NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1881.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES AU LYCÉE FONTANES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VINGTIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,

ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1881.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR LE CALCUL DES DÉRANGEMENTS;

PAR M. C. HENRY.

Lorsque, dans une permutation rectiligne des n premiers nombres, un nombre quelconque précède un autre nombre plus petit que lui, on dit qu'il y a *dérangement*.

Importante dans la théorie des déterminants, la considération des dérangements vient de trouver une nouvelle source d'actualité dans le jeu du *Taquin,* dont le problème bien connu consiste à replacer dans l'ordre numérique naturel, sur un carré de seize cases, quinze pions placés dans un ordre quelconque. Les résultats démontrés sont, comme on sait (1), les suivants : sur le nombre des permutations, la moitié peut être rangée

Fig. 1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Fig. 2.

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
	15	14	13

dans l'ordre indiqué *fig.* 1, l'autre moitié dans l'ordre indiqué *fig.* 2.

(1) Voyez notre article de la *Gazette anecdotique* (15 août 1880).

Il nous a paru intéressant de donner à ce propos une solution du problème suivant, qui a été proposé par M. Joseph Bertrand (¹):

Combien y a-t-il en tout de dérangements dans le tableau des permutations des n premiers nombres ?

Désignant ce nombre total par D_n, on a évidemment

$$D_1 = 0.$$

Les permutations des deux premiers nombres sont 12, 21. La première n'offre pas de dérangement; la seconde en offre un; donc

$$D_2 = 1.$$

Pour calculer D_3, écrivons trois fois les permutations des deux premiers nombres. Mettons un point à la suite de chacune des deux permutations et faisons-le avancer successivement :

12.	21.
1.2	2.1
.12	.21

Remplaçons le point par le chiffre 3. Si nous mettons ce chiffre à la fin de la permutation, il n'y a pas de dérangement. Lorsque nous le mettons au deuxième rang, nous introduisons un dérangement et un seul. Lorsque le chiffre 3 arrive au premier rang, nous introduisons deux dérangements. Donc, en désignant généralement par P_n le nombre des permutations de n nombres, nous obtenons $0 + 1 + 2$ dérangements pour trois permutations de deux nombres, ou $3P_2$, et, en ajoutant les dérangements provenant du tableau des permutations

(¹) *Traité d'Algèbre*, 1ʳᵉ édition, p. 146; IIᵉ Partie, 6ᵉ édition, p. 53.

des deux premiers nombres, ou $3D_2$, nous avons

$$D_3 = 3D_2 + (1 + 2)P_2.$$

Pour calculer D_4, supposons formé le tableau des permutations des trois premiers nombres. Écrivons-le quatre fois, en intercalant un point, comme précédemment. Le nombre des dérangements, D_3, sera quatre fois dans le tableau : $4D_3$. Au lieu du point écrivons le chiffre 4. Quand le point est à la fin, point de dérangement; quand il est au troisième rang, nous introduisons un dérangement; quand il est au deuxième rang, nous introduisons deux dérangements; quand il est au premier rang, nous introduisons trois dérangements. En somme, nous introduisons pour six permutations de trois nombres, ou $(1 + 2 + 3)P_3$, $0 + 1 + 2 + 3$ dérangements, et, en ajoutant $4D_3$, nous avons

$$D_4 = 4D_3 + (1 + 2 + 3)P_3.$$

De même,

$$D_5 = 5D_4 + (1 + 2 + 3 + 4)P_4.$$

Généralement,

$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)P_n$$

ou

$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + \frac{n(n + 1)}{2}P_n.$$

En divisant cette dernière équation par $(n + 1)P_n = P_{n+1}$, il vient

$$\frac{D_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{D_n}{P_n} + \frac{n}{2},$$

et, en remplaçant successivement dans cette formule n

par 1, 2, 3, ...,

$$\frac{D_2}{P_2} = \frac{D_1}{P_1} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{D_3}{P_3} = \frac{D_2}{P_2} + \frac{2}{2},$$

$$\frac{D_4}{P_4} = \frac{D_3}{P_3} + \frac{3}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{D_n}{P_n} = \frac{D_{n-1}}{P_{n-1}} + \frac{n-1}{2}.$$

Si nous additionnons membre à membre ces différentes équations, il vient, puisque $D_1 = 0$,

$$\frac{D_n}{P_n} = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)}{2}$$

ou

$$D_n = \frac{P_n[n(n-1)]}{4} = \frac{P_n C_n^2}{2}.$$

Ainsi, *le nombre total des dérangements est égal à la moitié du produit du nombre des permutations par le nombre des combinaisons des n nombres deux à deux.*

Autre démonstration. — Considérons une permutation quelconque P_n; écrivons à côté la permutation renversée : à un dérangement de la première dans une combinaison de deux nombres correspond un non-dérangement de la seconde. Donc, si l'on écrit le tableau des permutations de n nombres, puis à côté le tableau des permutations dans l'ordre renversé, le nombre des dérangements dans le premier tableau est égal au nombre des non-dérangements du second, et réciproquement. Mais, dans chacune des permutations du premier et du second tableau, le nombre des dérangements et des non-dérangements est égal au nombre des combinaisons de n objets pris deux à deux, ou C_n^2; par suite, le nombre total des dérangements ou des non-dérangements est égal à $P_n C_n^2$. Mais le nombre des dérangements de l'un égale le nombre des non-dérangements de l'autre, et inversement; donc

$$D_n = \frac{P_n C_n^2}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SUR LA DÉFORMATION DU CACHE-POT;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le cache-pot est formé de fils de fer ou de baguettes rectilignes articulées en chacun de leurs points de rencontre. Il présente la forme générale d'un hyperboloïde à une nappe; les baguettes sont des génératrices rectilignes de chacun des deux systèmes.

M. Cayley a démontré que, si l'on déforme ce modèle d'hyperboloïde, on obtient un hyperboloïde homofocal au premier, en superposant les directions des axes. En effet, soit l'hyperboloïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

considérons deux points P et Q de cet hyperboloïde et désignons leurs coordonnées par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2. Posons

$$x_1 = a\alpha_1, \quad y_1 = b\beta_1, \quad z_1 = c\gamma_1,$$
$$x_2 = a\alpha_2, \quad y_2 = b\beta_2, \quad z_2 = c\gamma_2;$$

nous aurons les équations

$$(1) \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1,$$
$$(2) \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1.$$

De plus, si les deux points P et Q sont sur une même génératrice, en exprimant que le plan tangent en P contient le point Q, on aura

$$(3)\qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2=1.$$

La distance δ des points P et Q est fournie par l'expression

$$\delta^2=a^2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+b^2(\beta_1^2-\beta_2^2)+c^2(\gamma_1^2-\gamma_2^2).$$

Considérons un second hyperboloïde ayant même centre, mêmes directions d'axes que le premier, et pour longueurs de ses axes des quantités a', b', c' telles que

$$a'^2-a^2=b'^2-b^2=c^2-c'^2=\lambda.$$

Désignons par P′ et Q′ les points correspondant à P et Q, c'est-à-dire ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x'_1&=a'\alpha_1, & y'_1&=b'\beta_1, & z'_1&=c'\gamma_1,\\ x'_2&=a'\alpha_2, & y'_2&=b'\beta_2, & z'_2&=c'\gamma_2.\end{aligned}$$

La relation (3) étant vérifiée, les points P′ et Q′ appartiennent à la même génératrice; de plus, en désignant par δ' la distance P′Q′, nous aurons

$$\delta'^2=a'^2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+b'^2(\beta_1^2-\beta_2^2)+c'^2(\gamma_1^2-\gamma_2^2).$$

Par suite,

$$\frac{\delta'^2-\delta^2}{\lambda}=(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+(\beta_1^2-\beta_2^2)-(\gamma_1^2-\gamma_2^2).$$

Mais, en retranchant (2) de (1), on voit que le second membre de la relation précédente est nul; donc P′Q′ = PQ.

Donc, si l'on considère sur le premier hyperboloïde un quadrilatère PQRS et sur le second hyperboloïde, obtenu par la déformation du premier, le quadrilatère P′Q′R′S′, formé par les points P′, Q′, R′, S′ correspondant à P, Q, R, S, ce quadrilatère est tel que

$$P'Q' = PQ, \quad Q'R' = QR, \quad R'S' = RS, \quad S'P' = SP.$$

Il en résulte que tout quadrilatère gauche PQRS peut se déformer sans changer la longueur des côtés suivant le quadrilatère correspondant de l'hyperboloïde homofocal.

C. Q. F. D.

CONSTRUCTION DE LA PARABOLE OSCULATRICE EN UN POINT D'UNE COURBE;

PAR M. G. KOENIGS,
Élève à l'École Normale supérieure.

Je m'appuierai sur le théorème suivant, qui est bien connu :

Le rayon de courbure dans la parabole est égal au double du segment compté sur la normale à partir de son pied jusqu'au point où elle rencontre la directrice.

Soient M un point d'une courbe, MT la tangente et C le centre de courbure ; menons une corde mn parallèle à la tangente et rencontrant la courbe aux points m et n, voisins du point M ; considérons la parabole effective qui passe par les points m et n, et qui est tangente en M à MT. I désignant le milieu de mn, MI est le diamètre de cette parabole conjugué de la direction de cordes MT. Cela posé, faisons tendre mn vers MT, la parabole tend à se confondre avec la parabole osculatrice, et MI tend vers la tangente MP au point M à la courbe lieu du point I. Ainsi :

Le diamètre de la parabole osculatrice en M, *conjugué de la tangente* MT, *est la tangente au point* M *à* *la courbe lieu des points milieux des cordes parallèles à* MT.

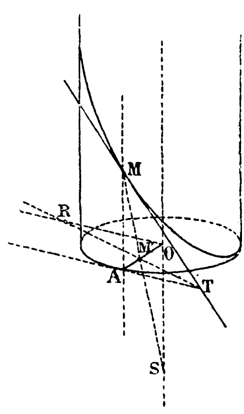
D'ailleurs, si, sur la normale et en sens inverse de MC, nous portons une longueur $MD = \frac{1}{2}MC$, nous obtenons en D un point de la directrice : la perpendiculaire DH abaissée sur MP est donc cette directrice.

On aura le foyer F en cherchant sur le cercle de centre M et tangent à DH un point tel que les angles CMP et CMF soient égaux.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE D'UNE QUESTION PROPOSÉE EN 1879 AU CONCOURS D'AGRÉGATION POUR L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL;

PAR M. LÉONCE LEBRUN,
Élève au Prytanée militaire de La Flèche.

Trouver la perspective d'une hélice, le tableau étan



perpendiculaire à son axe et le point de vue S *étant sur cet axe.*

La perspective d'un point M se trouve sur le rayon visuel MS, dans le plan du tableau et dans le plan diamétral du cylindre passant par M. Ce sera donc M'.

La tangente à la courbe perspective sera l'intersection du plan du tableau avec le plan tangent au cône le long de la génératrice MS. Cette tangente en M' passe donc par la trace de la tangente à l'hélice en M sur le plan du tableau. Ce sera donc M'T.

Joignons M'T et prolongeons jusqu'à la rencontre avec la parallèle à AT menée par O, c'est-à-dire jusqu'en R ; je vais démontrer que OR = const.

Les deux triangles M'OR et M'AT sont semblables et donnent

$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{AM'}}.$$

Les deux triangles M'AM et M'OS donnent de même

$$\frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{AM'}} = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{AM}}.$$

Donc

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OS}\,\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{AM}}.$$

Mais, puisque M est un point de l'hélice,

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{AM}} = \text{const.};$$

donc OR est constant.

Mais remarquons que OR est la sous-tangente de la perspective de l'hélice au point M' si O est le pôle, car R est le point de rencontre de la tangente avec la perpendiculaire au rayon vecteur menée par O.

La perspective est donc une courbe telle que sa sous-tangente est constante : c'est donc une spirale d'Archimède.

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE EN 1876 AU CONCOURS ENTRE LES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DE L'ACADÉMIE DE DOUAI ;

PAR M. A. HILAIRE,

Professeur au lycée de Douai.

A, B, C, D *étant les pieds des quatre normales à une ellipse donnée, issues d'un même point* P, *on suppose que le point* P *se déplace de manière que la corde* AB *conserve une direction constante, et on demande le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles* ABC *et* ABD.

Soient $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse donnée, $y - mx - n = 0$ l'équation de la droite AB dans une de ses positions; la droite CD, si elle était indépendante de AB, aurait une équation de la forme $px + qy + r = 0$, et, en admettant que p, q, r contiennent implicitement un même facteur indéterminé, l'équation

$$(1)\quad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + (y - mx - n)(px + qy + r) = 0$$

représenterait une conique *quelconque* passant par les quatre points A, B, C, D. Pour avoir l'équation véritable de CD, j'exprime que la conique (1) se confond avec l'hyperbole équilatère qui doit contenir les pieds des quatre normales : il suffit d'écrire que dans l'équation (1) les coefficients de x^2 et de y^2 sont nuls, ainsi que le terme indépendant.

J'ai ainsi

$$a^2 + q = 0, \quad \text{d'où} \quad q = -a^2,$$

$$b^2 - mp = 0, \qquad p = \frac{b^2}{m},$$

$$a^2b^2 + nr = 0, \qquad r = -\frac{a^2b^2}{n}.$$

L'équation de CD est donc

$$\frac{b^2}{m}x - a^2y - \frac{a^2b^2}{n} = 0.$$

C′ et D′ étant les points symétriques de C et D par rapport au centre de l'ellipse, la figure CDC′D′ est un parallélogramme concentrique à l'ellipse, et, d'après le théorème de Joachimsthal, les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD passent respectivement par les points D′ et C′.

Or il est facile d'avoir l'équation du système des parallèles CD′, DC′.

En effet, l'équation du système des parallèles CD, C′D′ étant évidemment

$$\left(\frac{b^2}{m}x - a^2y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2} = 0,$$

l'équation générale des coniques passant par les points de rencontre de l'ellipse et de ce premier système est

$$(2)\quad \lambda(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) - \left[\left(\frac{b^2}{m}x - a^2y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2}\right] = 0.$$

J'écris la condition pour avoir une conique du genre parabole :

$$\frac{a^4b^4}{m^2} + (a^4 - \lambda a^2)\left(\lambda b^2 - \frac{b^4}{m^2}\right) = 0$$

ou

$$-\lambda^2a^2b^2 + \lambda\left(a^4b^2 + \frac{a^2b^4}{m^2}\right) = 0.$$

Cette condition se dédouble en $\lambda = 0$, qui donne le système CD, C′D′, et $\lambda = a^2 + \frac{b^2}{m^2}$, qui correspond au système CD′, DC′.

On a donc, pour équation de ce dernier système,

$$\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right)(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) \\ - \left[\left(\frac{b^2}{m}x - a^2y\right)^2 - \frac{a^4b^4}{n^2}\right] = 0,$$

$$\frac{b^2a^2}{m^2}y^2 + a^2b^2x^2 + 2\frac{a^2b^2}{m}xy + \frac{a^4b^4}{n^2} - a^2b^2\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) = 0,$$

ou, en divisant tout par a^2b^2,

$$\left(\frac{y}{m} + x\right)^2 + \frac{a^2b^2}{n^2} - \left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{y}{m} + x\right)^2 - \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2b^2}{n^2}\right] = 0,$$

$$(y + mx)^2 - m^2\left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2b^2}{n^2}\right] = 0,$$

ou, en posant

$$(3) \qquad n'^2 = m^2\left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2b^2}{n^2}\right],$$

$$(y + mx)^2 - n'^2 = 0.$$

D'après cela, l'équation générale des coniques circonscrites à l'un des quadrilatères ABCD′ ou ABDC′ est

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + \mu(y - mx - n)(y + mx \pm n') = 0.$$

Cette équation représentera un cercle, puisqu'il n'y a pas de terme en xy, si $a^2 + \mu = b^2 - \mu m^2$, d'où $\mu = -\frac{c^2}{1 + m^2}$. On remplacera μ par sa valeur et l'équation ne contiendra plus que les indéterminées n et n'. Représentons-la par

$$(4) \qquad f(x, y) = 0.$$

Le centre est donné par les deux équations

$$(5) \qquad f'(x) = 0,$$

$$(6) \qquad f'(y) = 0,$$

qui contiendront aussi les indéterminées n et n'; donc, pour avoir l'équation du lieu, il n'y a qu'à éliminer n et n' entre les équations (5) et (6) et la relation (3).

L'élimination est immédiate, car les équations (5) et (6) ne contiennent n et n' qu'au premier degré.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878;

PAR M. CARLOS MICHAUX,

Élève du lycée de Douai (classe de M. Guillot).

Les droites A'OA, B'OB, C'OC *sont trois axes de coordonnées rectangulaires; on suppose* $OA' = OA = a$, $OB' = OB = b$, $OC' = OC = c$.

Déterminer : 1° *le lieu des axes de révolution des surfaces de révolution du second degré qui passent par les six points* A', A, B', B, C', C; 2° *le lieu des extrémités* D *de ces axes.*

On construira la projection du lieu du point D *sur le plan* AOB, *en supposant* $a > c > b$, *et l'on partagera la courbe en arcs tels, que chacun d'eux corresponde à des surfaces de même espèce.*

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les six points A', A, B', B, C', C est, en supposant le terme indépendant différent de zéro,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy - 1 = 0.$$

Lorsque la *surface* est de révolution, l'équation

$$\left(\frac{1}{a^2} - \mathrm{S}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \mathrm{S}\right)y^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \mathrm{S}\right)z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy = 0,$$

qui donne les plans cycliques, devient l'une des équations

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - \mathrm{S}}\,x \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - \mathrm{S}}\,y \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - \mathrm{S}}\,z\right)^2 = 0.$$

Ces équations représentent les plans principaux parallèles aux axes des surfaces considérées : les axes seront donc donnés par les équations

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \mathrm{S}}} = \frac{y}{\pm\sqrt{\frac{1}{b^2} - \mathrm{S}}} = \frac{z}{\pm\sqrt{\frac{1}{c^2} - \mathrm{S}}}$$

ou

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - \mathrm{S}} = \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - \mathrm{S}} = \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - \mathrm{S}}.$$

En éliminant la variable S, on obtiendra facilement le lieu des axes :

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

C'est un cône du second degré rapporté à ses axes et sur lequel on peut placer un trièdre trirectangle.

Les sommets se trouvant à l'intersection de l'axe et de la surface, les coordonnées de ses points doivent satisfaire aux équations

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\frac{1}{a^2}-S}=\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}-S}=\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}-S}=\frac{l^2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3S},$$

l^2 représentant le carré de la demi-longueur de l'axe.

Mais, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ étant un invariant, on a

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{l^2}+2S,$$

puisque S est l'inverse du carré du rayon du parallèle dont le plan passe par le centre.

En tenant compte de cette relation, les équations (1) deviennent

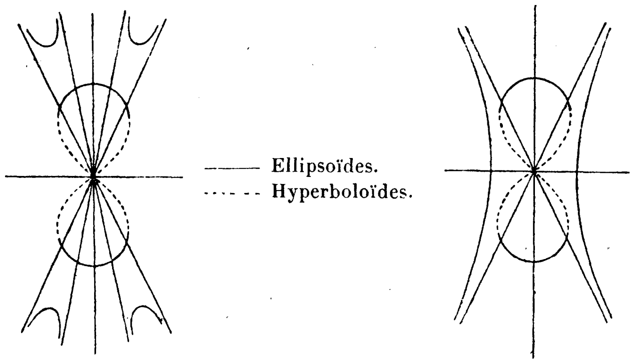
$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}-S}=\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}-S}=\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}-S}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-2S\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3S\right)}.$$

En éliminant S, on obtiendrait aisément les équations du lieu; mais il est préférable de construire immédiatement la projection sur le plan des xy, au moyen de la variable auxiliaire S.

Pour partager en arcs correspondant à des surfaces de même espèce, nous remarquons d'abord que des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à deux nappes peuvent seuls donner des points réels; nous distinguerons ces deux surfaces par le signe de S, S étant négatif pour des hyperboloïdes et positifs pour des ellipsoïdes, puisque le parallèle dont le plan passe par le centre est imaginaire dans le premier cas et réel dans le second.

On construit facilement les deux courbes que l'on obtient en supposant

$1^\circ \quad \dfrac{2}{b^2} < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2}$. $\qquad 2^\circ \quad \dfrac{2}{b^2} > \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{c^2}$.



Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879;

PAR M. J. GRIESS,
Maître répétiteur au lycée d'Alger.

On donne un hyperboloïde. Par un point P *pris dans le plan de l'ellipse de gorge on mène une parallèle à une génératrice quelconque, et l'on considère le cylindre de révolution qui aurait pour axe cette parallèle et passerait par la génératrice. Ce cylindre coupe l'hyperboloïde suivant une courbe qui se projette sur le plan horizontal suivant une courbe du troisième degré. Cette courbe du troisième degré possède un point double dont on demande le lieu.*

Soient α, β les coordonnées du point P par rapport au centre de l'hyperboloïde. L'équation de l'hyperboloïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1,$$

les équations d'une génératrice quelconque sont

$$\mathrm{G}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}=\sin\varphi-\dfrac{z}{c}\cos\varphi,\\[2ex] \dfrac{y}{b}=\cos\varphi+\dfrac{z}{c}\sin\varphi.\end{array}\right.$$

Prenons le point P pour origine; ces équations deviennent

$$\frac{(x+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y+\beta)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

$$\frac{x+\alpha}{a}=\sin\varphi-\frac{z}{c}\cos\varphi,$$

$$\frac{y+\beta}{b}=\cos\varphi+\frac{z}{c}\sin\varphi,$$

Les équations d'une parallèle menée par P sont

$$\frac{x}{a}=-\frac{z}{c}\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi.$$

ou

$$\frac{x}{-a\cos\varphi}=\frac{y}{b\sin\varphi}=\frac{z}{c}.$$

Pour former l'équation du cylindre, prenons une sphère dont le centre est l'origine

$$x^2+y^2+z^2-\rho^2=0,$$

et écrivons l'équation du cylindre circonscrit suivant le plan diamétral perpendiculaire à la génératrice. L'équation de ce plan est

$$-ax\cos\varphi+by\sin\varphi+cz=0,$$

et celle du cylindre sera

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2)(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2) \\ - (ax \cos\varphi - by \sin\varphi - cz)^2 = 0.$$

Le rayon ρ de cette sphère sera la distance du point P à la génératrice de l'hyperboloïde. Or, la distance d'un point (x, y, z) à la droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

est donnée par la formule

$$\frac{(x - az - p)^2 + (y - bz - q)^2 + [b(x - p) - a(y - q)]^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Comme P est l'origine, cette formule se réduit à

$$\frac{p^2 + q^2 + (bp - aq)^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

En mettant les équations de G sous la forme

$$x = a \sin\varphi - \alpha - \frac{a}{c}\cos\varphi . z,$$

$$y = b \cos\varphi - \beta + \frac{b}{c}\sin\varphi . z,$$

l'expression de ρ^2 sera donc

$$\rho^2 = \frac{(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2 + \left[\frac{b}{c}\sin\varphi(a \sin\varphi - \alpha) + \frac{a}{c}\cos\varphi(b \cos\varphi - \beta)\right]^2}{\frac{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}{c^2} + 1}$$

$$= \frac{c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2] + [b \sin\varphi(a \sin\varphi - \alpha) + a \cos\varphi(b \cos\varphi - \beta)]^2}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2}$$

$$= \frac{c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2] + (ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi)^2}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2}.$$

Le point double étant la projection de deux points de la courbe situés sur la même verticale, il est clair que le milieu de cette corde appartiendra aux deux plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux surfaces. Dans l'hyperboloïde, ce plan diamétral est le plan de l'ellipse de gorge. Dans le cylindre, il sera donné par l'équation $f'_z = 0$. Il est clair que dans le cas actuel l'intersection des deux plans, étant située dans le plan de projection, ira passer par le point double.

