Chéfik-Bey

Solution des exercices sur le tétraèdre proposés par M. Genty

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 403-411

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__403_1>

SOLUTION DES EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE PROPOSÉS PAR M. GENTY

(voir 2e série, t. XVII, p 223);

PAR M. CHÉFIK-BEY (DU CAIRE).

1. *Si dans un tétraèdre les arêtes opposées sont égales, on peut dire que ce tétraèdre est isoscèle. Les quatre faces d'un pareil tétraèdre sont égales.*

En effet, soit SABC le tétraèdre. Je dis que, par exemple, la face SAB est égale à la face ABC. En effet, AB est commun, AC = SB et BC = SA d'après l'hypothèse.

2. *Soient a, b, c les côtés de l'un de ces triangles, A, B, C les angles. Soient de plus α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b, c aux milieux des côtés opposés du tétraèdre. On a*

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = c^2,$$

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = b^2,$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = a^2.$$

Désignons par M et N les milieux de SB et de AC ;

MN est une médiane du triangle AMC, et l'on a

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = \beta^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{MC}}^2 - \frac{1}{2}b^2\right).$$

Or

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2\right),$$

$$\overline{\mathrm{MC}}^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{1}{2}b^2\right),$$

donc

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

On trouverait de même α^2 et γ^2.

Ajoutant deux à deux α^2, β^2 et γ^2, on trouve

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad b^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

C. Q. F. D.

3. *Les médianes sont en même temps les plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre, et forment un trièdre trirectangle.*

Des valeurs de AM et MC il résulte que le triangle AMC est isoscèle; MN est donc perpendiculaire sur AC. On verrait de même que MN est perpendiculaire sur SB; donc MN est la plus courte distance de AC et de SB.

Soient P et Q les milieux de SC et AB. On voit que

$$\mathrm{MP} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = \frac{1}{2}\mathrm{AS} = \mathrm{MQ} = \mathrm{PN} = \mathrm{QN},$$

et MP est parallèle à QN. Par conséquent, MPNQ est un losange, et MN, PQ se coupent à angle droit.

On démontrerait de la même manière, en désignant par V, R les milieux de SA, BC, que VR et PQ sont perpendiculaires, ainsi que MN et VR. Donc les médianes forment un trièdre trirectangle.

4. *Les angles dièdres opposés du tétraèdre sont égaux deux à deux, et, si* φ, ψ, θ *sont les angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés* a, b, c, *on a*

$$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin\psi}{b} = \frac{\sin\theta}{c},$$

et par suite

$$\frac{\sin\varphi}{\sin A} = \frac{\sin\psi}{\sin B} = \frac{\sin\theta}{\sin C}.$$

Je mène par AC, SB les plans AKC et SLB, perpendiculaires à SB et AC. Les triangles ACK, SLB sont égaux; cela résulte de l'égalité des triangles SCB, SAC et des côtés SB et AC. Les angles K et L qui mesurent les dièdres SB et AC sont donc égaux.

Par le sommet S, je mène des plans perpendiculaires aux arêtes opposées. Soient G le point où leur intersection perce la base ABC et D, E, F les points où ils coupent les arêtes BC, AB, AC.

On a

$$SG = SD \sin SDG \quad \text{et} \quad SG = SE \sin SEG.$$

Mais

$$SD = SB \sin SBC, \quad SE = SB \sin SBA;$$

donc

$$\sin SBC \sin SDG = \sin SEG \sin SBA$$

ou

$$\sin C \sin\varphi = \sin A \sin\theta,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin\varphi}{\sin A} = \frac{\sin\theta}{\sin C} = \frac{\sin\psi}{\sin B}.$$

Or

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c};$$

donc

$$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin\theta}{c} = \frac{\sin\psi}{b}.$$

C. Q. F. D.

5. *Si* V *est le volume du tétraèdre, on a*

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3};$$

on a aussi

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

Je construis sur les arêtes SA, SB, SC un parallélépipède; son volume sera donné par la formule connue

$$V = 2abc\sqrt{\sin\frac{A+B+C}{2}\cdot\sin\frac{A+B-C}{2}\cdot\sin\frac{A+C-B}{2}\cdot\sin\frac{B+C-A}{2}}.$$

Si l'on remarque que le tétraèdre est le sixième de ce solide et que $A + B + C = 180^\circ$, on trouve, tout calcul fait,

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

C. Q. F. D.

Si nous remplaçons dans cette expression $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ par $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ et $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, il vient, en tenant compte des formules du n° 2,

