A. LEINEKUGEL

Questions proposées au concours d'admission à l'École spéciale militaire (1879)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 513-517

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__513_1>

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1879);

SOLUTION DE M. A. LEINEKUGEL,
Étudiant en Mathématiques.

I. *Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont les surfaces égales et les volumes égaux. La hauteur est donnée, et l'on demande de calculer les rayons des bases.*

Soient h la hauteur donnée, x et y les rayons des bases du cylindre et du cône; les équations du problème sont

$$(1) \qquad 2\pi x^2 + 2\pi h x = \pi y^2 + \pi y\sqrt{h^2+y^2},$$

$$(2) \qquad \pi x^2 h = \frac{\pi y^2 h}{3}.$$

De la dernière on tire

$$y = x\sqrt{3},$$

et la première devient, en remplaçant y par $x\sqrt{3}$, et supprimant la solution $x = 0$, qui correspond au cas particulier où le cylindre et le cône se réduisent à la hauteur donnée h,

$$(3) \qquad 2h - x = \sqrt{3}\sqrt{h^2 + 3x^2},$$

d'où, en élevant au carré,

$$8x^2 + 4hx - h^2 = 0,$$

équation qui donne

$$x_1 = \frac{h(\sqrt{3} - 1)}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{h(\sqrt{3} + 1)}{4}.$$

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y_1 = \frac{h(3 - \sqrt{3})}{4} \quad \text{et} \quad y_2 = -\frac{h(\sqrt{3} + 3)}{4}.$$

Les valeurs x_1, y_1, qui sont positives, conviennent seules au problème; les valeurs négatives ont été introduites par l'élévation au carré de l'équation (3); prises en valeurs absolues, elles donnent la solution du problème suivant :

Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont des volumes égaux et même hauteur h; les différences entre les surfaces latérales et les surfaces des bases sont égales; calculer les rayons des bases.

II. *Dans un triangle* ABC *on donne les côtés* AB *et* AC, *et l'on sait que la base* BC *est égale à la hauteur : on demande de calculer l'angle* A.

Soient a, b, c les côtés du triangle. La base BC ou a

étant supposée égale à la hauteur qui lui correspond, le double de l'aire du triangle aura pour valeur a^2; la même surface a pour expression $bc \sin A$; donc $bc \sin A = a^2$, ou, parce que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, on aura

$$bc \sin A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$(1) \qquad \sin A + 2 \cos A = \frac{b^2 + c^2}{bc}.$$

Désignons par φ un angle aigu tel que $\operatorname{tang}\varphi = 2$; en remplaçant, dans l'équation (1), 2 par $\operatorname{tang}\varphi$, ou $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, il viendra

$$\sin A \cos\varphi + \cos A \sin\varphi = \left(\frac{b^2 + c^2}{bc}\right) \cos\varphi,$$

ou

$$(2) \qquad \sin(A + \varphi) = \frac{b^2 + c^2}{bc} \cos\varphi.$$

Discussion. — $\sin(A + \varphi)$ ayant pour limites $+1$ et -1, il faut qu'on ait $\frac{(b^2 + c^2)^2}{b^2c^2} \cos^2\varphi \leqq 1$ pour que l'angle $A + \varphi$ existe.

Mais $\operatorname{tang}\varphi = 2$ donne $\cos^2\varphi = \frac{1}{5}$; d'où

$$\frac{(b^2 + c^2)^2}{b^2c^2} \cos^2\varphi = \frac{(b^2 + c^2)^2}{5b^2c^2} \leqq 1$$

et

$$(b^2 + c^2)^2 - 5b^2c^2 \leqq 0.$$

Or,

$$(b^2 + c^2)^2 - 5b^2c^2 = (b^2 + c^2 + bc\sqrt{5})(b^2 + c^2 - bc\sqrt{5});$$

on aura donc

$$b^2 + c^2 - bc\sqrt{5} \leqq 0$$

ou

$$(3) \qquad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \sqrt{5} \leqq 0.$$

En posant $\frac{b}{c} = r$. la relation (3) devient

$$r + \frac{1}{r} - \sqrt{5} \leqq 0,$$

$$r^2 - r\sqrt{5} + 1 \leqq 0;$$

d'où

$$\left[r - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right]\left[r - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right] \leqq 0;$$

par suite,

$$r \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{et} \quad r \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ce qui revient à

$$(4) \qquad \frac{\sqrt{5}+1}{2} \geqq \frac{b}{c} \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Donc, pour que le triangle ABC existe, il faudra que le rapport $\frac{b}{c}$ des deux côtés donnés soit compris entre $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou bien égal à l'une de ces deux quantités.

Dans le premier cas, l'équation (2)

$$\sin(A + \varphi) = \left(\frac{b^2 + c^2}{bc}\right)\cos\varphi$$

donnera généralement pour l'angle A deux valeurs positives moindres chacune que 180°.

En effet, désignons par α le plus petit des angles ayant pour sinus $\frac{b^2+c^2}{bc}\cos\varphi$; l'angle φ étant aigu, $\cos\varphi$ est positif, et il en est de même de $\frac{b^2+c^2}{bc}\cos\varphi$; ainsi α est, comme φ, un angle aigu. En outre, en supposant les côtés donnés b, c inégaux, on aura $\alpha > \varphi$, parce que de l'inégalité $b \gtrless c$ résulte $\frac{b^2 + c^2}{bc} > 2$, d'où

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos\varphi > 2 \cos\varphi, \quad \sin\alpha > \operatorname{tang}\varphi \cos\varphi, \quad \sin\alpha > \sin\varphi.$$

Or, d'après les formules générales des angles ayant pour sinus $\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos\varphi$, on a

$$A + \varphi = 2k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad A + \varphi = (2k + 1)\pi - \alpha,$$
$$A = 2k\pi + \alpha - \varphi, \quad A = (2k + 1)\pi - \alpha - \varphi,$$

et, en faisant $k = 0$,

$$A = \alpha - \varphi \quad \text{et} \quad A = \pi - (\alpha + \varphi),$$

valeurs positives et moindres que 180°.