On a

$$f'_z = z(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2) \\ + 2c(ax \cos\varphi - by \sin\varphi - cz) = 0.$$

En faisant dans cette équation $z = 0$, on aura la droite cherchée : c'est

$$ax \cos\varphi = by \sin\varphi.$$

On voit qu'elle est perpendiculaire à la projection de la génératrice donnée.

Concevons maintenant qu'en tous les points de cette droite nous élevions des perpendiculaires ; quand nous arriverons au point double, la perpendiculaire correspondante rencontrera les deux surfaces en deux points communs, situés d'ailleurs symétriquement par rapport au plan des xy. Les équations aux z des points d'intersection de cette perpendiculaire avec les deux surface devront donc avoir les mêmes racines. C'est en écrivant cette condition que nous aurons le lieu.

Une perpendiculaire au plan des xy en un point de la droite

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi}$$

a pour équations

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi} = \lambda,$$

λ variant à mesure que le point se déplace sur la droite. On tire de là

$$x = b\lambda \sin\varphi, \quad y = a\lambda \cos\varphi.$$

Remplaçant x et y par ces valeurs, l'équation de l'hyperboloïde devient

$$z^2 = c^2\left[\frac{(b\lambda \sin\varphi + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(a\lambda \cos\varphi + \beta)^2}{b^2} - 1\right].$$

Portant ces mêmes valeurs dans l'équation du cylindre, il vient

$$\begin{aligned}&(b^2\lambda^2 \sin^2\varphi + a^2\lambda^2 \cos^2\varphi + z^2 - \rho^2)\\ &\quad\times(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2)\\ &\quad-(ab\lambda \sin\varphi \cos\varphi - ab\lambda \sin\varphi \cos\varphi - cz)^2 = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&z^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)\\ &\quad= \rho^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2)\\ &\qquad- \lambda^2(b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi)(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}&\rho^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2)\\ &\quad= c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta^2]\\ &\qquad+ (b\alpha \sin\varphi + a\beta \cos\varphi - ab)^2.\end{aligned}$$

Remplaçant et écrivant que les deux valeurs de z^2 sont égales, il vient

$$\begin{aligned}&c^2\left[\frac{(b\lambda \sin\varphi + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(a\lambda \cos\varphi + \beta)^2}{b^2} - 1\right]\\ &= \frac{c^2[(a \sin\varphi - \alpha)^2 + (b \cos\varphi - \beta)^2] + (a\beta \cos\varphi + b\alpha \sin\varphi - ab)^2}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\\ &\quad- \lambda^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + c^2).\end{aligned}$$

Cette équation est du deuxième degré en λ. Il semble donc que sur chaque droite d'intersection des plans diamétraux il y ait deux points doubles, ce qui est impossible dans une courbe du troisième degré.

Or, considérons le point A, projection du point P sur la projection horizontale G′ de la génératrice. Si en ce point j'élève une perpendiculaire, cette perpendiculaire rencontre la génératrice G et sa symétrique en deux points qui sont aussi situés sur le cylindre. Donc une des valeurs de λ correspond au point A et l'autre correspond au point double. Nous pouvons trouver la valeur de λ relative au point A. Ce point est, en effet, défini par les équations

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi},$$

$$\frac{(x + \alpha) \sin\varphi}{a} + \frac{(y + \beta) \cos\varphi}{b} = 1.$$

En écrivant que le point d'intersection de ces deux droites satisfait aux équations

$$\frac{x}{b \sin\varphi} = \frac{y}{a \cos\varphi} = \lambda,$$

nous aurons la valeur de λ. En éliminant x et y entre ces deux dernières et la seconde des premières, on a

$$\frac{(b\lambda \sin\varphi + \alpha) \sin\varphi}{a} + \frac{(a\lambda \cos\varphi + \beta) \cos\varphi}{b} = 1,$$

$$\lambda(b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi) = ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi,$$

$$\lambda = \frac{ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}.$$

Si donc nous retranchons cette valeur de la somme $\lambda' + \lambda''$ fournie par l'équation du second degré, il nous restera la valeur de λ relative au point double. Cette équation du second degré s'écrit

$$\frac{\lambda^2}{a^2 b^2}(a^4 b^2 \cos^2\varphi + b^4 a^2 \sin^2\varphi + b^4 c^2 \sin^2\varphi + a^4 c^2 \cos^2\varphi + a^2 b^2 c^2)$$
$$+ 2\lambda c^2 \left(\frac{b\alpha \sin\varphi}{a^2} + \frac{a\beta \cos\varphi}{b^2}\right) + \ldots.$$

La valeur cherchée est donc

$$\lambda = -\frac{2c^2(b^3\alpha \sin\varphi + a^3\beta \cos\varphi)}{a^2 b^2(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi) + c^2(a^4 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi + a^2 b^2)}$$
$$- \frac{ab - b\alpha \sin\varphi - a\beta \cos\varphi}{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}.$$

Il suffit maintenant, pour trouver l'équation du lieu, d'éliminer λ et φ entre cette équation et les équations

$$\frac{x}{b\sin\varphi} = \frac{y}{a\cos\varphi} = \lambda.$$

On tire de ces dernières

$$\frac{\frac{x}{b}}{\sin\varphi} = \frac{\frac{y}{a}}{\cos\varphi} = \lambda = \sqrt{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}} = \frac{1}{ab}\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

En posant

$$\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = k,$$

on a

$$\lambda = \frac{k}{ab}, \quad \sin\varphi = \frac{ax}{k}, \quad \cos\varphi = \frac{by}{k}.$$

En substituant dans la valeur de λ, il vient

$$\frac{k}{ab} + \frac{2c^2\left(b^3\alpha\frac{ax}{k} + a^3\beta\frac{by}{k}\right)}{\frac{a^4b^4}{k^2}(x^2+y^2) + c^2\frac{a^2b^2}{k^2}(b^2x^2 + a^2y^2) + a^2b^2c^2} + \frac{ab - b\alpha\frac{ax}{k} - a\beta\frac{by}{k}}{\frac{a^2b^2}{k^2}(x^2+y^2)} = 0.$$

Multiplions par $\frac{ab}{k}$ et divisons haut et bas par ab,

$$1 + \frac{2c^2(b^2\alpha x + a^2\beta y)}{a^2b^2(x^2+y^2) + c^2(b^2x^2 + a^2y^2) + c^2k^2} + \frac{k - \alpha x - \beta y}{x^2+y^2} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)(x^2+y^2) + 2c^2(b^2\alpha x + a^2\beta y) \\ -(\alpha x + \beta y)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \\ +(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)k = 0.\end{aligned}$$

Faisons passer k dans le second membre, élevons au carré et divisons par $(a^2b^2c^2)^2$; il vient

$$\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)(x^2+y^2)+\alpha x\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\beta y\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]^2$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2(a^2x^2+b^2y^2).$$

C'est une courbe du quatrième degré possédant un point double à l'origine.

Note. — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1879, POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE;

PAR M. J. GRIESS,
Maître répétiteur au lycée d'Alger.

Étant donné un tétraèdre OABC *défini par l'angle trièdre* O *et les longueurs* $4a$, $4b$, $4c$ *des trois arêtes* OA, OB, OC :

1° *Démontrer que l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux est tangent aux six arêtes du tétraèdre.*

2° *Trouver l'intersection de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite mobile qui s'appuie sur trois droites menées l'une par le milieu de* OA *parallèlement à* OC, *la seconde par le milieu de* OC *parallèlement à* OB *et la troisième par le milieu de* OB *parallèlement à* OA.

3° *Par chacun des points où la droite mobile perce la surface de l'ellipsoïde, on mène un plan parallèle au plan tangent en l'autre point : démontrer que ces* *deux plans passent par le centre de l'ellipsoïde et trouver le lieu de leur intersection.*

1° Soient S, P, M les milieux des arêtes OA, OB, OC et R, Q, N les milieux des arêtes BC, AC, AB (le lecteur est prié de faire la figure). Considérons l'ellipsoïde qui a pour diamètres conjugués les droites MN, PQ, RS qui se coupent en K; je dis qu'il est tangent, par exemple, à BC. En effet, le plan MPQN contient deux diamètres conjugués de RS; c'est donc son plan diamétral conjugué, et, par suite, le plan tangent en R est parallèle à MPQN. D'ailleurs, MP et QN sont parallèles à BC; BC est donc parallèle au plan diamétral conjugué de RS, et, par suite, elle est contenue dans le plan tangent en R. Donc BC est tangente à l'ellipsoïde. Remarquons que, si l'on cherche la section de cette surface par le plan ABC, ce sera une ellipse tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux.

Formons l'équation de l'ellipsoïde. Les équations des trois plans diamétraux sont :

$$\begin{aligned}
&\text{MNPQ}\ldots & cy + bz - 2bc &= 0,\\
&\text{PQRS}\ldots & bx + ay - 2ab &= 0,\\
&\text{MRSN}\ldots & cx + az - 2ac &= 0.
\end{aligned}$$

L'équation de l'ellipsoïde sera donc de la forme

$$\frac{(cy + bz - 2bc)^2}{\alpha^2} + \frac{(cx + az - 2ac)^2}{\beta^2} + \frac{(bx + ay - 2ab)^2}{\gamma^2} = 1.$$

Exprimons que cette surface passe par M, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2c$, il vient

$$4a^2b^2 = \gamma^2,$$

on aurait de même

$$4b^2c^2 = \alpha^2, \quad 4a^2c^2 = \beta^2,$$

de sorte que l'équation devient

$$\frac{(cy+bz-2bc)^2}{4b^2c^2}+\frac{(cx+az-2ac)^2}{4a^2c^2}+\frac{(bx+ay-2ab)^2}{4a^2b^2}=1.$$

Remarquons qu'elle admet pour centre le point (a, b, c); transportons l'origine en ce point : l'équation devient

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=4$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}=2.$$

2° Menons les trois droites MR, PN, QS qui doivent être les trois directrices de l'hyperboloïde. Je remarque que la droite MQ qui rencontre MR et QS est parallèle à PN; c'est donc une génératrice du second système. Il en est de même des droites NS et PR. Remarquons que les plans tangents en M et N, P et Q, R et S sont, par conséquent, parallèles deux à deux; l'hyperboloïde a donc le même centre que l'ellipsoïde.

Cherchons la section de cet hyperboloïde par le plan ABC; elle contiendra les trois points R, Q, N. La tangente en Q est l'intersection du plan tangent en ce point avec la face ABC. Or ce plan tangent est le plan des droites MQ et QS, c'est-à-dire la face OAC. La tangente est donc AC. On verrait de même que les tangentes en R et N sont les droites BC et AB. Donc la section est l'ellipse inscrite dans ABC et tangente aux milieux des côtés.

Si l'on rapproche ce résultat de celui qu'on a obtenu pour l'ellipsoïde, on voit que les deux surfaces ont cette ellipse en commun, et par suite se pénètrent suivant deux courbes planes. La seconde est une ellipse égale à la première et symétrique par rapport au centre K. Elle est circonscrite au triangle MPS.

Cherchons l'équation de l'hyperboloïde. Un plan passant par MR aura pour équation

$$z - 2c + \lambda x = 0;$$

un plan passant par QS,

$$x - 2a + \lambda_1 y = 0.$$

Exprimons que la droite définie par ces deux équations rencontre PN,

$$z = 0, \quad y = 2b,$$

on trouve

$$a\lambda - b\lambda\lambda_1 - c = 0.$$

D'ailleurs,

$$\lambda = \frac{2c - z}{x}, \quad \lambda_1 = \frac{2a - x}{y};$$

on a donc

$$a\frac{2c - z}{x} - b\frac{2c - z}{x}\frac{2a - x}{y} - c = 0.$$

Transportons l'origine au centre a, b, c :

$$a(y + b)(c - z) - b(c - z)(a - x) - c(x + a)(y + b) = 0.$$

Effectuant et divisant par abc, il vient

$$\frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0.$$

Ajoutons cette équation à celle de l'ellipsoïde; il vient

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \pm 1.$$

L'intersection se compose donc bien de deux courbes planes symétriques par rapport à l'origine. Pour démontrer que ce sont les ellipses circonscrites à MPS et RQN, menons, par K, IH parallèle à OC, rencontrant en I la face ABC et en H la face OAB; on a

$$IK = \frac{IH}{2} = \frac{QS}{2} = \frac{OC}{4} = c.$$

On aurait de même, sur des parallèles menées par K aux deux autres axes, les longueurs a et b. L'équation du plan ABC ou RQN est donc

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3° Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ les coordonnées des points de rencontre de l'une des génératrices de l'hyperboloïde avec l'ellipsoïde. Le plan mené par le premier point parallèlement au plan tangent au second a pour équation

$$(x - x_1)f'_{x_2} + (y - y_1)f'_{y_2} + (z - z_1)f'_{z_2} = 0.$$

La condition pour que ce plan passe par le centre est, en prenant les équations rapportées à K comme origine,

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = 0$$

ou, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs (f désignant le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde),

$$\frac{x_1}{a}\left(\frac{2x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c}\right) + \frac{y_1}{b}\left(\frac{2y_2}{b} + \frac{x_2}{a} + \frac{z_2}{c}\right) + \frac{z_1}{c}\left(\frac{2z_2}{c} + \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b}\right) = 0.$$

Remarquons que les deux points considérés appartiennent à l'intersection des deux surfaces et sont situés l'un dans le plan RQN, l'autre dans le plan PMS. On a

donc

$$(1)\qquad \frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c} = 1,$$

$$(2)\qquad \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c} = -1.$$

En tenant compte de ces relations, la condition ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{x_1}{a}\left(\frac{x_2}{a} - 1\right) + \frac{y_1}{b}\left(\frac{y_2}{b} - 1\right) + \frac{z_1}{c}\left(\frac{z_2}{c} - 1\right) = 0.$$

$$(3)\qquad \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1.$$

Exprimons maintenant que les deux points considérés sont sur une même génératrice de l'hyperboloïde. Pour cela, il suffira d'exprimer que le point (x_2, y_2, z_2) est dans le plan tangent à l'hyperboloïde au point (x_1, y_1, z_1). Ce dernier a pour équation

$$\frac{x}{a}\left(\frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c}\right) + \frac{y}{b}\left(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}\right) + \frac{z}{c}\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) + 2 = 0,$$

et la condition demandée sera

$$(4)\qquad \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{ab} + \frac{x_2 z_1 + z_2 x_1}{ac} + \frac{y_2 z_1 + z_2 y_1}{bc} + 2 = 0.$$

Faisons maintenant le produit des équations (1) et (2),

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} + \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{ab} + \frac{x_2 z_1 + x_1 z_2}{ac} + \frac{y_2 z_1 + y_1 z_2}{bc} = -1.$$

Tenant compte de (4), cette relation s'écrit

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1.$$

On retrouve la condition (3). Comme celle-ci n'est qu'une transformation de la relation

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = 0,$$

cette dernière est elle-même vérifiée. D'ailleurs, on aura aussi, par symétrie,

$$x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} = 0.$$

Donc le second plan passe aussi par le centre.

L'intersection de ces deux plans a donc pour lieu un cône dont le sommet est au centre. Je dis que ce cône est du second degré. En effet, si nous considérons l'intersection des plans tangents en (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2), cette intersection est la conjuguée de la génératrice qui passe par ces deux points, par rapport à l'ellipsoïde. Donc elle s'appuie constamment sur trois droites fixes qui sont les conjuguées des directrices du premier hyperboloïde, et, par conséquent, le lieu de cette droite est aussi un hyperboloïde, ayant le même centre que le premier. Le lieu cherché n'est autre chose que le cône asymptote de cet hyperboloïde.

Pour trouver son équation, prenons d'abord les équations des conjuguées des directrices primitives. Pour cela, il suffit de chercher les plans tangents aux extrémités de MR, de PN, de QS :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0, \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 4, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 4, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 4. \end{cases}$$

Une droite s'appuyant sur (1) et (3) a pour équations

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-4+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0,$$

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-4\right)=0.$$

Pour exprimer que cette droite rencontre la droite (2), retranchons ses équations l'une de l'autre :

$$4-\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-4\right)=0.$$

Tenant compte de (2),

$$4-4\lambda-4\mu=0,$$
$$1-\lambda-\mu=0.$$

Éliminant λ et μ,

$$1+\frac{\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-4}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}+\frac{\frac{y}{a}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-4}=0$$

ou

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-4\right)+\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-4\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-4\right)$$
$$+\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0.$$

Transportons l'origine au point (a, b, c) et effectuons ; il vient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{3xz}{ac}+\frac{3yz}{bc}+\frac{3xy}{ab}+4=0.$$

L'équation du cône est donc

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{3xz}{ac}+\frac{3yz}{bc}+\frac{3xy}{ab}=0.$$

Il passe par l'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde, car, si l'on retranche de son équation celle de l'ellipsoïde, on trouve, en divisant par 2,

$$\frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

C'est l'équation de l'hyperboloïde.

Note. — MM. F. Lebreton et L. Mandrillon, élèves du lycée de Besançon (classe de M. Crétin), ont envoyé deux excellentes solutions, l'une analytique et l'autre géométrique. M. E. Estienne, élève du lycée de Bar-le-Duc, envoie aussi une très bonne solution géométrique, et M. A. Leinekugel une solution analytique.

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE PARIS, 1875);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Déterminer une courbe (c) *telle que si l'on forme une de ses transformées* (C) *par rayons vecteurs réciproques relativement à un pôle donné* O, *les rayons de courbure en deux points correspondants* m *et* M *des deux courbes* (c) *et* (C) *soient dans un rapport donné.*

Donnons d'abord une expression simple du rayon de courbure. On a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta + dV},$$

α étant l'angle de la tangente avec l'axe polaire et V l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur; mais

$$\cos V = \frac{dr}{ds}, \quad \sin V = \frac{r\,d\theta}{ds},$$

d'où, en éliminant ds et $d\theta$,

$$\rho = \frac{dr}{\cos V\, d\theta + \cos V\, dV} = \frac{r\,dr}{\sin V\, dr + r\cos V\, dV} = \frac{r\,dr}{d.r\sin V}.$$

Cette expression, ou encore, en appelant p la distance de la tangente à l'origine, $\rho = \dfrac{r\,dr}{dp}$, est celle que nous voulions obtenir.

Si l'on désigne par K le rapport des rayons de courbure aux points $m(r, \theta)$, $M(R, \theta)$, l'équation de condition sera

$$(1) \qquad \frac{r\,dr}{d.r\sin V} = \frac{KR\,dR}{d.R\sin V},$$

en remarquant que les angles V en ces deux points sont supplémentaires.

On a d'ailleurs, par définition,

$$Rr = a^2,$$

d'où

$$R = \frac{a^2}{r}, \quad dR = -\frac{a^2}{r^2}\,dr.$$

Substituant dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{r\,dr}{d.r\sin V} = -\frac{Ka^4\,dr}{r^3 d.\dfrac{a^2}{r}\sin V}.$$

On tire de là

$$\frac{d.\sin V}{\sin V} = \frac{r^2 - Ka^2}{r(r^2 + Ka^2)}\,dr = -\frac{dr}{r} + \frac{2r\,dr}{r^2 + Ka^2},$$

et, en intégrant,

$$\log\sin V = -\log r + \log C(r^2 + Ka^2)$$

ou

$$\sin V = \frac{C(r^2 + Ka^2)}{r}.$$

Égalant cette valeur de $\sin V$ à celle $\dfrac{r}{\sqrt{r^2+\dfrac{dr^2}{d\theta^2}}}$ donnée plus haut, on aura l'équation différentielle de la courbe,

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+\dfrac{dr^2}{d\theta^2}}}=\frac{C(r^2+Ka^2)}{r};$$

d'où

$$(2)\qquad \frac{1}{C}\,d\theta=\frac{(r^2+Ka^2)\,dr}{r\sqrt{r^2-C^2(r^2+Ka^2)^2}},$$

$$\frac{1}{C}\,d\theta=\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-C^2(r^2+Ka^2)^2}}+Ka^2\,\frac{dr}{r\sqrt{r^2-C^2(r^2+Ka^2)^2}}.$$

Le premier terme du second membre peut s'écrire

$$\frac{d.(r^2)}{2C\sqrt{-K^2a^4+\left(\dfrac{1}{C^2}-2Ka^2\right)(r^2)-(r^2)^2}};$$

l'intégrale est

$$\frac{1}{2C}\arccos\frac{1-2KC^2a^2-2C^2r^2}{\sqrt{1-4KC^2a^2}}.$$

Le second terme peut se mettre sous une forme analogue, après avoir divisé haut et bas par r^3 :

$$-\frac{1}{2C}\frac{d(r^{-2})}{\sqrt{-\dfrac{1}{K^2a^4}+\dfrac{1}{K^2a^4}\left(\dfrac{1}{C^2}-2Ka^2\right)(r^{-2})-(r^{-2})^2}}.$$

On trouve, pour l'intégrale,

$$-\frac{1}{2C}\arccos\frac{1-2KC^2a^2-2K^2a^4C^2r^{-2}}{\sqrt{1-4Ka^2C^2}}.$$

On aura donc, pour l'intégrale de l'équation (2),

$$2(\theta - \theta_0) = \arc\cos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2C^2r^2}{\sqrt{1 - 4Ka^2C^2}} - \arc\cos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2K^2a^4C^2r^{-2}}{\sqrt{1 - 4Ka^2C}},$$

θ_0 étant la constante d'intégration.

