Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Biehler

Sur les équations linéaires

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 356-362

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__356_0>

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. CH. BIEHLER.

[SUITE (1)].

IV.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX FONCTIONS HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ.

9. Nous allons maintenant appliquer la méthode précédente, ainsi que les résultats obtenus relativement à la théorie des équations linéaires, à l'étude d'une propriété importante des fonctions homogènes du second degré.

Considérons la fonction homogène

$$\begin{aligned} f = \;& (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n)x_1 \\ &+ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n)x_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n)x_n, \end{aligned}$$

avec la condition $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$; et cherchons la condition pour que la fonction f, qui est en général décomposable en une somme de n carrés de fonctions linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit décomposable en une somme d'un nombre moindre de carrés, p par exemple, de telle sorte que l'on ait

$$f = Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_p^2, \tag{12}$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ sont des fonctions linéaires des va-

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 311.

riables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \alpha_{1,1} x_1 + \alpha_{1,2} x_2 + \ldots + \alpha_{1,n} x_n,\\
Y_2 &= \alpha_{2,1} x_1 + \alpha_{2,2} x_2 + \ldots + \alpha_{2,n} x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y_p &= \alpha_{p,1} x_1 + \alpha_{p,2} x_2 + \ldots + \alpha_{p,n} x_n.
\end{aligned}$$

Posons, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2} f'_{x_1} = X_1, \quad \tfrac{1}{2} f'_{x_2} = X_2, \quad \ldots, \quad \tfrac{1}{2} f'_{x_n} = X_n,$$

on aura

$$\begin{aligned}
X_1 &= a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n,\\
X_2 &= a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \ldots + a_{n\,n} x_n,
\end{aligned}$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de l'équation (12), successivement par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il viendra

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha_{1,1} Y_1 + \alpha_{2,1} Y_2 + \ldots + \alpha_{p,1} Y_p,\\
X_2 &= \alpha_{1,2} Y_1 + \alpha_{2,2} Y_2 + \ldots + \alpha_{p,2} Y_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= \alpha_{1,n} Y_1 + \alpha_{2,n} Y_2 + \ldots + \alpha_{p,n} Y_p.
\end{aligned}$$

Si, dans ces identités, on remplace par zéro $n - p - 1$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il restera, dans les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, $p + 1$ de ces variables; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ seront des fonctions homogènes de $(p + 1)$ variables, que nous désignerons par $Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_p$; par suite, les équations $Y'_1 = 0$, $Y'_2 = 0, \ldots, Y'_p = 0$ formeront un système de p équations homogènes à $p + 1$ variables, et elles admettront une infinité de solutions, d'après ce qui a été démontré (III); il existe donc une infinité de manières d'annuler les fonctions $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ (nous désignons ainsi les fonctions qui proviennent de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ quand on a remplacé par zéro les $n - p - 1$ variables dont il a été question).

Si l'on considère $p+1$ des équations $X'_1 = 0, X'_2 = 0, \ldots, X'_n = 0$, ces équations formant un système de $p+1$ équations homogènes à $p+1$ inconnues qui admet pour ces inconnues des valeurs différentes de zéro, le déterminant d'ordre $p+1$ des coefficients des inconnues est donc nul.

On voit donc que, en égalant à zéro successivement les variables qui entrent dans toutes les combinaisons possibles de $n-p-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et en formant tous les systèmes possibles de $p+1$ équations au moyen des équations analogues à $X'_1 = 0$, $X'_2 = 0, \ldots, X'_n = 0$, on ferait voir que tous les déterminants mineurs d'ordre $p+1$ du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

sont nuls, et par suite aussi tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à $p+1$. Δ est l'invariant de la fonction f. On a donc cette proposition :

Si une fonction homogène f du second degré de n variables est réductible à une somme de p carrés ($p < n$), l'invariant Δ de cette fonction ainsi que tous les déterminants mineurs de Δ jusqu'à l'ordre $p+1$ inclusivement sont nuls.

Inversement, si l'invariant Δ de la fonction f est nul, ainsi que tous les mineurs de Δ jusqu'à l'ordre $p+1$, et qu'un mineur d'ordre p de Δ ne soit pas nul, la fonction f sera réductible à une somme de p carrés de fonctions linéaires des n variables qui entrent dans f, et elle ne sera pas réductible à un nombre moindre de carrés.

Supposons, pour fixer les idées, que le déterminant d'ordre p,

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \cdot & a_{1,\lambda} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \cdot & a_{2,\lambda} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot \\ a_{p\alpha} & a_{p\beta} & & a_{p\lambda} \end{vmatrix},$$

soit différent de zéro, et considérons le déterminant d'ordre $p+1$, mineur de Δ,

$$(\gamma)\qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & & a_{1\lambda} & a_{1\mu} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & & a_{2\lambda} & a_{2,\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ a_{p\alpha} & a_{p\beta} & & a_{p\lambda} & a_{p,\mu} \\ a_{p+\nu\,\alpha} & a_{p+\nu\,\beta} & \cdot & a_{p+\nu\,\lambda} & a_{p+\nu\,\mu} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est nul par hypothèse, ainsi que le suivant,

$$(\gamma')\qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & & a_{1\lambda} & X_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \cdot & a_{2\lambda} & X_2 \\ \cdot\ \cdot & & & \cdot & \\ a_{p\alpha} & a_{p\beta} & & a_{p\lambda} & X_p \\ a_{p+\nu\,\alpha} & a_{p+\nu\,\beta} & & a_{p+\nu\,\lambda} & X_{p+\nu} \end{vmatrix},$$

qui lui est identique.

