LAGUERRE

Sur les coniques qui passent par trois points et ont un double contact avec un cercle donné

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 347-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__347_1>

SUR LES CONIQUES QUI PASSENT PAR TROIS POINTS ET ONT UN DOUBLE CONTACT AVEC UN CERCLE DONNÉ;

Par M. LAGUERRE.

1. Étant donnés trois points a, b, c et un cercle K, on peut construire quatre coniques passant par ces points et ayant un double contact avec le cercle. Les longueurs des axes de ces coniques qui sont parallèles à la corde de contact peuvent se déterminer facilement de la façon suivante.

Des points a, b et c comme centres, décrivons trois cercles A, B et C qui coupent orthogonalement le cercle K et enroulons un fil autour de ces trois cercles; cet enroulement peut se faire de quatre façons différentes, qui correspondent aux quatre solutions du problème. Considérons l'un d'eux en particulier; soient respectivement α, α', β, β' et γ, γ' les points de contact du fil avec les cercles A, B et C.

Cela posé, *si l'on construit un triangle ayant pour côtés les longueurs* $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$ *et* $\gamma'\alpha$, *le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle est la longueur de l'axe de la conique cherchée qui est parallèle à la corde des contacts.*

La proposition précédente résulte immédiatement de ce que, quand on effectue une transformation par directions réciproques, aux divers points d'un cercle correspondent des cycles dont les centres décrivent une conique, tandis qu'ils coupent orthogonalement un cercle doublement tangent à cette conique ([1]).

Il est très facile, du reste, de la vérifier analytiquement.

2. Considérons, pour fixer les idées, une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

et un cercle K, doublement tangent à cette ellipse, dont le centre soit sur l'axe des x.

L'équation de ce cercle sera

$$(x-\alpha)^2+y^2=\mathrm{R}^2,$$

avec la condition

$$\mathrm{R}^2=b^2-\frac{b^2\alpha^2}{c^2}.$$

Soient M', M'' et M''' trois points de l'ellipse dont les coordonnées soient respectivement x', y', x'', y'' et x''', y'''.

Le carré du rayon du cercle ayant pour centre M' et coupant orthogonalement le cercle K est égal à

$$(x'-\alpha)^2+y'^2-\mathrm{R}^2$$

ou, en remplaçant y'^2 et R^2 par leurs valeurs, à

$$\left(\frac{cx'}{a}-\frac{\alpha a}{c}\right)^2;$$

semblablement, le carré du rayon du cercle ayant pour

([1]) *Voir* ma Note *Sur la Geometrie de direction*, communiquee a la Societe mathematique dans la seance du 4 juin 1880.

centre M'' et coupant orthogonalement K a pour valeur

$$\left(\frac{cx''}{a} - \frac{\alpha a}{c}\right)^2.$$

Menons une tangente commune à ces deux cercles (en la choisissant de telle façon que, quand M'' vient à se confondre avec M', les deux points de contact se confondent également), et désignons par T''' la distance comprise sur cette tangente entre les deux points de contact.

On trouvera aisément

$$T'''^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 - \frac{c^2}{a^2}(x' - x'')^2$$

ou encore

$$T'''^2 = 2b^2\left(1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2}\right).$$

Soient φ, θ, ψ les anomalies excentriques des points M', M'', M''', en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} x' &= a\cos\varphi, & y' &= b\sin\varphi, \\ x'' &= a\cos\theta, & y'' &= b\sin\theta, \\ x''' &= a\cos\psi, & y''' &= b\sin\psi; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} T'''^2 &= 2b^2(1 - \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) \\ &= 2b^2[1 - \cos(\varphi - \theta)] = 4b^2\sin^2\frac{\varphi - \theta}{2}, \end{aligned}$$

d'où il résulte qu'en valeur absolue T''' est égale à $2b\sin\frac{\varphi - \theta}{2}$.

En désignant d'une façon analogue par T' la distance tangentielle des cercles ayant M'' et M''' pour centres et orthogonaux à K, par T'' la distance tangentielle des cercles ayant M' et M''' pour centres et orthogonaux à K, on démontrerait de même que T′ et T″ sont, en valeur absolue, respectivement égales à $2b \sin \frac{\theta - \psi}{2}$ et à $2b \sin \frac{\psi - \varphi}{2}$.

D'où résulte immédiatement que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les côtés T′, T″ et T‴ a pour diamètre le diamètre $2b$ de l'ellipse.

3. Supposons, en particulier, que le cercle K ait un rayon infiniment petit et se réduise à un foyer F de l'ellipse; nous pourrons énoncer la proposition suivante:

Soient a, b, c trois points d'une ellipse ayant pour foyer le point F; *considérons les cercles* A, B, C *qui, passant par le point* F, *ont respectivement pour centres les points a, b et c.*

Soit γ la longueur comprise entre les points de contact d'une tangente extérieure commune aux deux cercles A *et* B; *désignons par α et β les longueurs analogues relatives aux tangentes communes d'une part à* B *et* C *et d'autre part à* A *et* C.

Cela posé, si l'on construit un triangle ayant pour côtés α, β et γ, le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle est égal au petit axe de l'ellipse.