En prenant les cosinus des deux membres, on trouve, après des transformations connues,

$$\cos 2(\theta - \theta_0) = \frac{-2K^2a^4C^2 + r^2 - 2C^2r^4}{(1 - 4Ka^2C^2)r^2}$$

ou

$$C^2r^4 - [\sin^2(\theta - \theta_0) + 2Ka^2C^2\cos 2(\theta - \theta_0)]r^2 + K^2a^4C^2 = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe demandée.

RÉDUCTION DE DEUX POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ A DES SOMMES DE CARRÉS;

PAR M. H. LAURENT.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Soient $f = \Sigma a_{ij}x_ix_j$ et $g = \Sigma b_{ij}x_ix_j$ deux polynômes homogènes du second degré à n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$; nous supposons, comme on a l'habitude de le faire, que l'on a entre les constantes a, b les relations $a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = b_{ji}$ pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ de i et j. Posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2 + \ldots + \gamma_{1n}y_n, \\ x_2 = \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2 + \ldots + \gamma_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \gamma_{1n}y_1 + \gamma_{n2}y_2 + \ldots + \gamma_{nn}y_n, \end{array} \right.$$

les γ désignant dans ces formules des coefficients indéterminés et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de nouvelles variables. Les fonctions f, g se transformeront en des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ données par les formules

$$f = \Sigma a_{ij}(\gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i2}y_2 + \ldots + \gamma_{in}y_n)(\gamma_{j1}y_1 + \ldots + \gamma_{jn}y_n),$$
$$g = \Sigma b_{ij}(\gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i1}y_2 + \ldots + \gamma_{in}y_n)(\gamma_{j1}y_1 + \gamma_{jn} \ldots + y_n),$$

que l'on peut aussi écrire

$$f = \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu}y_\mu y_\nu, \quad g = \Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu}y_\mu y_\nu,$$

de sorte que, si l'on pose

$$(2) \qquad \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0,$$
$$(3) \qquad \Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0,$$
$$(4) \qquad \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = A_\mu,$$
$$(5) \qquad \Sigma b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = B_\mu,$$

μ et ν étant supposés fixes sous le signe Σ, on aura simplement

$$f = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \ldots + A_n y_n^2,$$
$$g = B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \ldots + B_n y_n^2.$$

Si l'on parvient à résoudre les équations (2) et (3) par rapport aux γ_{ij}, les fonctions f et g pourront être ramenées à des sommes de carrés au moyen du changement de variables représenté par les équations (1). Pour résoudre ces équations, nous procéderons comme il suit : soient $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la demi-dérivée de f relative à x_i, et g_i la demi-dérivée de g relative à la même variable; les équations (2) et (3) peuvent s'écrire respectivement:

$$(2\ bis) \qquad \gamma_{1\mu}f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu}f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \ldots = 0,$$
$$(3\ bis) \qquad \gamma_{1\mu}g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu}g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}) + \ldots = 0;$$

et, comme elles ont lieu pour $\mu = 1, 2, 3, \ldots, n$, il faut en conclure

$$\frac{f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)} = \frac{f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)} = \ldots,$$

pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ..., n de ν. Égalons ces rapports à une nouvelle indéterminée λ_ν, nous aurons

$$(6)\qquad \begin{cases} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) - \lambda_\nu g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) = 0, \\ f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) - \lambda_\nu g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations détermineront les quantités γ qui portent le second indice ν. Effaçons, pour simplifier, cet indice; on pourra les écrire comme il suit, en remplaçant $f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ par leurs développements :

$$(7)\qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_1 \\ \quad + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_2 + \ldots + (a_{1n} - \lambda b_{1n})\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1})\gamma_1 \\ \quad + (a_{n2} - \lambda b_{n2})\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda b_{nn})\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Commençons par éliminer $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; nous aurons l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré en λ

$$(8)\quad \Lambda = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \ldots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} - \lambda b_{11} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines de cette équation et si, dans les formules (7), on remplace successivement λ par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, elles feront connaître les valeurs des rapports $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \ldots$; si l'on se donne $B_1, B_2, \ldots, B_n$, les formules (4) achèveront de déterminer les γ_{ij}.

Multiplions alors la première formule (7) par γ_1, la seconde par γ_2, etc., et ajoutons, nous aurons

$$\Sigma a_{ij}\gamma_i\gamma_j = \lambda \Sigma b_{ij}\gamma_i\gamma_j;$$

donc

$$A_\mu = \lambda_\mu B_\mu,$$

de sorte que

$$(9)\qquad g = B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \ldots + B_n y_n^2,$$

$$(10)\qquad f = B_1 \lambda_1 y_1^2 + B_2 \lambda_2 y_2^2 + \ldots + B_n \lambda_n y_n^2;$$

f et g sont ainsi ramenés à des sommes de carrés par une même substitution linéaire.

Mais, pour que les calculs que nous venons d'esquisser conduisent à un résultat admissible, il faut : 1° que l'équation en λ ait effectivement n racines; 2° que les équations (7) soient compatibles; 3° que l'on puisse effectivement choisir arbitrairement $B_1, B_2, \ldots$, c'est-à-dire que les $g(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)$ ne soient pas identiquement nuls; 4° que la substitution (1) soit réversible, c'est-à-dire que les y puissent se calculer en fonction des x, c'est-à-dire que les fonctions transformées (9) et (10) soient comme les proposées des fonctions de n variables, ce que nous supposerons; cela revient à admettre que les fonctions f et g ont des discriminants différents de zéro, et nous l'admettrons effectivement jusqu'à nouvel ordre.

DÉMONSTRATION D'UN LEMME.

Si l'équation $\Lambda = 0$ admet pour racine simple la quantité λ, les mineurs de Λ ne seront pas tous nuls et la quantite $g(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ sera différente de zéro; si, au contraire, les mineurs de Λ n'étant pas tous nuls, $\Lambda = 0$ admet λ pour racine double, on aura nécessairement $g(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = 0$.

D'abord, si les mineurs de Λ sont tous nuls, comme

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = -\Sigma \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}} b_{ij},$$

$\frac{d\Lambda}{d\lambda}$ sera nul et $\Lambda = 0$ aura λ pour racine double au moins.

Si tous les mineurs de Λ ne sont pas nuls, on a, en vertu des équations (7),

$$\gamma_p \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i \frac{d\Lambda}{da_{pj}},$$

$$\gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pi}},$$

et par suite

$$(12) \quad \gamma_p \gamma_q \left(\frac{d\Lambda}{da_{ij}}\right)^2 = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{qi}} = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}}.$$

Or on a, en vertu d'un théorème connu,

$$\Lambda \frac{d^2\Lambda}{da_{pj}\, da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}} - \frac{d\Lambda}{da_{pq}} \frac{d\Lambda}{da_{ij}},$$

et, comme $\Lambda = 0$,

$$\frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pq}} \frac{d\Lambda}{da_{ij}}.$$

L'équation (12) devient alors

$$\gamma_p \gamma_q \left(\frac{d\Lambda}{da_{ij}}\right)^2 = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{ij}} \frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

or, puisque tous les mineurs de Λ ne sont pas nuls, on peut supposer $\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \gtrless 0$, et alors on a

$$\gamma_p \gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

on en conclut

$$\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \sum b_{pq} \gamma_p \gamma_q = \gamma_i \gamma_j \sum \frac{d\Lambda}{da_{pq}} b_{pq}$$

ou bien

$$(13) \qquad \frac{d\Lambda}{da_{ij}} g = -\gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{d\lambda}.$$

Donc g ne s'annule que si $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$, γ_i ou γ_j sont nuls. Donc enfin, si la racine λ n'est pas racine double de $\Lambda = 0$, g ne s'annulera que si γ_i ou γ_j sont nuls. Supposons $\gamma_i = 0$; le système (7) se réduit en supprimant la $j^{\text{ième}}$

ligne à un système de $n-1$ équations homogènes à $n-1$ inconnues dont le déterminant n'est pas nul, car il est égal à $\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}}$. Donc il faut que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ soient tous nuls, ce qui est absurde, puisque $\Lambda = 0$; donc γ_i ne saurait être nul, donc γ_j pour la même raison ne l'est pas non plus; donc enfin, si λ n'est pas racine multiple de $\Lambda = 0$, g ne saurait être nul.

Ces conclusions tombent en défaut quand tous les mineurs de Λ s'annulent. Pour discuter ce cas spécial, imaginons que les coefficients a_{kl} de la fonction f deviennent variables et que, pour des valeurs particulières de ces coefficients, les mineurs de Λ s'annulent sans que les mineurs du second ordre passent tous par zéro. Différentions l'équation (13); on aura, en observant que g ne contient pas les a_{kl},

$$g\sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}\,\mathrm{d}a_{kl}}\,\delta a_{kl} = -\gamma_i\gamma_j\,\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\,\delta\lambda - \frac{d\Lambda}{d\lambda}\,\delta(\gamma_i\gamma_j).$$

Si $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}$ n'est pas nul, cette formule devient, en supposant $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$,

$$(14)\qquad g\sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}\,\mathrm{d}a_{kl}}\,\delta a_{kl} = -\gamma_i\gamma_j\,\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\,\delta\lambda.$$

Il est facile de prouver que $\delta\lambda$ n'est pas nul, il en résultera que g ne peut s'annuler que si $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} = 0$, c'est-à-dire que si λ est racine triple de $\Lambda = 0$. En effet, en différentiant $\Lambda = 0$, on a

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda}\,\delta\lambda + \sum \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}}\,\delta a_{kl} = 0.$$

Comme $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$, $\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}} = 0$. Différentions encore; nous aurons

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda}\delta^2\lambda + \frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\delta\lambda^2 + 2\sum \frac{d}{d\lambda}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}}\delta\lambda\,\delta a_{kl} + \sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}\,\mathrm{d}a_{ij}}\delta a_{kl}\,\delta a_{ij} = 0,$$

formule qui se réduit, dans nos hypothèses, à

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}\delta\lambda^2 + 2\,\delta\lambda\sum \frac{d}{d\lambda}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}}\delta a_{kl} + \sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{kl}\,\mathrm{d}a_{ij}}\delta a_{kl}\,\delta a_{ij} = 0.$$

On voit que $\delta\lambda$ non seulement n'est pas nul, mais en général a deux valeurs si $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}$ n'est pas nul; quant à $\sum \frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}a_{ij}\,\mathrm{d}a_{kl}}\delta a_{kl}$, il est différent de zéro pour des valeurs convenables des δa_{kl}, si tous les mineurs du second ordre de Λ ne sont pas nuls, comme on l'a supposé.

La formule (14) montre que, si $\Lambda = 0$ a une racine triple sans que tous les mineurs du second ordre de $\Lambda = 0$ soient nuls, g sera nul. Le cas où tous ces mineurs seraient nuls se traitera en différentiant (14) avec la caractéristique δ, et ainsi de suite.

DISCUSSION DES RÉSULTATS.

Supposons que l'équation Λ n'ait que des racines simples finies et différentes de zéro. Les équations (7) donneront pour chaque valeur de λ des valeurs bien déterminées de $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \ldots$. Les mineurs de Λ n'étant pas tous nuls et $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$ étant finis, $B_1, B_2, \ldots$ pourront être choisis différents de zéro, et la substitution (1) aura tous ses coefficients bien déterminés; j'ajoute qu'elle sera réversible, c'est-à-dire que son déterminant Γ sera différent de zéro, c'est-à-dire que les y seront des fonctions des x. En effet, en vertu de (3 *bis*) et de (4), on a

$$\Gamma \begin{vmatrix} g_1(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}) & g_2(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n})\ldots \\ g_1(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}) & g_2(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n})\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = B_1 B_2 \ldots B_n;$$

mais, B_1, B_2, ... étant différents de zéro, il faut que Γ lui-même soit différent de zéro. C. Q. F. D.

Je suppose que λ soit racine double de $\Lambda = 0$. En général, la réduction de f et g à des sommes de carrés ne pourra plus se faire parce que, $g = B$ étant nul, Γ l'est aussi; pour parler plus exactement, la réduction à une somme de carrés est encore possible, mais la transformation (1) n'est pas réversible et elle altère la nature des fonctions f et g.

Cependant, si tous les mineurs de $\Lambda = 0$ étaient nuls, $g = B$ ne serait plus forcément nul et la transformation, loin de ne plus être possible, pourrait s'effectuer d'une infinité de manières, puisque les équations (7), se réduisant à $n - 2$ distinctes, fourniraient une infinité de systèmes admissibles pour les quantités $\gamma_1 : \gamma_2 : \ldots$. La valeur λ double étant connue, on pourra disposer de ces systèmes de manière à satisfaire à (2) et (3).

Si l'équation $\Lambda = 0$ avait une racine triple, la réduction à des sommes de carrés redeviendrait impossible, à moins que tous les mineurs du troisième ordre de Λ ne fussent nuls, et ainsi de suite.

Maintenant supposons que l'équation $\Lambda = 0$ ait une racine nulle; f aura son discriminant nul et sera une fonction de $n - 1$ variables seulement, de sorte qu'un carré devra disparaître de l'expression de f. C'est ce qui aura lieu par l'application de la méthode expliquée plus haut. Le cas où $\Lambda = 0$ aurait une racine infinie sans avoir de racine nulle pourra être évité en considérant la fonction $g - \lambda f$ à la place de $f - \lambda g$. Enfin le cas où $\Lambda = 0$ aurait à la fois une racine nulle et une racine infinie sera le seul qui échappera à notre méthode; mais, dans ce cas, f et g sont tous deux des fonctions de $n-1$ variables au plus et c'est alors sur ces variables réduites à leur minimum qu'il conviendra d'appliquer la méthode exposée.

En résumé :

Étant donnés deux polynômes homogènes du second degré f et g à n variables, on pourra toujours les transformer en des sommes de carrés au moyen d'une substitution linéaire réversible, à la condition que le discriminant de $f - \lambda g$, égalé à zéro, n'ait que des racines simples, ou que, s'il a des racines multiples, à chaque racine d'ordre m correspondent des mineurs d'ordre $m-1$, du discriminant de $f - \lambda g$, tous nuls.

Maintenant considérons les formes réduites de f et g, et supposons les coefficients de ces deux fonctions réels; l'équation $\Lambda = 0$ n'aura pas en général toutes ses racines réelles, de sorte que, l'une des formes réduites étant à coefficients réels, l'autre ne sera pas nécessairement à coefficients réels; la substitution (1) elle-même pourra fort bien n'être pas réelle. Il importe cependant de discerner les cas dans lesquels on aura affaire à des substitutions réelles; or la forme particulière de la fonction Λ permet de compter *a priori* et assez facilement le nombre des racines réelles de $\Lambda = 0$. On a, en effet,

$$\Lambda \frac{d^2\Lambda}{da_{nn}\,da_{n-1,n-1}} = \frac{d\Lambda}{da_{nn}}\,\frac{d\Lambda}{da_{n-1,n-1}} - \left(\frac{d\Lambda}{da_{n-1,n}}\right)^2,$$

ou, en appelant Λ_1 ce que devient Λ quand on supprime la dernière ligne et la dernière colonne, Λ_2 ce qu'il devient quand on supprime les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc.,

$$\Lambda\Lambda_2 = \Lambda_1 \frac{d\Lambda}{da_{n-1,n-1}} - \left(\frac{d\Lambda}{da_{n-1,n}}\right)^2.$$

On aurait des relations analogues entre $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, entre $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$, etc., et l'on voit que, si Λ_1 s'annule, Λ et Λ_2 seront de signes contraires. En général, si Λ_i s'annule, Λ_{i+1} et Λ_{i-1} seront de signes contraires. Cette règle n'est malheureusement pas sans exception, et, Λ_1 s'annulant si $\frac{d\Lambda}{da_{n,n-1}}$ est nul, on voit que Λ ou Λ_2 s'annulera aussi. Quoi qu'il en soit, les cas où la remarque faite tomberait en défaut seront exceptionnels, et quand $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ seront tels que pour $\lambda = +\infty$ et $-\infty$ ils ne présentent que des variations dans un cas, et que des permanences dans l'autre, $\Lambda = 0$ aura toutes ses racines réelles.

L'équation $\Lambda = 0$ aura toutes ses racines réelles lorsque l'une des fonctions f, g sera une somme de carrés tous positifs ou tous négatifs. En effet, les racines de $\Lambda = 0$ ne changent pas par une substitution orthogonale ramenant f seul à une somme de carrés

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2.$$

Tous ces carrés étant censés positifs, on peut faire la substitution $x_1 = \frac{y}{\sqrt{A_1}}$, $x_2 = \frac{y}{\sqrt{A_2}}$, $\cdots$; alors la substitution qui ramènera à la fois f et g à des sommes de carrés aura pour équation $\Lambda = 0$ une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle a, comme l'on sait, toutes ses racines réelles.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Pour faire une application géométrique des principes précédents, supposons que $f=0$ et $g=0$ représentent deux surfaces du second ordre ; les coefficients de f et g seront supposés réels. Dire que l'on peut ramener f et g à des sommes de carrés par une même substitution linéaire, c'est dire que deux surfaces du second ordre ont un tétraèdre autopolaire commun. Les théorèmes établis plus haut s'interprètent donc ainsi :

Deux surfaces du second ordre qui ne se touchent pas, car alors on n'a pas à la fois

$$f=0, \quad g=0, \quad \frac{f_1}{g_1}=\frac{f_2}{g_2}\ldots=\lambda,$$

ont toujours un tétraèdre autopolaire commun.

Deux surfaces du second ordre qui se touchent en un seul point n'ont pas de tétraèdre autopolaire commun.

Deux surfaces du second ordre qui ont un double contact ont une infinité de tétraèdres autopolaires communs.

Deux surfaces circonscrites n'ont pas de tétraèdres autopolaires communs.

QUESTION.

1356. Il y a deux cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points. (E. G., ancien élève du lycée de Reims.)

1357. ABC étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point O de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments : trouver le lieu du point O pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est constant. (BARBARIN.)

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. G. CANDÈZE,
Élève de l'École Polytechnique.

1. La règle de Maclaurin, ou mieux encore celle de Lagrange, donne immédiatement une limite qui ne dépend que du coefficient de la plus haute puissance de x, du rang du premier terme négatif et de la valeur absolue du plus grand coefficient négatif, mais nullement de la place de ce dernier; il est évident cependant que son rang doit avoir une importance souvent fort grande : par exemple, la plus grande racine de l'équation

$$x^5 - 100x^4 - 1 = 0$$

est supérieure à 100, tandis que la plus grande racine de l'équation

$$x^5 - x^4 - 100 = 0$$

est inférieure à 3, bien que la règle de Maclaurin donne la même limite pour les deux équations.

Je me propose de donner une limite qui fasse intervenir le rang du terme négatif dont le coefficient est le plus grand en valeur absolue.

Considérons une équation telle que le coefficient de la plus haute puissance de x soit le plus grand en valeur absolue; une telle équation admet 2 comme limite supérieure des racines. En effet, soit A_0 le coefficient considéré; si le polynôme

$$(1) \qquad A_0 x^m - A_0 x^{m-1} - \ldots - A_0$$

est positif pour une certaine valeur de x, le polynôme proposé

$$(2) \qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$$

le sera certainement. Or 2 est une limite supérieure pour le polynôme (1) : donc 2 est aussi une limite supérieure pour le polynôme (2).

Remarquons d'ailleurs qu'on peut obtenir une limite plus petite que 2 en appliquant, par exemple, la méthode de Maclaurin, ou telle autre que l'on voudra.

Cela posé, considérons une équation entière quelconque; formons l'équation qui admet pour racines les racines de la première, divisées par p. Si l'équation proposée est

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

la transformée sera

$$p^m A_0 x^m + p^{m-1} A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

et l'on peut toujours choisir p de telle sorte que le coefficient $A_0 p^m$ soit le plus grand en valeur absolue. Pour cela, on comparera tous les termes au premier, et l'on verra quelles sont les valeurs à donner à p pour que $A_0 p^m$ soit plus grand que chacun d'eux : la plus grande valeur de p sera une valeur cherchée.

Si nous formons les coefficients successifs, nous pourrons appliquer une des règles connues; mais, si nous voulons opérer plus rapidement, nous pourrons prendre 2 comme limite supérieure : alors une limite pour l'équation proposée sera certainement $2p$, ou plus généralement, si nous avons trouvé l comme limite de la transformée, une limite supérieure de la proposée sera certainement lp.

Cette limite est, en général, beaucoup plus avantageuse que la limite de Maclaurin ou de Lagrange, à moins que le plus grand coefficient négatif ne soit le premier des coefficients négatifs; dans ce cas, il est préférable d'appliquer une autre méthode.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^8 + 2x^7 - 2x^6 + 6x^5 - 80x^4$$
$$+ 100x^3 - 400x^2 + 15x + 30 = 0;$$

la règle de Lagrange donne

$$1 + \sqrt{400} = 21.$$

Formons la transformée : pour $p = 3$, on voit facilement que le premier coefficient est le plus grand; donc 6 est une limite supérieure des racines. Si nous voulions calculer les coefficients, on pourrait, en appliquant à la transformée une des méthodes connues, trouver une limite inférieure à 2, par suite pour la proposée une limite inférieure à 6, mais le calcul serait alors plus long.

2. On peut encore employer un procédé du même genre pour rendre la méthode de Maclaurin plus avantageuse. Changeons x en py et déterminons p de façon que le plus grand des coefficients négatifs soit le plus grand des coefficients de même signe; en appliquant à l'équation transformée la méthode de Maclaurin ou celle de Lagrange, on obtiendra une limite qui, multipliée par p, donnera une limite de la proposée.

Il est plus avantageux d'opérer ainsi lorsqu'on ne veut pas se contenter de 2 comme limite dans la méthode précédente et qu'on veut appliquer à la transformée une des méthodes connues.

3. On peut, en appliquant toujours ce mode de transformation de x en py, trouver d'autres limites plus ou moins avantageuses, suivant les cas, mais plus compliquées. Par exemple, on pourrait encore, en remarquant

qu'une équation qui a q termes négatifs admet 1 comme limite supérieure lorsque le premier terme est au moins égal à la somme des coefficients négatifs (*a fortiori* à q fois le plus grand terme négatif), rendre le premier coefficient plus grand que la somme des coefficients négatifs ou que q fois le plus grand dans l'équation transformée; si pour cela il faut changer x en py, p est une limite supérieure. Si nous appliquons cette méthode à l'exemple précité, on voit que 3 est une limite supérieure.

