NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE ROUCHÉ

Sur la machine pneumatique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 42-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__42_1>

SUR LA MACHINE PNEUMATIQUE;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

Il s'agit de calculer la loi de décroissement de la force élastique de l'air contenu dans le récipient d'une machine pneumatique, en tenant compte de l'espace nuisible.

Soient

V le volume du récipient et des conduits;
v celui du corps de pompe quand le piston est au haut de sa course;
u le volume de l'espace nuisible:

H la pression atmosphérique ;
H_0 la pression initiale dans le récipient ;
H_k. en général, la pression après le k^{ieme} coup de piston.

Quand le piston est au bas de sa course, après le $(k-1)^{\text{ième}}$ coup, l'air occupe à la fois le volume V sous la pression H_{k-1} et le volume u sous la pression H ; lorsque le piston est soulevé, le mélange de ces deux masses d'air occupe le volume $V+v$ sous la pression H_k ; la loi du mélange des gaz donne donc la formule

$$(1) \qquad (V+v)H_k = VH_{k-1} + uH.$$

Cette relation n'est pas simple, et c'est ce qui explique le calcul assez lourd et peu accessible aux commençants au moyen duquel on en déduit l'expression générale de H_n.

Mais, si l'on pose

$$(2) \qquad H_k - \frac{u}{v}H = \varepsilon_k,$$

la relation (1) prend la forme expressive

$$(3) \qquad \varepsilon_k = \frac{V}{V+v}\,\varepsilon_{k-1}.$$

On voit que l'on obtient chaque quantité ε de la précédente en la multipliant par $\frac{V}{V+v}$, et, par suite, qu'en faisant successivement $k = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$(4) \qquad \varepsilon_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \varepsilon_0.$$

C'est la formule connue

$$H_n - \frac{u}{v}H = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \left(H_0 - \frac{u}{v}H\right).$$

Ajoutons qu'il est logique de substituer les quantités ε_k

aux quantités H_k. En effet, dès qu'on a expliqué le jeu de la machine, on montre habituellement, par un raisonnement fort simple, que la force élastique de l'air du récipient ne saurait, à cause de l'espace nuisible, devenir inférieure à $\frac{u}{v}$ H, et le calcul de H_n, que l'on fait après, est surtout destiné à prouver que cette force élastique limite $\frac{u}{v}$ H exigerait, pour être atteinte, un nombre infini de coups de piston. Quoi de plus naturel alors que de chercher, au lieu de H_n, son excès sur la pression limite, et par suite de substituer à la relation (1) entre deux forces élastiques consécutives H_{k-1} et H_k la relation (2) entre deux excès consécutifs ε_{k-1} et ε_k? Ce choix, ainsi indiqué, est justifié après coup par la simplicité de la relation (3), qui est aisée à retenir et qui conduit à un calcul déjà fait, puisque le rapport de deux excès consécutifs a la même valeur que le rapport de deux pressions consécutives dans le cas déjà considéré, où l'on fait abstraction de l'espace nuisible.

Des observations analogues s'appliquent au calcul relatif à la machine de compression.