive. Soit z' cette racine. Il faut que z reste toujours inférieur à z', c'est-à-dire que la courbe doit être située à l'extérieur du cercle de rayon $\frac{1}{z'}$.

Si $B < 0$, on a deux, une ou zéro racines réelles positives. Soient z' et z'', $z' < z''$. Il faut que z reste toujours compris entre z' et z''. La courbe sera comprise entre deux cercles de rayons $\frac{1}{z'}$ et $\frac{1}{z''}$.

Si $z' = z''$, les deux cercles précédents coïncident et la trajectoire est un cercle.

$n' = 2$:

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{z^2(A' - 1) + B}} = \frac{dz}{\sqrt{z^2\left(\frac{\mu}{K^2} - 1\right) + B}}.$$

Dans ce cas, l'intégration s'effectue facilement, et l'on trouve pour l'équation de la trajectoire :

$$1 - \frac{\mu}{K^2} > 0, \qquad z = C\cos(h\theta - \alpha),$$

$$1 - \frac{\mu}{K^2} < 0, \qquad z = Ce^{h\theta} + C'e^{-h\theta},$$

$$1 - \frac{\mu}{K^2} = 0, \qquad z = C\theta + C'.$$

Sommets. — Nous appellerons *sommets* les points où le rayon vecteur est maximum ou minimum ; ces points sont déterminés par l'équation

$$\frac{dz}{d\theta} = B - z^2 - Az^{-(n+1)} = 0.$$

D'après ce qui précède, on voit que la trajectoire a deux sommets au plus. Si l'on désigne par z' et z'' les deux racines de l'équation précédente, l'angle compris entre un rayon vecteur maximum et un rayon vecteur minimum consécutifs sera donné par l'intégrale définie

$$\Theta = \int_{z'}^{z''} \frac{dz}{\sqrt{B - z^2 - Az^{-(n+1)}}};$$

si cet angle Θ est commensurable avec π, la courbe est fermée, sinon elle se compose d'une infinité d'arcs égaux.

Concavité. — Comme, d'après l'équation (1),

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}$$

est constamment positif, la trajectoire tournera toujours sa concavité vers le centre d'attraction.

Asymptotes. — Il n'y a pas d'asymptotes si $n + 1 > 0$.

puisque la courbe est comprise tout entière entre deux cercles concentriques.

Supposons donc $n+1<0$. Pour qu'il y ait des asymptotes rectilignes, il faut que, z tendant vers zéro, θ tende vers une valeur finie ainsi que la sous-tangente en coordonnées polaires.

Or, si l'on fait décroître z jusqu'à zéro, la sous-tangente, qui est représentée par $-\frac{d\theta}{dz}$, a pour limite $\frac{1}{\sqrt{B}}$. Donc il faut d'abord que B soit positif. Dans le second membre de l'équation

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{A' z^{n'} - z^2 + B}},$$

si z décroît depuis une quantité très petite z_1 jusqu'à zéro, la différentielle conserve une valeur finie; donc θ tendra vers une limite finie et déterminée lorsque z tendra vers zéro. Comme d'ailleurs on peut prendre devant le radical le signe $+$ ou le signe $-$, on aura généralement deux directions asymptotiques.

Rayon de courbure. — Rappelons la formule qui donne l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{\left(z^2 + \frac{dz^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{z^3\left(z + \frac{d^2z}{d\theta^2}\right)}.$$

De l'équation (1) on tire

$$z + \frac{d^2z}{d\theta^2} = \frac{\mu}{K^2} z^{-(n+1)},$$

de l'équation (2) on tire

$$z^2 + \frac{dz^2}{d\theta^2} = B - A z^{-(n+1)}.$$

Substituons; il vient

$$\rho = \frac{\left(B - Az^{-(n+1)}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mu}{K^2} z^{-n+1}}.$$

Cette valeur de ρ paraît assez compliquée dans le cas général; mais, si l'on choisit les données initiales de façon que B soit nul, ce qui ne peut arriver que si $n + 1 < 0$, on a

$$\rho = (-A)^{\frac{3}{2}} \frac{K^2}{\mu} z^{-\frac{(n+5)}{2}}.$$

Cas particuliers :

$n = -5$,	$\rho = \text{const.}$,	la trajectoire est un cercle.
$n = -7$,	$\rho = Cz = \frac{C}{r}$,	»
$n = -11$,	$\rho = Cz^3 = \frac{C}{r^3}$,	»
........,	...........,	»

Cas particuliers où l'intégration peut s'effectuer. — Supposons $n + 1 < 0$ et $B = 0$; l'équation (2) devient

$$d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-z^2 - Az^{-n-1}}} = \frac{dz}{z\sqrt{-1 - Az^{-n-3}}}.$$

On sait que dans ce cas A est négatif. Posons

$$-Az^{-n-3} = u^2;$$

on trouve sans difficulté, en intégrant,

$$u^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{n+3}{2}(\theta - \alpha)},$$

α étant la constante d'intégration, ou, en remplaçant u^2

et A par leurs valeurs,

$$r^{-n-3} = -\frac{2\mu}{(n+1)K^2}\cos^2\frac{n+3}{2}(\theta-\alpha).$$

La méthode d'intégration précédente n'est pas applicable lorsque $n = -1$ et $n = -3$. Le cas de $n = -1$ se traite sans difficulté. Le cas de $n = -3$ a été étudié plus haut.