4. On peut à la fois tenir compte du rang du plus grand coefficient négatif et du nombre des termes négatifs de la façon suivante :

Considérons une équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots = 0.$$

Multiplions par p le premier membre de l'équation, p étant le nombre des termes négatifs; ce premier membre est la somme des termes positifs différents du premier, plus le premier diminué de la somme des termes négatifs. Si nous rendons cette dernière partie positive en substituant un nombre a, ce nombre a sera une limite supérieure pour le polynôme proposé. Or le premier terme est maintenant $pA_0 x^m$, et la partie du polynôme que nous voulons rendre positive peut être considérée comme la somme des premiers membres de p équations binômes dont le premier terme serait $A_0 x^m$ et le second terme un des termes négatifs du polynôme multiplié par p. La plus grande des racines de ces équations sera une limite pour le polynôme.

Pour avoir cette limite, on opérera donc de la façon suivante. On considérera un terme négatif du polynôme, soit

$- A_q x^{m-q}$; $\sqrt[q]{\frac{A_q}{A_0}}$ sera la racine d'une des équations binômes dont nous venons de parler; la plus grande valeur que prendra cette quantité, lorsque l'on considérera successivement tous les termes négatifs, sera une limite pour le polynôme.

SUR LA DÉTERMINATION DU CERCLE OSCULATEUR D'UNE COURBE A DOUBLE COURBURE;

PAR M. E. HUNYADY,
Professeur à l'École polytechnique de Budapest.

En désignant par x, y, z les coordonnées orthogonales d'un point d'une courbe à double courbure, par α, β, γ et r les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur; en outre, considérant x, y, z comme les fonctions d'un paramètre variable t, il est bien connu que le cercle osculateur de la courbe au point x, y, z est déterminé par les équations suivantes :

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & a(x-\alpha) + q(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0, \\ & a'(x-\alpha) + b'(y-\beta) + c'(z-\gamma) = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \\ & (bc' - b'c)(x-\alpha) + (ca' - c'a)(y-\beta) \\ & \qquad + (ab' - a'b)(z-\gamma) = 0, \end{aligned} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c, \\ & \frac{d^2x}{dt^2} = a', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = b', \quad \frac{d^2z}{dt^2} = c'. \end{aligned} \right.$$

On sait que la résolution du problème en question dépend essentiellement de la résolution des équations (2), linéaires en $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$. C'est la résolution du système mentionné à laquelle je prends la liberté de vouer ces lignes.

En tirant la valeur de $x-\alpha$ des équations (2), on trouve, par la voie du calcul des déterminants, que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ bc'-b'c & ca'-c'a & ab'-a'b \end{vmatrix}(x-\alpha)$$
$$=-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\begin{vmatrix} ca'-c'a & ab'-a'b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Pour transformer la valeur de $x-\alpha$ exprimée par cette équation, multiplions cette équation par la suivante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Le résultat de la multiplication sera

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & aa'+bb'+cc' & a \\ aa'+bb'+cc' & a'^2+b'^2+c'^2 & a' \\ 0 & 0 & bc'-b'c \end{vmatrix}(x-\alpha)$$
$$=-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\begin{vmatrix} -a(bc'-b'c) & -a'(bc'-b'c) \\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2-a^2 & \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}-aa' \end{vmatrix}.$$

En chassant le facteur commun $(bc'-b'c)$ dans cette équation et en remarquant que, d'après les notations (3), on a

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$
$$aa'+bb'+cc'=\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2},$$

en outre que le déterminant à droite, abstraction faite du facteur $bc' - b'c$, se laisse transformer dans le suivant

$$\begin{vmatrix} -a & -a' \\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 & \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} \end{vmatrix},$$

on aura, pour la détermination de la valeur de $x - \alpha$,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 & \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} \\ \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix} (x - \alpha) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \begin{vmatrix} a & a' \\ \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} \end{vmatrix},$$

d'où l'on tire facilement la valeur de $x - \alpha$. On obtient les valeurs de $y - \beta$, $z - \gamma$ par une voie analogue, et enfin la valeur de r par l'équation (1).

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE LILLE. — NOVEMBRE 1878);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Une surface de révolution autour de l'axe des z, en coordonnées rectangulaires, est définie par l'équation $z = f(r)$, r étant la distance d'un point de la surface à l'axe de rotation : trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires des projections sur le plan xy des courbes tracées sur cette surface, et qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chacun des points de l'une d'elles comprenne la normale à la surface au même point; prendre r pour variable indépendante.

Le plan osculateur en un point (x, y, z) d'une courbe a pour équation

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

en posant

$$A = dy\, d^2z - dz\, d^2y,$$
$$B = dz\, d^2x - dx\, d^2z,$$
$$C = dx\, d^2y - dy\, d^2x.$$

Les équations de la normale à la surface au même point sont

$$X - x + \frac{dz}{dx}(Z-z) = 0,$$

$$Y - y + \frac{dz}{dy}(Z-z) = 0.$$

La normale sera dans le plan osculateur si l'on a

$$A\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy} - C = 0.$$

Or,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

$$\frac{dx}{dr} = \cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{d^2x}{dr^2} = -2\sin\theta\frac{d\theta}{dr} - r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2},$$

$$\frac{dy}{dr} = \sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{d^2y}{dr^2} = 2\cos\theta\frac{d\theta}{dr} - r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2},$$

$$\begin{aligned} A = {} & \frac{d^2z}{dr^2}\left(\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right) \\ & - \frac{dz}{dr}\left(2\cos\theta\frac{d\theta}{dr} - r\sin\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = {} & -\frac{d^2z}{dr^2}\left(\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right) \\ & - \frac{dz}{dr}\left(2\sin\theta\frac{d\theta}{dr} + r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = {} & \left(\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)\left(2\cos\theta\frac{d\theta}{dr} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right) \\ & + \left(\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)\left(2\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta\frac{d\theta^2}{dr^2} + r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dr^2}\right). \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dz}{dr}\cos\theta,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dy} = \frac{dz}{dr}\sin\theta.$$

Donc

$$A\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy} - C = \frac{dz}{dr}(A\cos\theta + B\sin\theta) - C.$$

Mais

$$A\cos\theta + B\sin\theta = f''(r)\,r\frac{d\theta}{dr} + f'(r)\left(2\frac{d\theta}{dr} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right),$$

$$C = 2\frac{d\theta}{dr} + r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}.$$

L'équation différentielle des courbes est donc

$$f'(r)f''(r)\,r\frac{d\theta}{dr}$$
$$- f'^2(r)\left(2\frac{d\theta}{dr} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right) - 2\frac{d\theta}{dr} - r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} - r\frac{d^2\theta}{dr^2} = 0$$

ou

$$r[1 + f'^2(r)]\frac{d^2\theta}{dr^2}$$
$$+ \left\{2[1 + f'^2(r)] - rf'(r)f''(r)\right\}\frac{d\theta}{dr} + r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} = 0.$$

SOLUTION D'UNE QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879;

Par M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Nice.

On donne un ellipsoïde et, sur cette surface, deux points diamétralement opposés A *et* B; *on joint les* *points* A *et* B *à un point variable* m *de l'ellipsoïde :* 1° *trouver une surface* S *telle que le plan tangent au point* M, *où elle est rencontrée par la droite* Am, *soit parallèle à la droite* Bm; 2° *trouver sur cette surface une courbe telle que la tangente en chaque point* M *de cette courbe et l'intersection du plan tangent à la surface en* M *avec le plan qui passe par ce point* M *et par le diamètre* AB *soient deux tangentes conjuguées par rapport à la surface.*

1° L'ellipsoïde, rapporté à la droite AB comme axe des x et à deux diamètres conjugués Oy, Oz du plan conjugué à Ox, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du point variable m, on a donc la relation

$$(1)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1.$$

Soient x, y, z les coordonnées du point M de la surface S. Puisqu'il se trouve sur Am, on a les égalités

$$(2)\qquad \frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}.$$

Enfin le plan tangent au point M à la surface S a pour équation

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

en désignant par p, q les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$. Or il doit être parallèle à la droite Bm; par conséquent

$$(3)\qquad p(x_1+a)+qy_1-z_1=0.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer x_1, y_1, z_1 entre les équations (1), (2), (3).

Les équations (2) donnent facilement

$$\frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}=\frac{p(x-a)+qy-z}{-2ap},$$

d'où

$$x_1=a\,\frac{qy-z-p(x-a)}{p(x-a)+qy-z},$$

$$y_1=a\,\frac{-2py}{p(x-a)+qy-z},$$

$$z_1=a\,\frac{-2pz}{p(x-a)+qy-z}.$$

Je substitue ces valeurs de x_1, y_1, z_1 dans l'équation (1) et j'ai, en réduisant,

$$p\left[p\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\frac{(x-a)(qy-z)}{a^2}\right]=0.$$

Or, sur la surface cherchée, p n'est pas nul, car, s'il l'était, cette surface serait un cylindre ayant ses génératrices parallèles à AB. Son plan tangent au point M ne serait donc autre que le plan AmB, et la surface serait ce plan lui-même ; or ce plan est quelconque : donc tous les points de l'espace jouiraient de la propriété des points M. Nous excluons cette hypothèse en supposant $p \gtrless 0$; il reste donc l'équation

$$p\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\frac{(x-a)(qy-z)}{a^2}=0,$$

ou

$$(4)\quad p\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)q-\frac{(x-a)y}{a^2}+\frac{(x-a)z}{a^2}=0,$$

qui est l'équation aux dérivées partielles de la surface S.

Pour l'intégrer, je résoudrai le système

$$\frac{dx}{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}=-\frac{dy}{\frac{(x-a)y}{a^2}}=-\frac{dz}{\frac{(x-a)z}{a^2}},$$

qui donne successivement

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{ou} \quad y = Cz,$$

et

$$\frac{(x-a)}{a^2} z\,dx + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 0,$$

ou

$$\frac{x-a}{a^2} dx + \left(\frac{C^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) z\,dz = 0,$$

ou enfin

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = C_1.$$

L'équation générale de la surface S est donc

$$(5) \qquad F\left[\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},\ \frac{y}{z}\right] = 0.$$

La génération de cette surface est fort simple; elle est produite, en effet, par des ellipses qui sont les intersections de plans conduits suivant AB avec des ellipsoïdes homothétiques au proposé et ayant le point A pour centre.

Solution géométrique. — Des considérations géométriques extrêmement simples permettent de conclure immédiatement ce résultat. En effet, dans l'ellipse suivant laquelle le plan AmB coupe l'ellipsoïde proposé, les cordes Am, Bm sont conjuguées. La tangente à la section de la surface S par ce même plan est MT, parallèle à Bm, et par conséquent aussi conjuguée de la direction AM; cette tangente est la même que celle de l'ellipse qui a A pour centre et est homothétique de l'ellipse AmB; donc cette ellipse est la section de la surface par le plan AmB.

En particulier, tous les ellipsoïdes homothétiques au proposé et ayant A pour centre rentrent dans la catégorie des surfaces S ainsi engendrées.

2° L'intersection du plan tangent à la surface en M avec le plan AMB n'est autre chose que la tangente au point M à l'ellipse génératrice du plan AMB. Ses équations sont

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \quad \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

ou

$$\frac{X - x}{z - qy} = \frac{Y - y}{py} = \frac{Z - z}{pz}.$$

Celles de la tangente à la courbe cherchée au point M sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Ces deux droites doivent être des tangentes conjuguées, c'est-à-dire être parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice au point M.

Au voisinage du point M, le Z de la surface S peut se développer, d'après le théorème de Taylor étendu aux fonctions de deux variables, en série ordonnée suivant les puissances croissantes des accroissements $X - x$, $Y - y$ des variables x, y; ainsi

$$\begin{aligned} Z = z &+ \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2}\left[\frac{d^2 z}{dx^2}(X - x)^2 \right. \\ &\qquad \left. + 2\frac{d^2 x}{dx\,dy}(X - x)(Y - y) + \frac{d^2 z}{dy^2}(Y - y)^2\right] + \ldots \end{aligned}$$

ou, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\begin{aligned} Z = z &+ p(X - x) + q(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2}[r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \end{aligned}$$

en posant, suivant l'usage,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t.$$

Un plan parallèle au plan tangent au point M, et infiniment voisin, a pour équation

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = \varepsilon.$$

Si donc on élimine Z entre ces deux dernières équations, on a

$$r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2 = 2\varepsilon,$$

équation qui est celle de la projection de l'indicatrice sur le plan xy.

Or les projections de deux diamètres conjugués d'une conique sont des diamètres conjugués de sa projection; donc il doit en être ainsi pour les deux tangentes dont nous nous occupons, ce qui nécessite la relation

$$r + s\left(\frac{py}{z - qy} + \frac{dy}{dx}\right) + t\frac{py\,dy}{dx(z - qy)} = 0$$

ou

$$[r(z - qy) + psy]dx + [s(z - qy) + pty]dy = 0.$$

C'est l'équation différentielle qui définit la courbe cherchée sur la surface S. Cette équation peut se simplifier en la mettant sous la forme

$$(6) \qquad (r\,dx + s\,dy)(z - qy) + py(s\,dx + t\,dy) = 0.$$

Si, en effet, on tient compte de l'équation (4) et qu'on élimine $z - qy$ entre elles, on a

$$p\left[(r\,dx + s\,dy)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (s\,dx + t\,dy)\frac{x - a}{a^2}y\right] = 0.$$

Si l'on suppose $p = 0$, l'équation (4) donne $z - qy = 0$ ou $x - a = 0$. Dans le premier cas, l'équation (6) est vérifiée identiquement : donc les courbes déterminées par les équations

$$p = 0, \quad z - qy = 0,$$

c'est-à-dire

$$z = f(y), \quad z = y\,\mathrm{F}(x),$$

sont des solutions singulières de la question; en éliminant z, on a, par l'équation

$$f(y) = y\,\mathrm{F}(x),$$

les projections de ces solutions sur le plan xOy.

Dans le second cas, puisque $r\,dx + s\,dy = dp$, l'équation (6) est aussi vérifiée : donc les intersections du plan $x - a = 0$ avec les cylindres $z = f(y)$ parallèles à Ox sont de nouvelles solutions singulières. En écartant ces deux systèmes et divisant par p, on a

$$(7) \quad (r\,dx + s\,dy)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (s\,dx + t\,dy)\frac{x - a}{a^2}y = 0$$

ou bien, sous forme abrégée,

$$\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dp - \frac{(x - a)y}{a^2}dq = 0.$$

Si, dans cette équation, on suppose z remplacé par sa valeur en fonction de x et de y tirée de l'équation générale de la surface S

$$\mathrm{F}\left[\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \frac{y}{z}\right] = 0,$$

il reste une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0.$$

L'intégration de cette équation fait connaître la projection de la courbe cherchée sur le plan xOy. Cette intégration n'est possible qu'autant qu'on particularisera la forme de la fonction F.

Application. — Je considère en particulier, parmi les surfaces S, les ellipsoïdes homothétiques au proposé, et ayant A pour centre,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h.$$

Dans ces surfaces, on a

$$\frac{x-a}{a^2}+\frac{z}{c^2}p=0,\quad p=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x-a}{z},$$

$$\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}q=0,\quad q=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},$$

$$r=\frac{dp}{dx}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{z-(x-a)p}{z^2}=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left[\frac{z^2}{c^2}+\frac{(x-a)^2}{a^2}\right],$$

$$s=\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=-\frac{c^2}{a^2}(x-a)\frac{-q}{z^2}=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(x-a)y,$$

$$t=\frac{dq}{dy}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{z-qy}{z^2}=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation différentielle (7), mise sous la forme

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[r\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-s\frac{x-a}{a^2}y\right]dx\\ &+\left[s\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-t\frac{x-a}{a^2}y\right]dy=0;\end{aligned}\right.$$

celle-ci devient

$$\frac{z^2}{a^2c^2}\left[\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right]dx=0,$$

c'est-à-dire

$$dx=0,\quad x=\text{const.}$$

Les courbes cherchées sont donc les intersections des ellipsoïdes homothétiques

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h$$

par des plans parallèles au plan yOz.

Ce résultat est facile à démontrer géométriquement. En effet, soient M un point quelconque de la surface S et AMC la section de cet ellipsoïde S par le plan AMB; la tangente MS à la courbe cherchée au point M, devant être conjuguée de la tangente MT à la conique AMC et étant d'ailleurs conjuguée du rayon AM, est conjuguée au plan ATM, et, par suite, parallèle au diamètre conjugué de ce plan; elle est donc située dans le plan diamétral conjugué de AB, qui est parallèle à yOz, et par conséquent est elle-même parallèle au plan yOz. La courbe cherchée est donc plane et consiste en l'intersection de l'ellipsoïde S par un plan quelconque parallèle au plan zOy.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1879 POUR LE CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

Par M. MORET-BLANC,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée du Havre.

On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1,$$

et un point M *sur cette conique; par les extrémités d'un diamètre quelconque de la courbe et le point* M *on fait passer un cercle : prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique* K *passant par l'origine* O *des axes.*

Si autour du point O *on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique* K *en deux points : prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpen-*

diculaire au segment OM *et passant par le milieu de ce segment.*

Par le point O *on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point* O, *trois autres normales à la conique* K :

1° *Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a* $A = 1$ *et* $B = -1$, *montrer qu'une seule de ces normales est réelle et calculer les coordonnées de son pied.*

2° *Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.*

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point M et

$$y = mx$$

l'équation d'un diamètre de la conique. Celle d'un cercle passant par les extrémités de ce diamètre et par le point M sera de la forme

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 + \lambda(y - mx)(y + mx - y_0 - mx_0) = 0,$$

en remarquant que les sécantes communes à une conique et à un cercle sont également inclinées sur les axes de la conique.

L'équation développée devient

$$\left(\frac{1}{A} - \lambda m^2\right) x^2 + \left(\frac{1}{B} + \lambda\right) y^2 - \lambda(y_0 + mx_0)(y - mx) = 0.$$

La condition pour qu'elle représente un cercle est

$$\frac{1}{A} - \lambda m^2 = \frac{1}{B} + \lambda, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{1 + m^2};$$

l'équation du cercle est donc

$$\left(\frac{1}{A} + \frac{m^2}{B}\right)(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(y_0 + mx_0)(y - mx) = 0.$$

Les coordonnées de son centre sont déterminées par les deux équations

$$2\left(\frac{1}{A}+\frac{m^2}{B}\right)x-\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)m(y_0+mx_0)=0,$$

$$2\left(\frac{1}{A}+\frac{m^2}{B}\right)y+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\quad(y_0+mx_0)=0.$$

Ajoutant à la première la seconde multipliée par m, on a l'équation

$$x+my=0,$$

qui peut remplacer la première, et qu'on aurait pu écrire *a priori*, car elle représente la perpendiculaire élevée par le point O sur le diamètre $y-mx=0$ de la conique, qui est une corde du cercle.

On en tire

$$m=-\frac{x}{y};$$

substituant cette valeur dans la seconde équation, il vient

$$\frac{x^2}{B}+\frac{y^2}{A}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(y_0y-x_0x)=0,$$

ou

$$(1)\qquad Ax^2+By^2+\frac{A-B}{2}(y_0y-x_0x)=0,$$

équation du lieu des centres des cercles : c'est une conique passant par l'origine, de même espèce que la proposée, et qui lui deviendrait homothétique en la faisant tourner de 90°.

L'équation du système de deux droites rectangulaires menées par l'origine étant

$$y^2+kxy-x^2=0,$$

l'équation

$$(B+\lambda)y^2+\lambda kxy+(A-\lambda)x^2+\frac{A-B}{2}(y_0y-x_0x)=0$$

sera celle d'une conique passant par l'intersection de la conique K et du système des deux droites. On peut déterminer λ de manière que cette conique se réduise à la tangente en O à la conique K,

$$y_0 y - x_0 x = 0,$$

et à une seconde droite passant par l'intersection des côtés de l'angle droit avec cette conique. Il faut et il suffit pour cela que l'ensemble des termes du second degré soit divisible par $y_0 y - x_0 x$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(B+\lambda)y^2 + (A-\lambda)x^2 + \lambda k xy = (y_0 y - x_0 x)(ny + mx),$$

d'où

$$B+\lambda = n y_0, \quad A-\lambda = -m x_0, \quad \lambda k = m y_0 - n x_0,$$

et par suite

$$n = \frac{\lambda + B}{y_0}, \quad m = \frac{\lambda - A}{x_0},$$

$$\lambda k = \frac{(\lambda - A) y_0}{x_0} - \frac{(\lambda + B) x_0}{y_0},$$

$$\lambda = \frac{B x_0^2 + A y_0^2}{k(y_0^2 - x_0^2 - k x_0 y_0)}.$$

k n'entrant que dans λ, on peut conserver λ comme seul paramètre variable,

$$mx + ny = (\lambda - A)\frac{x}{x_0} + (\lambda + B)\frac{y}{y_0},$$

et l'équation de la droite cherchée est

$$\lambda\left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}\right) + B\frac{y}{y_0} - A\frac{x}{x_0} + \frac{A-B}{2} = 0.$$

Elle passe par le point fixe déterminé par les deux équations

$$\frac{y}{y_0} + \frac{x}{x_0} = 0,$$

$$B\frac{y}{y_0} - A\frac{x}{x_0} + \frac{A-B}{2} = 0,$$

dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{A-B}{2(A+B)} x_0, \quad y_1 = -\frac{A-B}{2(A+B)} y_0.$$

La polaire de ce point par rapport à la conique K est

$$\left[2Ax_1 - \frac{A-B}{2}x_0\right]x + \left[2By_1 + \frac{A-B}{2}y_0\right]y + \frac{A-B}{2}(y_0y_1 - x_0x_1) = 0.$$

En mettant pour x_1 et y_1 leurs valeurs, il vient, réductions faites,

$$x_0x + y_0y - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} = 0,$$

équation d'une droite perpendiculaire sur le milieu de OM, et qui est le lieu des points de concours des tangentes menées à la conique K par les points où elle est rencontrée par les côtés d'un angle droit pivotant autour du point O. Il est remarquable que ce lieu soit indépendant des axes de la conique donnée et qu'il reste le même pourvu que le centre O et le point M restent fixes.