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.$$

C. Q. F. D.

6. *Si* S *est l'aire d'une des faces du tétraèdre, on a*

$$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{2},$$

et on a donc

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4}.$$

On sait que

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)},$$

qui devient, en élevant au carré,

$$16S^2 = [(a+c)^2 - b^2][2ac - (a^2+c^2-b^2)],$$

et, effectuant les calculs dans le premier crochet, on trouve

$$16S^2 = 4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2$$

ou bien

$$4S^2 = (\alpha^2+\beta^2)(\beta^2+\gamma^2) - \beta^4,$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2}}{2}.$$

C. Q. F. D.

Égalant la première valeur de S et celle-ci, on obtient

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2 = \frac{(a+b+c)(a-b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4}.$$

C. Q. F. D.

7. *Le point d'intersection des médianes, qui est le centre de gravité du tétraèdre, est en même temps le centre des sphères inscrite et circonscrite.*

Soit H le centre de gravité du triangle ABC. Joignons SH. Je dis que cette droite rencontre MN au point O et que $OH = \frac{1}{4}$ SH, ce qui veut dire que O est le centre de gravité de SABC.

En effet, menons de M une parallèle à SH; soit I son point de rencontre avec NHB. Nous aurons BI $=$ IH et par conséquent $=$ NH.

Donc

$$MO = NO. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a de même

$$MI = \frac{1}{2} SH \quad \text{et} \quad OH = \frac{1}{2} MI,$$

par conséquent,

$$OH = \frac{1}{4} AH.$$

Le point O est donc bien le centre de gravité de la pyramide. C. Q. F. D.

On a vu que

$$MA = MC \quad \text{et} \quad NA = NC;$$

il en résulte

$$OA = OC.$$

De même,

$$OS = OB.$$

Donc O est le centre de la sphère circonscrite.

C. Q. F. D.

Soient K et T les projections de O sur les faces ABC, SBC; elles sont les centres des cercles circonscrits à ces deux faces; par suite, KQ, TP sont perpendiculaires sur AB et SC, et l'on a

$$KQ = TP.$$

Mais

$$OQ = OP;$$

les triangles rectangles OKQ, OTP sont donc égaux; dès lors

$$OK = OT.$$

Le point O est donc également distant des quatre faces du tétraèdre. C. Q. F. D.

On a, pour le rayon de la sphère circonscrite,

$$r^2 = \overline{OC}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{CN}^2.$$

Mais

$$ON = \frac{1}{2} a, \quad \text{et} \quad CN = \frac{1}{2} b,$$

donc

$$r^2 = \frac{\beta^2 + b^2}{4},$$

ou, en remplaçant b^2 par $\alpha^2 + \gamma^2$,

$$r^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}.$$

Remplaçant b^2 par $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$, il vient

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

De même, pour le rayon de la sphère inscrite,

$$R^2 = \overline{OK}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{KC}^2;$$

KC étant le rayon du cercle circonscrit à ABC, on a

$$KC = \frac{abc}{4S},$$

et par suite

$$R^2 = r^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{16 S^2},$$

ou bien

$$R^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 \gamma^2)}{4(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)},$$

et, réduisant,

$$R^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{4(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)}.$$

On tire des formules du n° 5

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C,$$

et, en vertu de cette égalité et de la deuxième du n° 6, la dernière formule devient

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C}{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}.$$

8. *Tous les angles plans d'un tétraèdre isoscèle sont nécessairement aigus.*

Cela résulte de la formule

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

9. *Si l'on désigne par* P *la puissance d'un sommet du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite, on a*

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \\ &= \frac{(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)}. \end{aligned}$$

Je considère le sommet S; sa puissance par rapport à la sphère inscrite est

$$P = \overline{SO}^2 - R^2$$

ou

$$P = r^2 - R^2,$$

qui devient, en vertu des valeurs précédentes,

$$P = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2)}{4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)}.$$

C. Q. F. D.

En transformant cette expression au moyen des formules des n^{os} 2 et 6, on trouve

$$P = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}.$$

C. Q. F. D.

Remarques. — I. La première formule du n° 4 est un cas particulier du théorème suivant :

Dans tout tétraèdre, le rapport des produits des arêtes opposées est égal à celui des produits des sinus des dièdres correspondants.

II. En divisant membre à membre les égalités

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3},$$

$$S = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}}{2},$$

et en désignant par h la hauteur du tétraèdre, on trouve

$$h = 4R.$$

Il en résulte que la droite SOH est la hauteur du tétraèdre.

Note. — Solutions analogues de MM. J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger; P. Barbarin, professeur au lycée de Nice; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin, et J. Chambon, à Vierzon.