On en déduit, en faisant sur les rangées de (γ) l'opération faite précédemment sur les colonnes de (γ),

$$(\gamma'')\qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & & a_{1\lambda} & X_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & & a_{2\lambda} & X_2 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{p\alpha} & a_{p\beta} & & a_{p\lambda} & X_p \\ U_\alpha & U_\beta & & U_\lambda & \Phi \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} U_\alpha &= X_\alpha - a_{p+1\,\alpha}x_{p+1} - a_{p+2\,\alpha}x_{p+2} - \ldots - a_{n\,\alpha}x_n, \\ U_\beta &= X_\beta - a_{p+1\,\alpha}x_{p+1} - a_{p+2\,\beta}x_{p+2} - \ldots - a_{n\,\beta}x_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot, \\ U_\lambda &= X_\lambda - a_{p+1,\lambda}x_{p+1} - a_{p+2\,\lambda}x_{p+2} - \ldots - a_{n\,\lambda}x_n, \\ \Phi &= f - X_{p+1}x_{p+1} - X_{p+2}x_{p+2} - \ldots - X_n x_n \end{aligned}$$

Les déterminants de la forme (γ') étant tous nuls, on voit qu'en décomposant (γ'') en une somme de déterminants d'ordre $p+1$ de la forme (γ'), l'équation (γ'') se réduit à

$$(\gamma''')\qquad \begin{vmatrix} a_{1,\alpha} & a_{1,\beta} & \dots & a_{1,\lambda} & X_1 \\ a_{2,\alpha} & a_{2,\beta} & \dots & a_{2,\lambda} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,\alpha} & a_{p,\beta} & \dots & a_{p,\lambda} & X_p \\ X_\alpha & X_\beta & \dots & X_\lambda & f \end{vmatrix} = 0;$$

les fonctions $X_\alpha, X_\beta, \dots, X_\lambda$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, X_2, \dots, X_p$, car le déterminant (γ') est nul; par suite, l'équation précédente nous montre que f est une fonction homogène du second degré de $X_1, X_2, \dots, X_p$. Cette fonction est, comme l'on sait, décomposable en une somme de p carrés de fonctions linéaires de $X_1, X_2, \dots, X_p$. Je dis que ce nombre de carrés ne sera pas inférieur à p.

On aurait, en effet, dans ce cas

$$(13)\qquad f = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_{p-1}^2,$$

où $Z_1, Z_2, \dots, Z_{p-1}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $X_1, X_2, \dots, X_p$, par suite de $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \beta_{1,1}x_1 + \beta_{1,2}x_2 + \dots + \beta_{1,n}x_n, \\ Z_2 &= \beta_{2,1}x_1 + \beta_{2,2}x_2 + \dots + \beta_{2,n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Z_{p-1} &= \beta_{p-1,1}x_1 + \beta_{p-1,2}x_2 + \dots + \beta_{p-1,n}x_n, \end{aligned}$$

et, en prenant les dérivées des deux membres de l'identité (13), il viendra

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_{1,1}Z_1 + \beta_{2,1}Z_2 + \dots + \beta_{p-1,1}Z_{p-1}, \\ X_2 &= \beta_{1,2}Z_1 + \beta_{2,2}Z_2 + \dots + \beta_{p-1,2}Z_{p-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_n &= \beta_{1,n}Z_1 + \beta_{2,n}Z_2 + \dots + \beta_{p-1,n}Z_{p-1}. \end{aligned}$$

En donnant à $n-p$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la valeur zéro, $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p-1}$ deviennent des fonctions de p variables que nous désignerons par X'_1, $X'_2, \ldots, X'_n$, Z'_1, $Z'_2, \ldots, Z'_{p-1}$. Les équations $Z'_1 = 0$, $Z'_2 = 0, \ldots, Z'_{p-1} = 0$, homogènes à p variables, admettent une infinité de solutions ; par suite, $X'_1 = 0$, $X'_2 = 0, \ldots$, $X'_n = 0$ admettent aussi une infinité de solutions; on en conclut, de la même manière que précédemment, que tous les déterminants mineurs d'ordre p de Δ sont nuls. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse que nous avons faite, à savoir qu'un déterminant d'ordre p de Δ est différent de zéro; par conséquent, la fonction f n'est pas réductible à $p-1$ carrés.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on désigne par Δ l'invariant d'une fonction homogène du second degré, et s'il existe un déterminant mineur de Δ d'ordre p qui ne soit pas nul, les déterminants mineurs de Δ d'ordre supérieur à p étant tous nuls, la fonction homogène f sera réductible à une somme de p carrés, et ce nombre p représente le nombre minimum de carrés auxquels la fonction f est réductible.*

Ce théorème nous donne aussi les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction f, homogène et du second degré, des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit décomposable en un produit de facteurs linéaires en x_1, $x_2, \ldots, x_n$, savoir

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n).$$

Il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que tous les déterminants mineurs du troisième ordre de l'invariant Δ de f soient nuls, sans que les mineurs du deuxième ordre soient tous nuls.

Le théorème précédent montre encore que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction f soit le carré d'une fonction linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'obtiennent en égalant à zéro tous les mineurs du deuxième ordre de Δ.