L'équation de la normale à la conique K au point (x, y) est

$$Y - y = \frac{4By + (A-B)y_0}{4Ax - (A-B)x_0}(X - x).$$

Si elle passe par l'origine, les coordonnées de son pied satisfont à l'équation

$$4(A-B)xy - (A-B)(y_0x + x_0y) = 0$$

ou

$$(2) \qquad 4xy - y_0x - x_0y = 0.$$

C'est le lieu des pieds des normales menées du point O à toutes les coniques K que l'on obtient en faisant varier la grandeur des axes de la conique donnée.

1° Dans le cas particulier où $A = 1$, $B = -1$, l'équation de la conique donnée est

$$x^2 - y^2 = 1,$$

et l'on a

$$x_0^2 - y_0^2 = 1.$$

L'équation de la conique K devient

$$x^2 - y^2 + y_0 y - x_0 x = 0.$$

En éliminant y entre cette équation et l'équation (4), et supprimant la solution $x = 0$, on a l'équation

$$16x^3 - 24x_0x^2 + (9x_0^2 + 3y_0^2)x - x_0(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

qui détermine les abscisses des pieds des trois normales autres que celle qui a son pied en O.

En posant $x = x' + \frac{x_0}{2}$, elle devient, eu égard à $x_0^2 - y_0^2 = 1$,

$$16x'^3 - 3x' - \frac{1}{2}x_0 = 0$$

ou

$$x'^3 - \frac{3}{16}x' - \frac{x_0}{32} = 0,$$

de la forme $x'^3 + px' + q = 0$. L'expression

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

devient ici $\frac{y_0^2}{64^2} > 0$. L'équation n'a qu'une racine réelle, calculable par la formule de Cardan :

$$x' = \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} + \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4},$$

$$x = \frac{x_0}{2} + x'.$$

On a ensuite

$$y = \frac{y_0 x}{4x - x_0};$$

on trouverait d'ailleurs

$$y = \frac{y_0}{2} + \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} - \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4}.$$

2° Revenons au cas général, et soit

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + S = 0, \quad S = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$$

l'équation du cercle passant par les pieds des trois normales autres que celle qui a son pied en O.

En reportant la valeur $y = \frac{y_0 x}{4x - x_0}$, tirée de l'équation (2), d'abord dans celle du cercle, puis dans celle de la conique K, et supprimant la solution $x = 0$, on a les deux équations

$$\begin{array}{l|l|l|l}
16x^4 - 8x_0 & x^3 + 16\alpha x_0 & x^2 - 2\alpha x_0^2 & x + x_0^2 S = 0, \\
\quad - 32\alpha & \quad - 8\beta y_0 & \quad + 2\beta y_0 x_0 & \\
 & \quad + 16 S & \quad - 8 x_0 S & \\
 & \quad + x_0^2 & & \\
 & \quad + y_0^2 & &
\end{array}$$

$$16Ax^3 - 8(2A - B)x_0 x^2 + [(SA - 4B)x_0^2 + (2A - B)y_0^2]x + \frac{A - B}{2} x_0(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

qui déterminent les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole (2) avec le cercle et avec la conique K. La première doit admettre les trois racines de la seconde. Écrivant que le reste de la division de leurs premiers membres est nul quel que soit x, on a, pour déterminer α, β et S, les trois équations du premier degré

$$16A^2S - 16ACx_0\alpha - 8A^2y_0\beta + 4C^2x_0^2 - ACy_0^2 = 0,$$

$$8A^2x_0S - 8ACx_0^2\alpha - 2A(A + C)y_0^2\alpha - 2A^2x_0y_0\beta + 2C^2x_0^3 + \frac{C^2}{2}x_0y_0^2 = 0,$$

$$A^2x_0^2S - ACx_0(x_0^2 + y_0^2)\alpha + \frac{C^2}{4}x_0^2(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

où

$$C = A - B.$$

On en tire

$$\alpha = -\frac{A^2 - 3AB + 2B^2}{8AB}x_0, \quad \beta = -\frac{2A^2 - 3AB + B^2}{8AB}y_0,$$
$$S = -\frac{(A-B)^2}{8AB}(x_0^2 + y_0^2).$$

L'équation du cercle passant par les pieds des trois normales considérées est donc

$$(4)\quad \begin{cases} 8AB(x^2+y^2) + 2(A^2 - 3AB + 2B^2)x_0 x \\ \quad + 2(2A^2 - 3AB + B^2)y_0 y - (A-B)^2(x_0^2 + y_0^2) = 0. \end{cases}$$

On arrive plus rapidement à cette équation de la manière suivante.

L'équation de la conique K peut s'écrire

$$x[2Ax - (A-B)x_0] + y[2By + (A-B)y_0].$$

Si l'on y remplace successivement le facteur y et le facteur x par les valeurs $y = \frac{y_0 x}{4x - x_0}$, $x = \frac{x_0 y}{4y - y_0}$, tirées de l'équation (2), on a, en chassant les dénominateurs et supprimant la solution $x = 0$, $y = 0$, relative au point O, les deux équations

$$[2Ax - (A-B)x_0](4x - x_0) \\ + [2By + (A-B)y_0]y_0 = 0,$$
$$[2Ax - (A-B)x_0]x_0 + [2By + (A-B)y_0](4y - y_0) = 0,$$

qui doivent être vérifiées par les coordonnées des pieds des trois normales considérées. En ajoutant ces équations multipliées respectivement par B et par A, afin de réduire au même coefficient les termes en x^2 et y^2, on a

$$8AB(x^2+y^2) + 2(A^2 - 3AB + 2B^2)x_0 x \\ + 2(2A^2 - 3AB + B^2)y_0 y - (A-B)^2(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

équation du cercle passant par les pieds des trois normales : c'est l'équation trouvée plus haut.

Note. — La même question a été résolue par MM. H. Lez et A. Leinekugel.

THÉORÈMES SUR LES NORMALES A L'ELLIPSE ;

PAR M. WEILL.

L'ellipse étant rapportée à ses axes, considérons une normale abaissée d'un point (α, β) et dont le pied ait pour coordonnées x_1, y_1. Nous aurons la relation bien connue

$$(1) \qquad (a^2 - b^2)x_1 y_1 + b^2\beta x_1 - a^2\alpha y_1 = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, x_1 par $\dfrac{ay'}{b}$ et y_1 par $\dfrac{-bx'}{a}$; elle devient

$$(a^2 - b^2)x'y' - a^2y'\frac{b}{a}\beta - b^2x'\frac{a}{b}\alpha = 0.$$

On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si l'on abaisse d'un point les normales à une ellipse, et si l'on mène les quatre diamètres de l'ellipse qui sont perpendiculaires à ces normales, les normales à l'ellipse menées aux extrémités des quatre demi-diamètres obtenus en tournant dans le même sens sont concourantes.*

Reprenons la relation (1) et remplaçons x_1 et y_1 par $\dfrac{a^2}{x}$ et $\dfrac{b^2}{y}$; nous obtenons la relation

$$(2) \qquad a^2 - b^2 + \beta y - \alpha x = 0.$$

Le point (x, y), dont les coordonnées sont $\frac{a^2}{x_1}$ et $\frac{b^2}{y_1}$, a une position remarquable : c'est le quatrième sommet du rectangle formé sur les axes de l'ellipse et ayant pour diagonale la tangente au point (x_1, y_1). Les quatre points obtenus en considérant les quatre normales issues du point (α, β) sont donc sur la droite représentée par l'équation (2). Les milieux des diagonales des quatre rectangles, c'est-à-dire les milieux des portions de tangentes limitées aux axes, sont donc sur une droite ayant pour équation

$$(3) \qquad a^2 - b^2 + 2\beta y - 2\alpha x = 0.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème II. — *Si d'un point on mène les normales à une série d'ellipses ou d'hyperboles homofocales, et les tangentes aux pieds de ces normales, les milieux des portions des tangentes limitées aux axes sont sur une droite fixe ; cette droite est la polaire du point considéré par rapport à l'hyperbole équilatère homofocale aux coniques considérées.*

Considérons la tangente variable limitée aux axes, son milieu décrit une droite fixe ; donc elle enveloppe une parabole tangente aux deux axes et à la droite fixe ; le lieu des pieds des normales est donc le lieu des projections d'un point de la directrice d'une parabole sur ses tangentes. En continuant à développer les conséquences de notre théorème, on retrouve les théorèmes si connus et qui sont relatifs aux normales aux coniques homofocales.

Proposons-nous de mener d'un point (α, β) une normale à l'ellipse ; construisons la droite Δ relative à ce point et déterminée par l'équation (3) ; cherchons les points où cette droite rencontre la courbe du quatrième degré qui est le lieu des milieux des portions des tangentes à l'ellipse comprises entre les deux axes; à chacun des points de rencontre M de la droite Δ avec cette courbe correspondra une normale dont on obtiendra le pied en menant par le point M une droite terminée aux axes et partagée en ce point en deux parties égales; le point où cette droite touche l'ellipse sera le pied de la normale. Le problème des normales à l'ellipse menées d'un point (α, β) est donc ramené à l'intersection d'une droite ayant pour équation

$$a^2 - b^2 + 2\beta y - 2\alpha x = 0$$

et d'une courbe du quatrième degré ayant pour équation

$$\frac{a^2}{4x^2} + \frac{b^2}{4y^2} = 1.$$

Quand la droite Δ est tangente à la courbe du quatrième degré en un point K, le point (α, β) correspondant à la droite Δ n'est autre que le *centre de courbure* de l'ellipse au point qui correspond à K; on a donc ainsi une construction du centre de courbure de l'ellipse, d'ailleurs peu intéressante; quand le point (α, β) est donné et que les coniques varient en restant homofocales, la droite Δ reste fixe, et la courbe du quatrième degré varie; les quatre points de rencontre des courbes variables avec la droite Δ déterminent sur cette droite une involution de quatre points, et le centre de gravité des quatre points demeure fixe sur la droite.

Considérons les équations de la normale à l'ellipsoïde rapporté à ses axes. Soient α, β, γ les coordonnées d'un point de l'espace, et x_1, y_1, z_1 celles du pied d'une normale menée du point (α, β, γ). Nous aurons les relations

$$\frac{\alpha - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\beta - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{\gamma - z_1}{\frac{z_1}{c^2}}.$$

Remplaçons x_1, y_1, z_1 par $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$, $\frac{c^2}{z}$, nous obtenons les relations

$$(1) \qquad \alpha x - a^2 = \beta y - b^2 = \gamma z - c^2.$$

Or, le point dont les coordonnées sont x, y, z est le sommet du parallélépipède construit sur les axes et dont trois sommets sont les points où le plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) rencontre les axes.

Appelons G_1 le centre de gravité du triangle formé par ces trois points; il aura pour coordonnées $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{z}{3}$; donc il sera sur la droite ayant pour équations

$$(2) \qquad 3\alpha x - a^2 = 3\beta y - b^2 = 3\gamma z - c^2.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème III. — *Si d'un point on abaisse des normales sur une série de surfaces du second degré homofocales, et que l'on mène les plans tangents aux pieds de ces normales, les centres de gravité des triangles déterminés sur ces plans par les trois axes sont sur une droite fixe.*

Le théorème que nous venons d'établir permet d'étudier les propriétés du système des normales menées d'un point à une série de surfaces homofocales; il ramène la recherche des normales à un ellipsoïde à l'intersection d'une droite et d'une surface du sixième degré ayant pour équations

$$3\alpha x - a^2 = 3\beta y - b^2 = 3\gamma z - c^2,$$
$$\frac{a^2}{9x^2} + \frac{b^2}{9y^2} + \frac{c^2}{9z^2} = 1.$$

Supposons que le point donné (α, β, γ) reste fixe et que les surfaces varient en restant homofocales, la droite Δ

que nous considérons restera fixe; mais, si le point se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, elle engendrera un *complexe;* si le point se meut sur une surface, la droite engendrera une *congruence;* enfin, si le point se meut sur une courbe, la droite engendrera une surface, et cette surface sera développable; en particulier, si le point décrit une droite, la droite Δ engendre un cône du second ordre. Il y a là les éléments d'une étude intéressante, mais qui nous détournerait de notre but actuel.

Reprenons la relation qui existe entre les coordonnées α, β d'un point P et les coordonnées x_1, y_1 du pied d'une des normales issues de ce point; cette relation peut s'écrire

$$\frac{\alpha - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\beta - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = k.$$

Lorsque le point A qui a pour coordonnées x_1, y_1 se déplace sur l'ellipse, si la quantité k reste constante, les coordonnées du point P satisferont aux deux équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= x_1 \frac{a^2 + k}{a^2}, \\ \beta &= y_1 \frac{b^2 + k}{b^2}. \end{aligned} \right.$$

Le point P décrira donc une ellipse ayant pour équation

$$\frac{a^2 \alpha^2}{(a^2 + k)^2} + \frac{b^2 \beta^2}{(b^2 + k)^2} = 1.$$

Par un point P donné, passent quatre de ces ellipses qui sont chacune tangentes en quatre points à la développée de l'ellipse donnée; la connaissance d'une des valeurs de k correspondant à un point P équivaut à la connaissance d'une de ces ellipses ou d'une des normales issues du point P; inversement, *si le point* P *est pris sur une de ces ellipses, l'une des normales issues du point* P *est distincte des trois autres,* car les coordonnées du pied de cette normale sont données par les équations (1), dans lesquelles les quantités α, β et k sont connues. Tous les développements qui vont suivre sont des conséquences de cette remarque.

Considérons un point P qui se déplace sur une des ellipses dont il s'agit, et appelons *normale singulière* la normale PA, dont le pied A s'obtient indépendamment des trois autres normales issues du point P. Soient B, C, D les pieds des trois autres normales issues du point P; quand le point P se déplace sur l'ellipse (E), le triangle BCD se déplace en même temps; la normale au point B à l'ellipse donnée rencontre l'ellipse (E) en deux points P et Q; elle est normale singulière relativement au point Q et normale non singulière relativement au point P : donc à une position du point B ne correspond qu'un seul triangle BCD; donc ce triangle, dans son déplacement, enveloppe une conique (L) ayant les mêmes axes en position que l'ellipse donnée. Or les ellipses (E) recouvrent tout le plan; il en est de même des ellipses (L) : donc tout triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position jouira des propriétés du triangle BCD, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Quand un triangle* BCD *se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses* (S) *et* (L) *ayant les mêmes axes en position, les normales à l'ellipse* (S) *aux trois points* B, C, D *concourent en un même point* P; *le lieu de ce point* P *est une ellipse tangente en quatre points à la développée de* (S).

Théorème V. — *Si l'on mène d'un point les quatre normales à une ellipse, on peut tracer une conique* *ayant les mêmes axes en position et tangente aux trois côtés de l'un des triangles formés avec trois des quatre pieds des normales comme sommets; chacun de ces triangles donne d'ailleurs, en général, naissance à une conique distincte.*

Ce théorème n'est qu'un énoncé différent du théorème précédent.

Reprenons les ellipses particulières que nous avons considérées. Si l'on donne à k diverses valeurs, on aura une série d'ellipses partageant dans un même rapport les segments des normales comptés depuis le pied de ces normales; parmi ces courbes se trouvent des droites et des cercles : les droites sont les axes de symétrie de l'ellipse donnée, et les cercles sont les cercles concentriques à l'ellipse donnée et ayant pour rayons $a - b$ et $a + b$. On retrouve ainsi des résultats bien connus.

Considérons maintenant les quatre normales issues d'un point $P(\alpha, \beta)$, parmi lesquelles se trouve une *normale singulière* correspondant à la valeur k.

L'hyperbole équilatère qui passe par les pieds des normales a pour équation

$$(1) \qquad a^2\alpha y - b^2\beta x - (a^2 - b^2)xy = 0.$$

L'équation qui donne les ordonnées des pieds des normales est

$$(2) \qquad (a^2 - b^2)^2 y^4 + 2b^2(a^2 - b^2)\beta y^3 + \ldots - b^6\beta^2 = 0.$$

Considérons un cercle ayant pour équation

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0.$$

Les ordonnées des points de rencontre du cercle et de l'ellipse sont données par l'équation

$$(4) \qquad \begin{cases} (a^2 - b^2)^2 y^4 + 4Bb^2(a^2 - b^2)y^3 + \ldots \\ \qquad + b^4[(a^2 + C)^2 - 4a^2A^2] = 0. \end{cases}$$

Soit $A(x_1, y_1)$ le pied de la *normale singulière* issue du point P, et soient y_2, y_3, y_4 les pieds des trois autres normales issues du point P, points que nous désignerons par B, C, D; si le cercle représenté par l'équation (3) passe par les points B, C, D, les équations (2) et (4) auront pour solutions y_1, y_2, y_3, y_4, et $-y_1, y_2, y_3, y_4$. On aura donc

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-2b^2\beta}{a^2 - b^2},$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-4Bb^2}{a^2 - b^2}.$$

On en déduit

$$y_1 = \frac{b^2}{a^2 - b^2}(2B - \beta),$$

et, comme on a

$$y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 + k},$$

il vient

$$(5) \qquad 2B = \frac{a^2 + k}{b^2 + \beta}\beta, \quad 2A = \frac{b^2 + k}{a^2 + k}\alpha.$$

Donc, si l'on suppose que le point P se déplace sur l'ellipse correspondant à la valeur k, le centre T du cercle circonscrit au triangle BCD décrit une ellipse dont on a facilement l'équation à l'aide des formules (5). On trouve de même que le centre de gravité de ce triangle a pour coordonnées

$$y = -\frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)}y_1,$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)}x_1.$$

Ce point G décrit donc une ellipse dont on a facilement l'équation; il en est de même pour le point de concours H des hauteurs et le centre I du cercle des neuf points du triangle. Considérons la figure formée avec les points P, A, T, G, H, I; toutes les droites de cette figure restent, pendant leur déplacement, normales à autant d'ellipses fixes : en effet, l'une quelconque de ces droites réunit deux points dont les coordonnées sont de la forme $(\lambda x_1, \lambda' y_1)$, $(\mu x_1, \mu' y_1)$, et il est évident que, si le point dont les coordonnées sont x_1, y_1 décrit une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

les deux points que nous considérons décriront des ellipses ayant les mêmes axes en position, et la droite qui les joint sera normale à une ellipse ayant aussi les mêmes axes en position. On a donc le théorème suivant :

Théorème VI. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, les normales aux sommets concourent en un point* P *qui décrit une ellipse; le centre de gravité du triangle, le point de concours des hauteurs, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle des neuf points décrivent des ellipses, et les droites qui joignent le point* P *à ces points, ainsi que la droite qui joint ces points, sont normales à autant d'ellipses fixes.*

Reprenons les équations (2) et (4); elles nous donnent encore

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = \frac{-b^6\beta^2}{(a^2-b^2)^2},$$

$$-y_1 y_2 y_3 y_4 = \frac{b^4[(a^2+C)^2-4a^2A^2]}{(a^2-b^2)^2};$$

on en tire

$$b^2\beta^2=(a^2+C)^2-4a^2A^2,$$

mais on a

$$2A=\frac{b^2+k}{a^2+k}\alpha,$$

donc

$$(a^2+C)^2 = a^2\alpha^2\left(\frac{b^2+k}{a^2+k}\right)^2 + b^2\beta^2 = (b^2+k)^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right),$$

d'où

$$a^2+C = -b^2-k,$$
$$C = -k-(a^2+b^2).$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème VII. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, le centre des ellipses a une puissance constante par rapport au cercle circonscrit au triangle, qui a, par conséquent, pour enveloppe une anallagmatique du quatrième degré.*

Lorsque la quantité k varie, toutes ces courbes du quatrième degré restent tangentes à l'ellipse donnée en ses quatre sommets. Supposons, en particulier, que la puissance C soit nulle, ce qui donne pour k la valeur $-(a^2+b^2)$; les valeurs $2A$, $2B$ deviennent alors

$$2A = -x_1,$$
$$2B = -y_1.$$

Le cercle dont il s'agit est alors décrit sur un demi-diamètre de l'ellipse comme diamètre. Ce cercle, qui passe par les pieds B, C, D des trois normales issues du point P, passe par le point A′, symétrique du pied A de la normale singulière par rapport au centre de l'ellipse. Prenons les demi-diamètres conjugués des droites OB, OC, OD; ces trois demi-diamètres détermineront sur l'ellipse trois points B′, C′, D′, et les normales en ces trois points seront concourantes; soit P′ leur point de concours : il est facile de voir qu'il est sur l'ellipse. Soit k le point où la normale en B′ rencontre le grand axe; le demi-diamètre OB, perpendiculaire à cette normale, a une longueur égale à $\frac{b}{a}$ B'K; si donc nous faisons tourner de 90° autour du point O le cercle OBCD, les droites OB, OC, OD deviendront parallèles aux trois normales issues du point P', et le diamètre OA' de ce cercle deviendra parallèle à la normale qui a son pied en P'. Donc, si sur les normales issues de P' on prend des longueurs proportionnelles aux segments B'K interceptés entre l'axe et les pieds des normales, ou, plus généralement, entre les pieds des normales et l'une de nos ellipses, les extrémités de ces droites seront sur un cercle tangent à l'ellipse en P', le centre de ce cercle sera sur l'une de nos ellipses, et la normale issue de ce point et ayant son pied en P' sera la normale singulière correspondante. On a donc le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Si l'on décrit un cercle sur un rayon* OA' *de l'ellipse comme diamètre, il rencontre l'ellipse en trois points* B, C, D, *les normales en ces trois points sont concourantes, et les trois normales aux points* B', C', D', *extrémités des demi-diamètres conjugués de* OB, OC, OD, *concourent sur l'ellipse.*

Reprenons l'étude d'un triangle BCD qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position; nous nous proposons de calculer les longueurs de ses côtés; le problème, attaqué directement, donne lieu à des calculs à peu près impraticables; nous allons établir, à l'aide des théorèmes précédents, des relations très simples entre les longueurs de ces côtés. Proposons-nous de calculer le carré du rayon du cercle circonscrit au triangle; rappelons que les normales à l'ellipse aux points B, C, D concourent en un point P ayant pour coordonnées α, β; en considérant l'ellipse (E) qui passe au point P et qui correspond à la valeur k, et appelant x_1, y_1 les coordonnées du pied de la normale singulière issue du point P, A et B les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle BCD, R le rayon de ce cercle, on a, en se reportant aux formules précédemment établies,

$$C = -(a^2 + b^2 + k) = A^2 + B^2 - R^2,$$

d'où

$$(\lambda) \quad R^2 = a^2 + b^2 + k + \frac{1}{4}\left[x_1^2 \frac{(b^2 + k)^2}{a^4} + y_1^2 \frac{(a^2 + k)^2}{b^4}\right].$$

Comme le point (x_1, y_1) est sur l'ellipse, on voit que l'expression contient le seul paramètre y_1^2 *au premier degré.*

En appelant x, y les coordonnées du centre de gravité du triangle BCD, δ la distance du centre de gravité au centre du cercle circonscrit et Σ^2 la somme des carrés des côtés du triangle, on a

$$\Sigma^2 = 9(R^2 - \delta^2),$$
$$\delta^2 = (A - x)^2 + (B - y)^2,$$
$$\Sigma^2 = 9(a^2 + b^2 + k - x^2 - y^2 + 2Ax + 2By).$$

En remplaçant x, y, A, B par les valeurs qui ont été données plus haut, on trouve, après quelques simplifications,

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Sigma^2}{9} &= a^2 + b^2 + k - \frac{2y_1^2}{9b^2c^2}(a^2 + b^2 + 2k)^2 \\ &\quad + \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3c^2}\left(b^2 + k - a^2 \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3c^2}\right). \end{aligned} \right.$$

On voit que cette expression est encore une fonction linéaire du paramètre y_1^2.

Enfin, cherchons à calculer la surface du triangle BCD. Rappelons que la surface du triangle dont les sommets ont pour coordonnées x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3

est donnée par l'égalité

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Or ici on a

$$x_4 = \frac{a^2\alpha y_4}{b^2\beta + c^2 y_4};$$

on trouve alors

$$\frac{2S}{b^2c^2a^2\alpha\beta} = \frac{(y_2 - y_4)(y_3 - y_2)(y_4 - y_3)}{(b^2\beta + c^2 y_4)(b^2\beta + c^2 y_2)(b^2\beta + c^2 y_3)}.$$

Les quantités y_4, y_2, y_3 sont données par une équation facile à former, et l'on trouve, après un calcul assez long et qu'il est inutile de rapporter,

$$(\nu)\quad \frac{S^2}{a^2} = y_1^2\left(\frac{a^2 + b^2 + 2k}{c^2}\right)^3 - \frac{b^2}{c^2}(b^2 + k)\left(2 + \frac{b^2 + k}{c^2}\right)^3.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème IX. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, il existe deux relations linéaires entre le carré de la surface, le carré du rayon du cercle circonscrit et la somme des carrés des trois côtés.*

Le théorème que nous venons d'établir donne la solution d'un grand nombre de questions particulières ; nous allons appliquer nos formules à quelques cas simples. Remarquons d'abord que, si le coefficient du paramètre variable y_1^2, qui définit le triangle dans chacune de ses positions, est nul, la fonction correspondante R^2, Σ^2 ou S^2 est constante.

Égalons, par exemple, à zéro le coefficient de y_1 dans l'expression (λ) qui donne R^2 ; nous aurons

$$\frac{(a^2+k)^2}{b^4} - \frac{(b^2+k)^2}{a^2 b^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$k = a^2 + ab + b^2$$

et

$$k = ab - a^2 - b^2.$$

La seconde valeur convient seule; elle correspond au cas où le triangle BCD est inscrit dans l'ellipse et circonscrit à un cercle concentrique; en transportant cette valeur de k dans les expressions de Σ^2 et de S^2, on obtient les valeurs de ces quantités en fonction du paramètre variable y_1^2.

Si l'on considère le coefficient de y_1^2 dans les expressions générales de Σ^2 et de S^2, on voit qu'il est nul pour la même valeur $k = -\frac{a^2+b^2}{2}$ dans les deux expressions. On voit donc que, quand un triangle est inscrit dans une ellipse et circonscrit à une ellipse homothétique et dont les axes sont deux fois plus petits, non seulement sa surface est constante, comme on le sait, mais aussi la somme des carrés de ses côtés, résultat très facile à vérifier par un calcul direct. On trouve alors pour R^2 l'expression

$$R^2 = \frac{(3a^2+b^2)^2}{16a^2} + y_1^2 \frac{c^6}{16a^2 b^4}.$$

Prenons un autre cas particulier. Supposons que les deux coniques auxquelles le triangle reste inscrit et circonscrit soient homofocales : on sait, d'après un beau théorème de M. Chasles, que le triangle est alors de périmètre constant; mais alors l'expression de S^2 et celle de Σ^2 nous montrent, après l'élimination de y_1^2, qu'il existe une relation linéaire entre la somme des produits deux à deux des côtés et le produit de ces mêmes côtés. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses homofocales, il existe une relation linéaire entre le produit de ses côtés et la somme de leurs produits deux à deux.*

Pour trouver cette relation numérique, il faut d'abord calculer le périmètre constant du triangle ; on trouve

$$p = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \sqrt{2\sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)} - a^2 - b^2}$$
$$+ \sqrt{2a^2 - b^2 + 2\sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}}.$$

On peut remarquer que le carré de p ne contient qu'un seul radical, qui est

$$\sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}.$$

Il faut trouver la valeur de k ; pour cela, nous nous servirons des formules générales qui lient la valeur de k aux longueurs des axes des deux ellipses auxquelles le triangle reste inscrit et circonscrit ; ces relations sont, en appelant a, b, a', b' les demi-axes des deux ellipses,

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 1,$$

$$a^2 + k = \frac{a'}{a}(a^2 - b^2),$$

$$b^2 + k = \frac{-b'}{b}(a^2 - b^2).$$

Ces formules donnent immédiatement l'équation de l'ellipse décrite par le point de concours des normales ; cette ellipse a pour demi-axes

$$a'\frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad b'\frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, on trouve pour a' la valeur

$$a' = \frac{-ab^2 + \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}$$

et pour k la valeur

$$k = \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)} - a^2 - b^2.$$

En transportant cette valeur de k ainsi que la valeur de p dans les expressions de S^2 et de Σ^2, puis en éliminant y_1^2 entre ces deux relations, on trouve la relation assez compliquée, mais linéaire, entre le produit des côtés du triangle et la somme de leurs produits deux à deux. Les longueurs des trois côtés du triangle variable sont donc représentées par une équation de la forme

$$X^3 - 2pX^2 + \lambda X + m\lambda + p = 0,$$

équation dans laquelle λ est le seul paramètre variable.

Reprenons l'étude générale d'un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position. En se reportant aux notations précédentes et en considérant le triangle BCD, on voit que les points de contact des côtés de ce triangle avec leur enveloppe forment un triangle $B_1C_1D_1$ ayant les mêmes propriétés que le premier; ce triangle donne à son tour naissance à un triangle $B_2C_2D_2$, et ainsi de suite. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble de tous ces triangles. Considérons d'abord les ellipses enveloppes des côtés de ce triangle et les quantités k qui leur correspondent. Entre deux ellipses consécutives, on a les relations

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 1,$$

$$k = a^2 - \frac{a'}{a}(a^2 - b^2) = b^2 + \frac{b'}{b}(a^2 - b^2).$$

L'ellipse suivante aura pour demi-axes $\frac{a'^2}{a}$, $\frac{b'^2}{b}$. Donc, en posant $\frac{a'}{a} = \lambda$, on aura, pour déterminer la suite des axes et les quantités k, les relations

$$\begin{array}{ll} a' = \lambda a, & b' = (1-\lambda) b, \\ a'' = \lambda^2 a, & b'' = (1-\lambda)^2 b, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(m)} = \lambda^m a, & b^{(m)} = (1-\lambda)^m b. \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= a^2 - \lambda(a^2 - b^2) = a^2(1-\lambda) + \lambda b^2, \\ k_2 &= (1-\lambda)\lambda^2 a^2 + \lambda b^2 (1-\lambda)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_m &= (1-\lambda)\lambda^m a^2 + \lambda b^2 (1-\lambda)^m. \end{aligned}$$

Pour déterminer complètement les triangles les uns par rapport aux autres, il faut déterminer la relation qui existe entre les ordonnées des pieds des normales singulières relatives aux deux points P et P_1 où viennent se rencontrer les normales en B, C, D et en B_1, C_1, D_1, sommets de deux triangles consécutifs. Si l'on appelle x_2, y_2 les coordonnées du point B situé sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, et (α', β') les coordonnées du point de rencontre des normales menées aux points C_1, D_1 à l'ellipse enveloppe des côtés du triangle BCD, on a les relations connues

$$\beta' = \frac{(a'^2 - b'^2)\, y_2 (x_2^2 - a'^2)}{a'^2 y_2^2 + b'^2 x_2^2}, \quad \alpha' = \ldots,$$

et, en remplaçant x_2 par sa valeur en fonction de y_2, puis chassant le dénominateur, on a une relation du troisième degré en y_2 qui doit donner à la fois les ordonnées des trois points B, C, D. On a, pour somme des racines,

$$y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-\left(a'^2 - b'^2 \frac{b^2}{a^2}\right)\beta'}{\frac{b^2}{a^2}(a'^2 - b'^2)}.$$

En remplaçant cette somme des racines par sa valeur en fonction de β, ordonnée du point de concours des normales en B, C, D, valeur tirée des calculs faits au commencement, on voit qu'il existe deux relations de la forme

$$\beta = \lambda\beta', \quad \alpha = \mu\alpha'.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XI. — *Si l'on considère un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, les normales aux sommets de ce triangle concourent en un point* P, *les normales aux points de contact de ses côtés avec leur enveloppe concourent en* P_1, *et ainsi de suite ; tous les points* P, P_1, ... *décrivent des ellipses, et les droites qui joignent entre eux de toutes les manières les points* P, P_1, ..., *les centres des cercles circonscrits à tous les triangles que l'on déduit du premier, les points de concours de leurs hauteurs, les centres de gravité, etc., se déplacent en restant normales à autant d'ellipses fixes.*

En reprenant nos formules, nous trouvons

$$y'_1 = y_1 \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)b^4}{a^4\lambda^2 - b^4(1-\lambda)^2} = y_1 \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)}{\frac{a^4}{b^4}\lambda^2 - (1-\lambda)^2}.$$

Pour passer au triangle suivant, il faudra changer $\frac{a^4}{b^4}$ en $\frac{a^4}{b^4} \times \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^4}$; l'expression de y''_1 peut se mettre sous la forme

$$y''_1 = \frac{y'_1}{\mathrm{U}z + \mathrm{V}},$$

en posant

$$U = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)(1-2\lambda)}\frac{a^4}{b^4},$$

$$z = \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^4},$$

$$V = \frac{\lambda - 1}{1 - 2\lambda}.$$

On aura alors

$$y_1''' = \frac{y_1''}{Uz^2 + V},$$

$$y_1^{\text{IV}} = \frac{y_1'''}{Uz^3 + V}.$$

On a donc, pour l'expression générale de $y_1^{(m)}$,

$$y_1^{(m)} = \frac{y_1}{(U+V)(Uz+V)(Uz^2+V)\ldots(Uz^{m-1}+V)}.$$

D'après cela, nous pouvons calculer les quantités R^2, S^2, Σ^2 relatives au $m^{\text{ième}}$ triangle, déduit du triangle BCD, en fonctions de quantités connues; l'ordonnée $\beta^{(m)}$ du point de concours des normales aux sommets de ce $m^{\text{ième}}$ triangle est donnée par la relation

$$\beta^{(m)} = (\lambda - 1)\frac{\lambda^{2m}a^2 - (1-\lambda)^{2m}b^2}{(1-\lambda)^{2m}b^2}\,y_1^{(m)}.$$

On pourra donc, à l'aide de ces formules, calculer les éléments de l'un quelconque des triangles de la suite considérée, en fonction des éléments du premier triangle. On peut se proposer, relativement aux diverses quantités qui figurent dans cette question, divers problèmes d'Analyse plus ou moins intéressants; on peut, par exemple, chercher l'équation de la courbe qui passe par les points, en nombre infini, où viennent se croiser les trois normales aux sommets de chacun des triangles déduits successivement du premier; quand le premier triangle est défini, chacun de ces points est connu, et la courbe qui les contient tous est définie.

La question générale que nous avons traitée, et qui se rapporte à un triangle quelconque inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, peut aussi être envisagée comme une question de maximum ou de minimum, et c'est ce que nous allons démontrer.

Considérons une ellipse donnée A, et un triangle MNP inscrit dans cette ellipse et tel qu'une fonction symétrique des éléments de ce triangle soit maximum ou minimum; supposons qu'un *point quelconque* de l'ellipse puisse être pris pour l'un des sommets du triangle répondant à ce maximum ou ce minimum : ce premier sommet étant pris au hasard sur l'ellipse, le triangle minimum correspondant sera complètement déterminé et *d'une seule manière;* donc il y aura une infinité de triangles répondant au maximum, et tous ces triangles inscrits à l'ellipse seront en même temps circonscrits à une ellipse qui, par raison de symétrie, aura les mêmes axes en position que l'ellipse donnée ; la fonction qui sera maximum pour tous ces triangles qui se déplacent d'une manière *continue* sera nécessairement *constante.* On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XII. — *Si un point quelconque d'une ellipse peut être pris pour l'un des sommets d'un triangle inscrit et qui soit tel qu'une fonction symétrique donnée de ses éléments soit maximum ou minimum, il existe une infinité de ces triangles qui sont tous circonscrits à une ellipse ayant les mêmes axes en position, et la fonction considérée est constante pour tous ces triangles.*

Les cas particuliers les plus simples du théorème que nous venons d'énoncer sont bien connus : ce sont les cas où la fonction donnée est la surface ou le périmètre du triangle. Il est important de remarquer que, *en général,* on ne peut prendre pour l'un des sommets d'un triangle répondant à la question de maximum ou de minimum un point quelconque de l'ellipse, et il est facile de se rendre compte de ce fait. Cherchons, par exemple, à inscrire dans l'ellipse un triangle dont la somme des carrés des côtés soit maximum : il est facile de voir que les normales à l'ellipse aux sommets de ce triangle devront être les médianes du triangle. Or, un point étant pris au hasard sur l'ellipse, on ne peut construire un triangle ayant son sommet en ce point et dont les médianes soient les normales aux trois sommets. Au contraire, un point étant pris au hasard sur l'ellipse, on peut construire un triangle inscrit ayant un sommet en ce point et dont les hauteurs ou les bissectrices soient les normales aux trois sommets, et ces deux cas sont précisément ceux du triangle de surface maximum et du triangle de périmètre maximum.

Considérons un triangle ABC donné et qui reste fixe; d'après les théorèmes que nous avons établis, il existe une infinité de systèmes de deux coniques ayant les mêmes axes en position, et dont l'une est inscrite et l'autre circonscrite à ce triangle; l'un de ces systèmes étant choisi, les normales en A, B, C à la conique circonscrite concourent en un point P. Nous nous proposons d'étudier le lieu de ce point P quand le système des coniques varie.

Nous allons d'abord établir une proposition de Géométrie élémentaire qui peut être utile dans certains cas. Cette proposition est la suivante :

Théorème XIII. — *Si l'on considère un triangle* ABC *et un point* P *pris dans son plan; si l'on projette ce* *point en* Q, R, S *sur les trois côtés et si l'on considère le triangle* A'B'C', *dont les côtés sont les perpendiculaires élevées en* A, B, C *aux droites* PA, PB, PC, *les deux rapports*

$$(1) \qquad \frac{QB.SA.RC}{QC.SB.RA},$$

$$(2) \qquad \frac{A'B.C'.A'B'C}{C'B.B'A.A'C}$$

sont égaux.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que les triangles semblables donnent les égalités

$$\frac{QC}{PC}=\frac{BA'}{PA'}, \quad \frac{QB}{PB}=\frac{CA'}{PA'},$$

d'où

$$\frac{QC}{QB}=\frac{BA'}{CA'}\,\frac{PC}{PB}.$$

En écrivant deux autres égalités analogues, on a le théorème énoncé, qui s'applique au cas, plus général, où les perpendiculaires seraient remplacées par des droites faisant avec les droites considérées un même angle donné quelconque. (*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

Monsieur et cher Collègue,

Le Rapport de M. Laisant (Congrès de Montpellier) donne un résumé d'une méthode de transformation des figures de notre ancien camarade G. de Longchamps. Si je n'ai pas signalé le fait dans la Note que j'ai rédigée et qu'ont publiée les *Nouvelles Annales,* c'est que la rédaction de cette Note remonte à trois ans, que les résultats importants en ont été insérés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et que j'ai signé le bon à tirer avant le Congrès de Montpellier et à plus forte raison avant l'impression du Rapport de M. Laisant. Je vous prie de signaler ce fait dans les *Nouvelles Annales;* car, si je fais bon marché des questions d'amour-propre, j'attache une grande importance aux questions de probité.

Veuillez agréer, etc.

E. AMIGUES.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE; par M. *Chasles*. Deuxième édition. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

2. LEÇONS SUR LA GÉOMÉTRIE, par *Alfred Clebsch;* recueillies et complétées par *Ferdinand Lindemann*, professeur à l'Université de Fribourg; traduites par *Adolphe Benoist,* docteur en Droit, membre de la Société mathématique de France. — Tome II. COURBES ALGÉBRIQUES EN GÉNÉRAL ET COURBES DU TROISIÈME ORDRE. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

3. ÉLÉMENTS DE CALCUL APPROXIMATIF; par *Charles Ruchonnet* (de Lausanne). Troisième édition, revue. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

4. EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES; par *Charles Ruchonnet* (de Lausanne). Quatrième édition, augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

5. ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES ET CINÉMATIQUES. NOTE SUR

QUELQUES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ET DE CINÉMATIQUE et RÉPONSE AUX RÉCLAMATIONS DE M. L'ABBÉ AOUST; par *E.-J. Habich*, vice-président du Comité central du corps des ingénieurs du gouvernement du Pérou. Lima, Carlos Paz Soldan, 1880.

6. AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS. Editor in chief, J.-J. Sylvester. Associate editor in charge, William E. Story. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. III. Number 2. Cambridge, University press, printed for the editors by John Wilson and Son. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

7. ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI, anno CCLXXVIII, 1880-1881; serie terza. — *Trasunti*, vol. V, fascicoli 1°, 2°, 3°. Roma, coi tipi del Salviucci; 1881.

QUESTIONS.

1355. Les droites rectangulaires OX, OY sont les directions des axes d'une ellipse;

M un point de la courbe;

N le point où la normale en M rencontre l'axe OX;

MQ la perpendiculaire abaissée du point M sur OY;

MNP un triangle dont les côtés MP, NP sont respectivement égaux à MQ, NO.

Si l'on prend sur la bissectrice de l'angle MPN, et de chaque côté du point P, des distances PD, PD' égales entre elles et telles que $PD^2 = MP \times PN$, la circonférence passant par les points D, D' et ayant son centre sur OY coupera l'axe OX aux deux foyers de l'ellipse.

(A. BOILLEAU.)

THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. CH. BIEHLER.

SECONDE PARTIE.

1. Nous allons considérer maintenant le cas où le point multiple est à l'infini. Supposons-le d'abord à l'infini dans la direction de l'axe des y, et soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x, y) = \varphi_p(x)y^{m-p} + \varphi_{p+1}(x)y^{m-p-1} + \ldots \\ + \varphi_{m-1}(x)y + \varphi_m(x) = 0 \end{aligned}\right.$$

l'équation de la courbe ordonnée suivant les puissances décroissantes de y, $\varphi_\mu(x)$ désignant d'une manière générale un polynôme de degré μ en x.

Soit a une racine simple de l'équation $\varphi_p(x) = 0$.

Coupons la courbe par une droite parallèle à la droite $x = a$ et voisine de cette droite, soit $x = a + \varepsilon$; l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_p(a+\varepsilon)y^{m-p} + \varphi_{p+1}(a+\varepsilon)y^{m-p-1} + \ldots \\ + \varphi_{m-1}(a+\varepsilon)y + \varphi_m(a+\varepsilon) = 0 \end{aligned}\right.$$

nous donnera les ordonnées des points d'intersection de la droite et de la courbe. Posons $y = \frac{1}{z}$ et multiplions les deux membres de l'équation (2) par z^{m-p}; il viendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_p(a+\varepsilon) + \varphi_{p+1}(a+\varepsilon)z + \ldots \\ + \varphi_{m-1}(a+\varepsilon)z^{m-p-1} + \varphi_m(a+\varepsilon)z^{m-p} = 0. \end{aligned}\right.$$

A chaque racine infiniment petite de l'équation (3) correspond une racine infiniment grande de l'équation (2).

Supposons

$$\varphi_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+2}(a) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{p+q-1}(a) = 0,$$

et soit $\varphi_{p+q}(a)$ la première des quantités de la forme $\varphi_\mu(a)$, qui ne s'annule pas; l'équation (3) prendra la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon\left[\varphi'_p(a) + \ldots + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p!}\varphi_p^{(p)}(a) + z\,\varphi'_{p+1}(a) + \ldots\right] \\ &\qquad + z^q[\varphi_{p+q}(a) + \varepsilon'\varphi'_{p+q}(a) + \ldots] = 0. \end{aligned} \right.$$

a étant une racine simple de l'équation

$$\varphi_p(x) = 0,$$

on a

$$\varphi'_p(a) \gtrless 0,$$

et les termes qui suivent $\varphi'_p(a)$ dans les premières parenthèses renferment tous soit ε, soit z en facteur; il en est de même pour les termes renfermés dans les secondes parenthèses, à l'exception du premier.

Quand ε tend vers zéro, l'équation (4) acquiert q racines nulles, et on pourra l'écrire sous la forme

$$(5) \qquad \varepsilon[\varphi'_p(a) + \alpha] + z^q[\varphi_{p+q}(a) + \beta] = 0,$$

α et β étant des quantités qui sont aussi voisines de zéro que l'on veut lorsqu'on substitue à z, dans les parenthèses, l'une des q racines voisines de zéro qu'acquiert l'équation (4) pour de petites valeurs de ε. On pourra donc, en raisonnant comme nous l'avons fait dans la première Partie [1], représenter par la formule

$$(6) \qquad z^q = -\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}\varepsilon$$

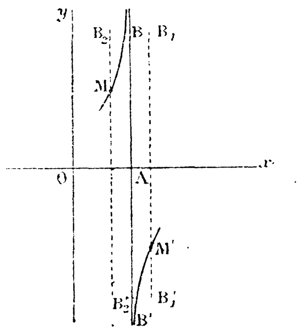
---

[1] *Voir* le numéro de novembre 1880 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

les valeurs approchées des q racines infiniment petites de l'équation (4). Si q est impair, l'équation (6) n'a qu'une seule racine réelle, et cette racine est de signe contraire à celui de $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$.

Soit $OA = a$ (*fig.* 1) et supposons le rapport $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$ positif; pour une valeur positive de ε, la racine réelle de l'équation (6) est négative; on obtient donc un point M'

Fig. 1.

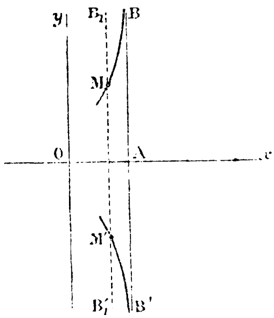


du côté des y négatifs sur la droite $B_1 B'_1$, dont l'équation est $x = a + \varepsilon$; quand ε tend vers zéro, cette racine engendre la branche $B'M'$; pour des valeurs négatives de ε, on obtient la branche BM; ces deux branches sont asymptotes à AB de part et d'autre de cette droite, et le signe du rapport $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$ donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Supposons maintenant q pair et $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$ positif; pour des valeurs positives de ε, toutes les racines infiniment petites de l'équation (5) sont imaginaires; si, au contraire, on donne à ε des valeurs négatives, deux des racines infiniment petites de l'équation (5) sont réelles;

l'une d'elles est positive et l'autre négative. On obtient donc, sur la droite $B_1B'_1$ (*fig.* 2), deux points situés l'un dans la région des y positifs, l'autre dans la région des y négatifs. Quand ε tend vers zéro, les deux racines

Fig. 2.



considérées engendrent les branches MB, M'B' situées d'un même côté de l'asymptote.

On voit que l'équation (5) a une forme analogue à celle que présente l'équation (7) de la première Partie ; ce dernier cas correspond à celui où le point est d'inflexion.

Ce que l'on vient de dire de la racine simple a de l'équation $\varphi_p(x) = 0$ s'applique à toutes les autres racines simples de cette équation; on construira donc de la même manière toutes les branches infinies fournies par les autres racines.

2. Considérons maintenant le cas où $\varphi_p(x) = 0$ admet une racine double a; dans ce cas,

$$\varphi'_p(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''_p(a) \gtrless 0;$$

l'équation (3) pourra donc s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a)+\ldots+\dfrac{\varepsilon^p}{p!}\varphi^{(p)}_p(a) \\ \quad + z[\varphi_{p+1}(a)+\varepsilon\varphi'_{p+1}(a)+\ldots]+\ldots \\ \quad + z^{m-p}\left[\varphi_m(a)+\varepsilon\varphi'_m(a)+\ldots+\dfrac{\varepsilon^m}{m!}\varphi^{(m)}_m(a)\right]. \end{cases}$$

Supposons que a n'annule pas la fonction $\varphi_{p+1}(x)$; dans ce cas, l'équation (7) pourra s'écrire

$$(8)\qquad \frac{\varepsilon^2}{1.2}[\varphi''_p(a)+\alpha]+z[\varphi_{p+1}(a)+\beta]=0,$$

analogue à l'équation (11) de la première Partie.

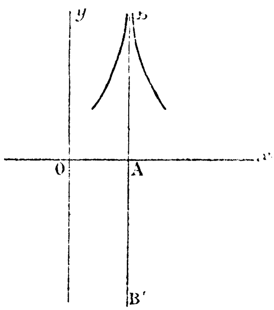
Les quantités α et β sont aussi petites que l'on veut lorsque z désigne la racine infiniment petite de l'équation (8).

La valeur approchée de z est l'expression

$$z=-\frac{\varphi''_p(a)}{\varphi_{p+1}(a)}\frac{\varepsilon^2}{1.2}.$$

On voit aisément qu'à cette racine correspondent deux

Fig. 3.



branches de courbe analogues à celles de la *fig.* 3, construite dans l'hypothèse $\dfrac{-\varphi''_p(a)}{\varphi_{p+1}(a)}>0$.

Ces considérations s'appliquent à toutes les racines doubles de l'équation $\varphi_p(x) = 0$ qui n'annulent pas $\varphi_{p+1}(x)$.

3. Considérons maintenant le cas où $\varphi_{p+1}(a) = 0$ et $\varphi'_{p+1}(a) \gtrless 0$, ainsi que $\varphi_{p+2}(a) \gtrless 0$, a étant toujours une racine double de $\varphi_p(x) = 0$.

L'équation (3) prendra alors la forme

$$(9) \qquad \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a) + z\varepsilon\varphi'_{p+1}(a) + z^2\varphi_{p+2}(a) + \gamma = 0,$$

γ étant une somme de termes qui sont tous infiniment petits devant les trois premiers pour des valeurs infiniment petites de ε et de z.

Posons

$$z = \zeta\varepsilon;$$

l'équation (9), après cette substitution, renferme dans son premier membre ε^2 en facteur; si l'on débarrasse le premier membre de ce facteur, il vient

$$(10) \qquad \frac{1}{1.2}\varphi''_p(a) + \zeta\varphi'_{p+1}(a) + \zeta^2\varphi_{p+2}(a) + \gamma' = 0,$$

γ' étant une somme de termes qui renferment tous ε en facteur.

Quand ε est très petit, la fonction ζ a une valeur aussi voisine que l'on veut de l'une des racines de l'équation du second degré

$$(11) \qquad \frac{1}{1.2}\varphi''_p(a) + \zeta\varphi'_{p+1}(a) + \zeta^2\varphi_{p+2}(a) = 0.$$

Soient ζ_0 et ζ_1 les racines de cette dernière équation; supposons ζ_0 et ζ_1 réelles et inégales; les deux racines de l'équation en z qui tendent vers zéro auront pour valeurs approchées

$$z = \zeta_0\varepsilon, \quad z = \zeta_1\varepsilon;$$

par suite, si ζ_0 et ζ_1 sont de même signe, la courbe présentera une disposition analogue à celle de la *fig.* 4 (ζ_0 et ζ_1 sont supposés positifs), et si ζ_0 et ζ_1 sont de signes

Fig. 4.

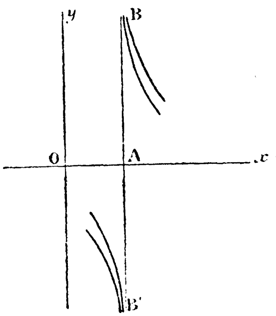
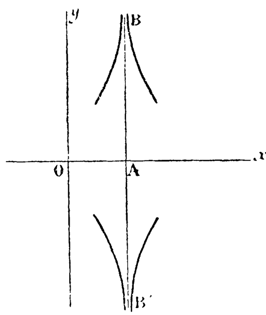


Fig. 5.



contraires, la courbe présentera une disposition analogue à celle de la *fig.* 5.

Si les racines de l'équation (11) sont imaginaires, il n'y a pas de branches réelles asymptotes à la droite BB'. Enfin si les racines de l'équation (11) sont égales, elle prendra la forme

$$(12)\quad \varphi_{p+2}(a)(\zeta-\zeta_0)^2+\mathrm{A}\varepsilon+\mathrm{B}\varepsilon^2+\mathrm{C}\varepsilon^3+\ldots=0,$$

et, par suite,

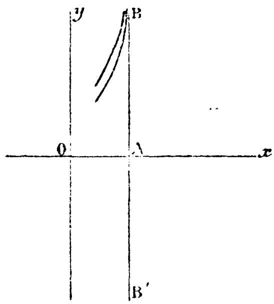
$$\zeta-\zeta_0=\pm\sqrt{-\frac{\mathrm{A}\varepsilon+\mathrm{B}\varepsilon^2+\ldots}{\varphi_{p+2}(a)}};$$

les deux valeurs de ζ qui ont pour limite ζ_0 ont donc pour valeurs approchées

$$\zeta=\zeta_0\pm\sqrt{-\frac{\mathrm{A}}{\varphi_{p+2}(a)}\varepsilon}$$

et nous donnent une disposition de la courbe analogue à celle de la *fig.* 6, qui correspond au rebroussement de seconde espèce.

Fig. 6.



4. Nous avons actuellement à examiner le cas où

$$\varphi_{p+1}(a)=0,\quad \varphi_{p+2}(a)=0,\quad \varphi_{p+N-1}(a)=0,\quad \varphi_{p+N}(a)\gtrless 0,$$
$$\varphi'_{p+1}(a)=0,\quad \varphi'_{p+2}(a)=0,\quad \varphi'_{p+n-1}(a)=0,\quad \varphi'_{p+n}(a)\gtrless 0.$$

En introduisant ces hypothèses dans l'équation (3), elle prend la forme

$$(13)\qquad \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi'_p(a)+\varepsilon z^n\varphi'_{p+n}(a)+z^N\varphi_{p+N}(a)+\delta=0,$$

δ étant une somme d'un nombre fini de termes qui sont infiniment petits devant l'un des trois termes mis en évidence.

Les développements dans lesquels nous sommes entrés pour traiter complètement ce qui se rapporte à l'équation (17) de la première Partie nous dispensent d'insister sur l'étude de l'équation (13). Nous nous bornerons donc à énoncer les résultats suivants :

1° Si $n \geq N$, les branches qui accompagnent BB' offrent la disposition de la *fig.* 3, dans le cas de N impair; et dans le cas de N pair il n'y a pas de branches accompagnant la droite $x=a$, ou bien elles offrent la disposition de la *fig.* 5.

2° Si $n < N$, $N = 2n$, on obtient les *fig.* 7 et 8 si n est pair et si les racines de l'équation en ζ^n

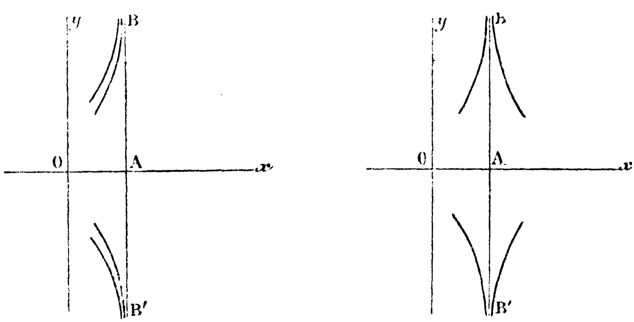
$$(14)\qquad \frac{1}{1.2}\varphi''_p(a) + \zeta^n \varphi'_{p+n}(a) + \zeta^{2n}\varphi_{p+2n}(a) = 0$$

sont réelles et inégales.

Si les racines de l'équation (14) sont égales, la courbe présente une forme analogue à celle de la *fig.* 7.

Enfin, si les racines de l'équation (14) sont imagi-

Fig. 7. Fig. 8.



naires, il n'y a pas de branches réelles qui accompagnent la droite BB′.

La discussion se fait d'ailleurs comme dans la première Partie; nous n'insisterons pas et nous allons passer au cas des asymptotes non parallèles à l'axe des y.

5. Considérons maintenant le cas où le point est à l'infini dans une direction autre que celle de l'axe des y, et soit

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x, y) = f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) + \ldots \\ \qquad\qquad + f_1(x, y) + f_0 = 0 \end{cases}$$

l'équation de la courbe.

Dans cette équation, $f_\mu(x, y)$ désigne d'une manière générale l'ensemble homogène des termes du degré μ.

Cette équation peut s'écrire

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & x^m f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots \\ & \qquad\qquad + x f_1\left(1, \frac{y}{x}\right) + f_0 = 0, \end{aligned} \right.$$

ou bien, en posant $f_\mu\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi_\mu\left(\frac{y}{x}\right)$,

$$(3)\quad x^m \varphi_m\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1}\varphi_{m-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_0 = 0.$$

Si l'on fait, en outre,

$$\frac{y}{x} = a + y', \quad x = \frac{1}{x'},$$

a étant une racine de l'équation

$$\varphi_m(u) = 0,$$

l'équation (3) deviendra, après en avoir multiplié les deux membres par x'^m,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_m(a + y') + x'\varphi_{m-1}(a + y') + \ldots \\ & \qquad + x'^{m-1}\varphi_1(a + y') + x'^m\varphi_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on développe les expressions $\varphi_\mu(a + y')$ et si l'on remarque que

$$\varphi_m(a) = 0,$$

l'équation (4) deviendra

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & y'\varphi'_m(a) + x'\varphi_{m-1}(a) \\ & \quad + \frac{y'^2}{1.2}\varphi''_m(a) + x'y'\varphi'_{m-1}(a) + x'^2\varphi_{m-2}(a) + \ldots \\ & \quad + \frac{y'^m}{m!}\varphi_m^{(m)}(a) + \frac{x'y'^{m-1}}{(m-1)!}\varphi_{m-1}^{(m-1)}(a) + \ldots \\ & \qquad\qquad + x'^m\varphi_0 = \Phi(x', y') = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$y' = \lambda x',$$

l'équation (5) prendra la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & x'[\lambda\varphi'_m(a) + \varphi_{m-1}(a)] \\ & \quad + x'^2\left[\frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_m(a) + \lambda\varphi'_{m-1}(a) + \varphi_{m-2}(a)\right] + \ldots \\ & \quad + x'^m\left[\frac{\lambda^m}{m!}\varphi_m^{(m)}(a)\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}\varphi_{m-1}^{(m-1)}(a) + \ldots + \varphi_0\right] = 0 \end{aligned}\right.$$

ou, après la suppression du facteur x',

$$(7)\qquad \psi_1(\lambda) + x'\psi_2(\lambda) + \ldots + x'^{m-1}\psi_m(\lambda) = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\psi_\mu(\lambda) = \frac{\lambda^\mu}{\mu!}\varphi_m^{(\mu)}(a) + \frac{\lambda^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\varphi_{m-1}^{(\mu-1)}(a) + \ldots + \varphi_{m-\mu}(a).$$

Dans le cas le plus général où un certain nombre de fonctions $\psi_\mu(\lambda)$ sont identiquement nulles, par exemple dans le cas où $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, ..., $\psi_{p-1}(\lambda)$ sont identiquement nulles, l'équation (7) prend la forme

$$(8)\qquad x'^{p-1}\psi_p(\lambda) + x'^p\psi_{p+1}(\lambda) + \ldots + x'^{m-1}\psi_m(\lambda) = 0$$

ou, après la suppression du facteur x'^{p-1},

$$(9)\qquad \psi_p(\lambda) + x'\psi_{p+1}(\lambda) + \ldots + x'^{m-p}\psi_m(\lambda) = 0.$$

Cette équation est de même forme que l'équation (3) de la première Partie.

6. On voit aisément que si l'on construit, dans le voisinage de l'origine, la courbe représentée par l'équation (5), $\Phi(x', y') = 0$, cela équivaudra à la construction de la courbe (1) à l'infini dans la direction fournie par la racine a de l'équation $\varphi_m(u) = 0$.

En effet, nous avons posé

$$\frac{y}{x} = a + y', \quad x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \lambda x';$$

on en tire

$$y = ax + \lambda.$$

Si nous faisons ensuite

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon,$$

cela reviendra évidemment à couper la courbe par une droite parallèle à la droite $y = ax + \lambda_0$.

Cette droite $y = ax + \lambda_0$ est asymptote à la courbe si λ_0 a été déterminé de manière que l'équation en x' acquière une nouvelle racine nulle; par suite, l'équation en x acquerra une nouvelle racine infinie. L'équation $y = ax + \lambda_0 + \varepsilon$ sera alors celle d'une parallèle à l'asymptote $y = ax + \lambda_0$ et aussi voisine que l'on voudra de cette droite pour des valeurs suffisamment petites de ε.

Les équations (7) ou (9) entre les quantités x' et λ deviennent, en posant $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, des équations entre les infiniment petits x' et ε; elles nous donneront, par des raisonnements identiques à ceux de la première Partie, les valeurs approchées infiniment petites de x' pour des valeurs très petites de ε, et, par suite, le signe de ces valeurs de x' pour des valeurs soit positives, soit négatives de ε. Donner à ε des valeurs positives, c'est couper la courbe par des parallèles à l'asymptote $y = ax + \lambda_0$ situées au-dessus de cette droite; les valeurs négatives de ε donnent des parallèles à l'asymptote situées au-dessous de cette droite.

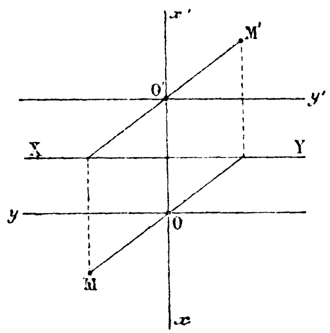
Nous n'insisterons pas davantage sur ce point, la discussion étant identique à celle que nous avons développée précédemment. Nous allons, en terminant, rappeler une propriété remarquable de la courbe représentée par l'équation (5) en x', y', que nous avons désignée par

$$\Phi(x', y') = 0.$$

La courbe $\Phi(x', y') = 0$ peut être considérée comme une transformée par perspective de la courbe représentée par $F(x, y) = 0$.

Si l'on conçoit, en effet, un système de deux plans rectangulaires (*fig.* 9) qui se coupent suivant la droite XY,

Fig. 9.



et un point o dont les distances aux deux plans soient égales entre elles et à l'unité : soient O, O' les projections de o sur les deux plans. Si l'on unit un point quelconque M du premier plan au point o par une droite, cette droite vient percer le second plan en un point M', qui est la perspective du point M. Si l'on rapporte les positions de M et de M' respectivement aux axes $x\mathrm{O}y$, $x'\mathrm{O}'y'$, on a, entre les coordonnées x, y, x', y' des points M et M', les relations

$$\frac{y}{x} = y', \quad x = \frac{1}{x'};$$

par suite, si le point M décrit dans le premier plan la courbe $F(x, y) = 0$, le point M' décrira dans le second plan la courbe $\Phi(x', y' - a) = 0$. Cette équation prend la forme $\Phi(x', y') = 0$ par une translation de l'axe des y'.

La courbe $\Phi(x', y') = 0$ peut donc être considérée cômme une perspective de la première.

THÉORÈMES SUR LES NORMALES A L'ELLIPSE;

PAR M. WEILL.

[FIN (1).]

Dans le cas du problème proposé, le rapport (2) est égal à l'unité, puisqu'il existe une conique tangente aux côtés du triangle A'B'C' aux points A, B et C. Le rapport (1) est donc aussi égal à l'unité. Par suite, si l'on désigne par α, β, γ, α', β', γ' les distances du point P aux six droites menées par chacun des points A, B et C, perpendiculairement aux côtés qui aboutissent en ces points, l'équation du lieu du point P sera

$$\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'.$$

Ce lieu, qui est du troisième degré, a pour centre le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et pour asymptotes les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés; il passe par les trois points A, B, C, par le centre du cercle circonscrit au triangle, le point de concours de ses hauteurs et les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle.

Cherchons maintenant le lieu des sommets A', B', C' du triangle obtenu en menant des tangentes à la conique

---

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XX, p. 68.

aux points A, B, C. Chacun des sommets de ce triangle décrit une courbe du troisième degré différente, et ces trois courbes ont sept points communs, qui sont les sommets A, B, C du triangle donné et les centres des cercles inscrit et exinscrits à ce triangle. Considérons, en particulier, le lieu du point A'. Cette courbe du troisième degré passe par les points A, B, C, par les centres I, I', I'', I''' des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC, et par le point diamétralement opposé au point A sur le cercle circonscrit au triangle; elle a pour directions asymptotiques les côtés AB, AC et la perpendiculaire au côté BC; enfin elle passe par le milieu du côté BC.

Parmi toutes les coniques circonscrites au triangle ABC et telles que les normales en A, B, C soient concourantes, on peut considérer les deux droites AB, AC, qui forment une conique répondant à la question; le triangle $A'B'C'$ qui lui correspond a un sommet déterminé, qui est le point A', diamétralement opposé au point A sur le cercle circonscrit au triangle ABC, et les deux autres sommets la droite B', C' sont indéterminés sur les droites $A'B$, $A'C$, la droite $B'C'$ qui les joint passant constamment par le point A; donc le lieu complet des points A', B', C' se compose de *six droites et de trois courbes du troisième degré*.

Considérons une droite quelconque passant par le point A; elle rencontre la courbe du troisième degré qui forme le lieu du point P en deux points P' et P''; au point P' correspond une conique circonscrite à ABC et un triangle $A'B'C'$; de même, au point P'' correspond un triangle $A''B''C''$. Les points B', B'', C', C'' sont sur la droite menée par A perpendiculairement à PA, et ces points forment deux groupes (B', B''), (C', C''); les deux premiers points B' et B'' sont situés sur une courbe connue du troisième degré; les deux autres C' et C'' sont aussi sur une courbe connue du troisième degré et différente de la précédente. Or, les abscisses des points P′ et P″ ne dépendent que d'un radical carré ; il en est donc de même des abscisses des points B′, B″, C′, C″, puisque les deux courbes du troisième degré qui contiennent ces points passent toutes deux par le point A.

Si l'on considère une des coniques circonscrites au triangle ABC et telle que les normales en A, B et C soient concourantes en un point P, si l'on projette ce point en Q, R, S sur les trois côtés, il existera, d'après le théorème de Géométrie que nous avons établi, une conique tangente aux trois côtés du triangle ABC aux points Q, R, S. Dès lors, si l'on projette le point P en Q′, R′, S′ sur les côtés du triangle QRS, il y aura une troisième conique tangente aux côtés du triangle QRS aux points Q′, R′, S′, et ainsi de suite. M. Laguerre a énoncé sous forme de question (*Nouvelles Annales*, question 1341, mars 1880), une proposition qui est, au fond, identique à la précédente.

Sans développer davantage ce sujet, nous énoncerons une dernière propriété :

Théorème XIV. — *Lorsqu'un triangle est inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, si l'on pose* $t = \tang \frac{\varphi}{2}$, φ *étant le paramètre angulaire de l'un des sommets, l'équation qui donne à chaque instant les trois valeurs de t sera*

$$t^3 + \lambda t^2 + Ct + \frac{\lambda}{C} = 0,$$

dans laquelle C *est une constante et* λ *un paramètre variant avec la position du triangle.*

SURFACES APPLICABLES SUR DES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. A. PICART.

1. M. Haton de la Goupillière, dans une Communication faite à la Société philomathique le 17 mars 1867, a donné la solution de la question suivante :

Quelles sont les surfaces sur lesquelles on peut tracer un réseau isotherme ou isométrique, c'est-à-dire décomposant la surface en carrés infiniment petits, qui soit formé de lignes géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales?

Il a trouvé, en considérant la forme de l'élément linéaire de la surface qui est propre aux systèmes isométriques, savoir

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2), \tag{1}$$

que les seules surfaces jouissant de cette propriété sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution.

2. Ce résultat peut s'établir immédiatement à l'aide des principes les plus simples de la Géométrie des surfaces.

Il suffit de se rappeler l'expression de la *courbure géodésique* $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)$ des lignes d'un réseau orthogonal et le théorème de Gauss qui en est une conséquence.

Soit, en effet, un réseau isométrique formé par des lignes géodésiques (X) et leurs trajectoires orthogonales (Y). Les éléments de lignes géodésiques compris entre deux trajectoires orthogonales infiniment voisines étant égaux, d'après le théorème de Gauss, les carrés compris entre ces deux mêmes trajectoires sont tous égaux; par suite, la *courbure géodésique* de chacune des trajectoires, qui est égale (si l'on désigne par dy l'élément de trajectoire et par δx l'élément de ligne géodésique) à $\frac{\delta\, dy}{dy\, \delta x}$, est constante. *Le système des trajectoires est donc formé de lignes d'égale courbure géodésique.*

Or, il est facile de démontrer le théorème suivant :

Quand il existe sur une surface un système de lignes géodésiques ayant pour trajectoires orthogonales un système de lignes d'égale courbure géodésique, ou, en d'autres termes, *quand on peut tracer sur une surface un système de lignes parallèles de courbure géodésique constante, la surface est nécessairement applicable sur une surface de révolution.*

En effet, la courbure géodésique de ces lignes peut être regardée comme une fonction de l'arc s qu'elles déterminent sur une certaine ligne géodésique, à partir d'un point fixe, pris pour origine; dès lors, si l'on considère la surface de révolution sur laquelle la courbure géodésique des parallèles soit exprimée par la même fonction de l'arc de méridienne, on voit que les deux surfaces pourront être décomposées en carrés infiniment petits, respectivement égaux entre eux, et, par suite, seront applicables l'une sur l'autre.

Mais quelle est la surface de révolution sur laquelle la courbure géodésique des parallèles est une fonction $\varphi(s)$ de l'arc de méridienne?

Si l'on désigne par x le rayon d'un parallèle, on trouve l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{dx}{x\, ds} + \varphi(s) = 0,$$

dont l'intégrale première est

$$(3) \qquad x = C e^{-\int_0^s \varphi(s)\, ds}.$$

C'est là l'équation de la méridienne. Il y entre un paramètre arbitraire C. Si l'on fait varier ce paramètre, on a une infinité de surfaces de révolution toutes applicables les unes sur les autres. Elles forment une famille dont les surfaces individuelles se distinguent par la valeur du module C.

Le théorème précédent permet de reconnaître immédiatement que *les hélicoïdes sont applicables sur des surfaces de révolution,* propriété découverte par Bour, car il est évident que les hélices décrites par les différents points du profil générateur sont des lignes parallèles et de courbure géodésique constante.

Il y a plus, on peut trouver très simplement, en s'appuyant sur les mêmes principes, la relation qui existe entre le profil générateur de l'hélicoïde et la méridienne de la surface de révolution.

Soit L le profil de l'hélicoïde rapporté à l'axe Oy de la surface et à la perpendiculaire Ox. Considérons l'hélice décrite par le point M, dont les coordonnées sont x et y. Si p est le *pas* de la surface, la tangente à cette hélice en M fait avec l'axe un angle α dont la tangente est $\frac{2\pi x}{p}$. Si l'on désigne par ε et λ les angles que la tangente en M au profil fait avec Ox et avec la tangente à l'hélice, on trouve, pour la courbure géodésique G de l'hélice sur l'hélicoïde,

$$(4) \qquad G = -\frac{\sin^2\alpha}{x}\,\frac{\cos\varepsilon}{\sin\lambda},$$

car $\frac{1}{\rho} = \frac{\sin^2\alpha}{x}$ et $\cos\theta = -\frac{\cos\varepsilon}{\sin\lambda}$, ou

$$(5) \qquad G = -\frac{\sin^2\alpha\cos\varepsilon}{x\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cos^2\alpha}},$$

puisque $\cos\lambda = \sin\varepsilon \cos\alpha$, ou enfin, en remplaçant $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ respectivement par

$$\frac{4\pi^2 x^2}{p^2+4\pi^2 x^2}, \quad \frac{p^2}{p^2+4\pi^2 x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$(6) \qquad G = -\frac{4\pi^2 x}{\sqrt{(p^2+4\pi^2 x^2)\left[p^2+4\pi^2 x^2+4\pi^2 x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}}.$$

Telle est la courbure géodésique des hélices exprimée en fonction de l'x des différents points du profil et du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Il faut exprimer cette courbure en fonction de l'arc de *ligne géodésique* qui leur est orthogonal.

Or, en appelant s cet arc et σ l'arc du profil, on a évidemment

$$(7) \qquad ds = d\sigma \sin\lambda,$$

d'où, en remplaçant $d\sigma$ et $\sin\lambda$ par leurs valeurs,

$$(8) \qquad ds = \sqrt{1+\frac{4\pi^2 x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{p^2+4\pi^2 x^2}}\,dx.$$

Si l'on suppose le profil connu, x est, en vertu de cette dernière formule, une certaine fonction de s qui, mise à la place de x dans l'équation (6), donnera la courbure géodésique des hélices en fonction de l'arc s. Si l'on désigne par $\varphi(s)$ cette fonction, la courbe méridienne de la surface de révolution sur laquelle l'hélicoïde est applicable aura pour équation

$$(9) \qquad x = Ce^{-\int_0^s \varphi(s)\,ds}.$$

Réciproquement, connaissant la fonction $\varphi(s)$ qui exprime la variation de la courbure géodésique des parallèles d'une surface de révolution donnée, on pourra déterminer le profil générateur de l'hélicoïde sur lequel cette surface est applicable. Il sera donné par les formules (9) et (8). De la formule (9) on tirera la valeur de s en x, par suite celle de ds, et l'on portera cette dernière dans (8), ce qui donnera une équation différentielle entre x et $\dfrac{dy}{dx}$ dont l'intégration fournira l'équation du profil.

Remarquons que de l'équation (8) et de l'équation (6), où l'on remplace G par $\varphi(s)$, on déduit l'équation

$$\varphi(s)\,ds + \frac{4\pi^2 x\,dx}{p^2 + 4\pi^2 x^2} = 0,$$

qui, intégrée, donne

$$(10) \qquad p^2 + 4\pi^2 x^2 = e^{-2\int \varphi(s)\,ds}.$$

Comme application de ces formules, nous chercherons d'abord quelle est la surface de révolution sur laquelle peut s'appliquer la surface de vis à filet carré.

Le profil générateur étant une droite perpendiculaire à l'axe, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

par suite

$$s = x \quad \text{et} \quad G = -\frac{4\pi^2 s}{p^2 + 4\pi^2 s^2}.$$

L'équation de la courbe méridienne de la surface de révolution cherchée est alors

$$(11) \qquad x = \frac{C}{p}\sqrt{p^2 + 4\pi^2 s^2}.$$

On reconnaîtra là l'équation des courbes dérivées de la chaînette, car, en posant $\frac{2\pi C}{p} = k$, $\frac{p}{2\pi} = h$, on peut la mettre sous la forme

$$x = k\sqrt{h^2 + s^2},$$

qui ne diffère que par le module k de l'équation de la chaînette

$$x = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

On obtient cette dernière équation en supposant $C = h$.

La surface de vis à filet carré n'est pas le seul héliçoïde applicable sur la surface de révolution qu'engendre la chaînette et que Bour a appelée *alysséide*.

Proposons-nous, en effet, de trouver le profil des héliçoïdes applicables sur l'alysséide.

Pour cette surface, la fonction $\varphi(s)$ qui exprime la courbure géodésique des parallèles est $-\frac{s}{h^2+s^2}$; par conséquent, l'équation (10) devient, dans ce cas,

$$p^2 + 4\pi^2 x^2 = m(h^2 + s^2),$$

m désignant une constante, d'où

$$s = \sqrt{\frac{4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2}{m}}$$

et

$$\frac{ds}{dx} = \frac{4\pi^2 x}{\sqrt{m}\sqrt{4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2}}.$$

Portant cette valeur de $\frac{ds}{dx}$ dans l'équation (8), on a

$$\frac{16\pi^4 x^2}{m(4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2)} = \frac{p^2 + 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{p^2 + 4\pi^2 x^2},$$

d'où

$$(12)\quad dy = \frac{dx}{2\pi x\sqrt{m}}\sqrt{p^2+4\pi^2x^2}\sqrt{\frac{4\pi^2(4\pi^2-m)x^2-m(p^2-mh^2)}{4\pi^2x^2+p^2-mh^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle du profil de l'hélicoïde.

Si l'on pose

$$x^2 = z,$$

d'où

$$dx = \frac{dz}{2x},$$

elle devient

$$dy = \frac{dz}{4\pi z\sqrt{m}}\,\frac{\sqrt{p^2+4\pi^2 z}\sqrt{4\pi^2(4\pi^2-m)z-m(p^2-mh^2)}}{\sqrt{4\pi^2 z+p^2-mh^2}}.$$

Sous cette forme, on voit que la valeur générale de y fournie par l'intégration renferme des transcendantes elliptiques.

Mais on n'a que des fonctions algébriques et logarithmiques dans les trois cas particuliers suivants :

1° $$m = \frac{p^2}{h^2},$$

2° $$m = 4\pi^2,$$

3° $$m = \frac{2p\pi}{h}.$$

Dans le premier cas, l'équation différentielle devient

$$dy = \frac{\sqrt{4\pi^2h^2-p^2}}{4p\pi}\,\frac{\sqrt{p^2+4\pi^2z}}{z}\,dz;$$

dans le second,

$$dy = \frac{\sqrt{4\pi^2h^2-p^2}}{4\pi z}\,\frac{\sqrt{4\pi^2z+p^2}}{\sqrt{4\pi^2z+p^2-4\pi^2h^2}}\,dz;$$

dans le troisième,

$$dy = \frac{\sqrt{2\pi h - p}}{4\pi\sqrt{p}} \frac{4\pi^2 z + p^2}{z\sqrt{4\pi^2 z + p(p - 2\pi h)}} dz.$$

L'intégration s'effectue donc sans aucune difficulté; et, en faisant $p = 2\pi h$ dans les intégrales, elles se réduisent à $y + C = 0$, c'est-à-dire à celle d'une droite perpendiculaire à l'axe. On retrouve ainsi la surface de la vis à filet carré.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1880;

PAR M. J. GRIESS,
Maître répétiteur au lycée d'Alger ([1]).

Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A *de cette surface et la génératrice* B *du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points* a *et* b *où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes* A' *et* B' *de l'autre système; soient* a' *et* b' *les points où les deux droites* A' *et* B' *sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.*

1° *Trouver le lieu des points* a *et* b, *et celui des points* a' *et* b', *quand la droite* A *décrit le paraboloïde.*

2° *Trouver le lieu du point de rencontre des droites* A *et* B' *ou* A' *et* B.

3° *Calculer le rapport des longueurs* $a'b'$ *et* ab *des*

([1]) Classé le vingt-cinquième au concours d'admission.

perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.

Je prends l'équation du paraboloïde sous la forme

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Une génératrice A aura pour équations

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} &= \lambda, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} &= \frac{2x}{\lambda}; \end{aligned} \right.$$

une génératrice B du même système sera

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} &= \lambda', \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} &= \frac{2x}{\lambda'}. \end{aligned} \right.$$

Ces deux génératrices seront perpendiculaires si l'on a

$$(1) \qquad \lambda\lambda' + p + q = 0.$$

Le point a où la perpendiculaire commune à ces deux génératrices rencontre A est défini par les équations (A) et par celle d'un plan mené par B perpendiculairement sur A. Un plan passant par B a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' + k\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\lambda'}\right) = 0$$

ou bien

$$-\frac{2k}{\lambda'}x + \frac{1+k}{\sqrt{p}}y + \frac{k-1}{\sqrt{q}}z - \lambda' = 0;$$

il sera perpendiculaire à A si

$$\frac{\frac{-2k}{\lambda'}}{\frac{\lambda}{\sqrt{q}}} = \frac{\frac{k+1}{\sqrt{p}}}{\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}} = \frac{\frac{k-1}{\sqrt{q}}}{1},$$

ou bien

$$-\frac{2k}{\lambda\lambda'} = \frac{k+1}{p} = \frac{k-1}{q} = \frac{2k}{p+q} = \frac{2}{p-q},$$

d'où

$$k = \frac{p+q}{p-q}.$$

Le plan proposé a donc pour équation

$$(2)\quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' + \frac{p+q}{p-q}\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\lambda'}\right) = 0.$$

En se servant des équations de A, celle-ci peut s'écrire

$$\lambda - \lambda' + \frac{p+q}{p-q}\left(\frac{2x}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda'}\right) = 0$$

ou bien

$$\lambda - \lambda' + 2x\frac{p+q}{p-q}\,\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'} = 0.$$

Divisant par $\lambda - \lambda'$ et remplaçant $\lambda\lambda'$ par $-(p+q)$, il vient pour l'équation du lieu

$$x + \frac{p-q}{2} = 0.$$

Cette équation, jointe à celle du paraboloïde, montre que le lieu des points a est une hyperbole dont le plan est perpendiculaire à l'axe du paraboloïde. On voit d'ailleurs que c'est aussi le lieu des points b, car tous les calculs sont symétriques en λ et λ'.

Je remarque que cette hyperbole est aussi le lieu des points du paraboloïde où les génératrices sont perpendiculaires. On aurait pu le prévoir. Si je mène en effet par B un plan perpendiculaire à A, ce plan coupera le plan tangent en a suivant une droite passant par a, perpendiculaire à A et rencontrant B. C'est donc une génératrice du paraboloïde. Donc, en a, les génératrices sont rectangulaires.

Cette remarque nous permet d'écrire immédiatement les équations des génératrices A' et B'.

Celles de A' sont

$$(\mathrm{A}')\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \dfrac{2x}{\mu}, \\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \mu, \end{cases}$$

et A' sera perpendiculaire à A si $\lambda\mu + p - q = 0$.

De même celles de B' seront

$$(\mathrm{B}')\qquad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \dfrac{2x}{\mu'}, \\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \mu', \end{cases}$$

avec la condition $\lambda'\mu' + p - q = 0$.

Pour trouver le point a', je mènerai par B' un premier plan parallèle à A' : c'est évidemment le plan

$$(3)\qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' = 0;$$

puis un second plan perpendiculaire à ce dernier.

Un pareil plan a une équation de la forme

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' + k\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\mu'}\right) = 0,$$

ou bien

$$(4)\qquad -\frac{2k}{\mu'}x + \frac{1+k}{\sqrt{p}}y + \frac{1-k}{\sqrt{q}}z - \mu' = 0;$$

il sera perpendiculaire au plan (3) si

$$\frac{1+k}{p}+\frac{1-k}{q}=0$$

ou

$$k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),\quad k=\frac{p+q}{p-q}.$$

Le plan (4) a donc pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}-\mu'+\frac{p+q}{p-q}\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}-\frac{2x}{\mu'}\right)=0.$$

Le point a' se trouve à l'intersection de A′ avec ce plan. Son équation s'écrit, en se servant de A′,

$$\mu-\mu'+\frac{p+q}{p-q}2x\frac{\mu'-\mu}{\mu\mu'}=0,$$

ou, en divisant par $\mu-\mu'$,

$$1-\frac{p+q}{p-q}2x\frac{1}{\mu\mu'}=0.$$

Multiplions entre elles les deux conditions

$$\lambda\mu+p-q=0,\quad \lambda'\mu'+p-q=0;$$

il vient

$$\lambda\lambda'.\mu\mu'=(p-q)^2.$$

Or

$$\lambda\lambda'=-(p+q);$$

donc

$$\mu\mu'=-\frac{(p-q)^2}{p+q},$$

et l'équation du lieu est

$$1+2x\frac{p+q}{p-q}\frac{(p+q)}{(p-q)^2}=0,$$

$$x+\frac{(p-q)^3}{2(p+q)^2}=0.$$

Cette équation, jointe à celle du paraboloïde, montre que ce lieu représente encore une hyperbole dont le plan est perpendiculaire à l'axe.

Cherchons maintenant le point de rencontre des droites A et B'. Pour cela prenons l'équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu',$$

avec la condition $\lambda'\mu' + p - q = 0$.

Les équations de A donnent

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda,$$

avec

$$\lambda\lambda' + p + q = 0,$$

d'où

$$\frac{\mu'}{\lambda} = +\frac{p-q}{p+q}$$

ou

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right)(p+q) = \left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right)(p-q),$$

ce qui s'écrit

$$2y\frac{q}{\sqrt{p}} = -2z\frac{p}{\sqrt{q}} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{p\sqrt{p}} + \frac{z}{q\sqrt{q}} = 0.$$

Ce plan coupe le paraboloïde suivant une parabole qui est le lieu.

On voit d'ailleurs qu'en opérant avec A' et B on obtiendrait le même lieu.

Pour calculer les longueurs ab et $a'b'$, il me suffira de prendre les plus courtes distances des projections des génératrices sur le plan des yz; car les plans directeurs auxquels les génératrices sont parallèles sont perpendiculaires au plan des yz.

Pour avoir ab, je prendrai la distance du point ($z = 0$,

$y = \lambda\sqrt{p})$ à la génératrice $\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' = 0$; c'est

$$\frac{\lambda - \lambda'}{\sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} = (\lambda - \lambda')\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}}.$$

De même, pour avoir $a'b'$, je prends la distance du point $(z = 0, y = \mu\sqrt{p})$ à la droite $\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' = 0$, ce qui donne

$$\frac{(\mu - \mu')\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}}.$$

Le rapport est donc

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{\lambda - \lambda'}{\mu - \mu'}.$$

Or

$$\mu = -\frac{p-q}{\lambda}, \quad \mu' = -\frac{p-q}{\lambda'},$$

$$\mu - \mu' = -(p-q)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right),$$

$$\mu - \mu' = -(p-q)\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = -(p-q)\frac{\lambda - \lambda'}{p+q}.$$

Donc le rapport $\frac{ab}{a'b'}$ est, en valeur absolue,

$$\frac{p+q}{p-q};$$

il est donc constant quand la génératrice A se déplace sur le paraboloïde.

Comme l'on voit, la variation de ces longueurs ne dépend que de $\lambda - \lambda'$. Or

$$\lambda' = -\frac{p+q}{\lambda};$$

donc

$$\lambda - \lambda' = \lambda + \frac{p+q}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + p + q}{\lambda}.$$

Pour étudier la variation de cette quantité, prenons la dérivée ; c'est

$$2\lambda^2 - \lambda^2 - p - q \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - (p+q).$$

Pour $\lambda = \sqrt{p+q}$, la dérivée est nulle ; de plus, elle change de signe en passant du négatif au positif, quand λ passe par cette valeur en variant de 0 à $+\infty$; donc la fonction passe par un minimum.

Pour cette valeur de λ, celle de la première longueur est

$$ab = \frac{pq}{p+q}(\lambda - \lambda') = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}} 2\sqrt{p+q} = 2\sqrt{pq}$$

et

$$a'b' = 2\sqrt{pq}\,\frac{p-q}{p+q}.$$

Note. — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR LE CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880 ;

Par M. H. LEZ.

Soient M *et* N *les points où l'axe des x rencontre le cercle $x^2 + y^2 = r^2$; considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points* M *et* N ; *menons, par un point* Q *pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole.*

Soient A *et* B *les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites* QA *et* QB, *l'une est parallèle à une direc-*

tion fixe et l'autre passe par un point fixe P. *Le point* P *étant donné, l'hyperbole correspondante qui passe par les points* M *et* N *est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point* P *décrit la droite $y = x$, quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.*

Pour qu'une hyperbole équilatère

$$(1) \qquad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gy + 2fx + l = 0$$

passe par les points M, N, il faut que le trinôme $x^2 + 2fx + l = 0$ soit vérifié par $x = \pm r$, c'est-à-dire que le terme en x soit nul; alors $l = -r^2$, et l'équation (1) devient

$$(2) \qquad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gy - r^2 = 0.$$

Mais la polaire d'un point $Q(\mu, \nu)$, par rapport à cette conique, est représentée par

$$(\mu + h\nu)x + (h\mu - \nu + g)y + g\nu - r^2 = 0;$$

si le point Q est sur le cercle

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

on a

$$\mu = r\cos\alpha, \quad \nu = r\sin\alpha,$$

et, pour l'équation de la polaire,

$$r(\cos\alpha + h\sin\alpha)x + (hr\cos\alpha - r\sin\alpha + g)y \\ + r(g\sin\alpha - r) = 0.$$

Or cette droite rencontrant le cercle (3) en deux points,

$$(\text{A}) \qquad x = r\cos\alpha, \quad y = -r\sin\alpha,$$

$$(\text{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{r\cos\alpha(r^2 - r^2h^2 - g^2) + 2hr^2(r\sin\alpha - g)}{r^2 + r^2h^2 + g^2 + 2gr(h\cos\alpha - \sin\alpha)}, \\ y &= \frac{r\sin\alpha(r^2h^2 - r^2 - g^2) + 2r^2(rh\cos\alpha + g)}{r^2 + r^2h^2 + g^2 + 2gr(h\cos\alpha - \sin\alpha)}, \end{aligned} \right.$$

on trouve, pour l'équation de QA,

$$x = r\cos\alpha,$$

et, pour celle de QB,

$$(hr + g\cos\alpha)y + (r - g\sin\alpha)x - (h\sin\alpha + \cos\alpha)r^2 = 0.$$

La première droite est donc perpendiculaire à MN et la seconde passe par un point fixe P $\left(x = -\dfrac{r^2 h}{g}, y = \dfrac{r^2}{g}\right)$; car son équation peut facilement se mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{r^2}{g}\right)(hr + g\cos\alpha) = \left(x + \frac{r^2 h}{g}\right)(g\sin\alpha - r).$$

Ce point P est le pôle de MN par rapport à l'hyperbole équilatère (2). Lorsqu'il est donné, l'équation (2) ne contient plus de coefficients variables; car on écrira

$$(4) \qquad x^2 - \frac{2d}{c}xy - y^2 + \frac{2r^2}{c}y - r^2 = 0,$$

en faisant

$$d = -\frac{r^2 h}{g}, \quad \frac{r^2}{g} = c.$$

L'hyperbole équilatère est donc bien déterminée. Les dérivées $dx + cy = r^2$, $cx - dy = 0$ montrent que son centre est à la rencontre de la polaire du point P, par rapport au cercle (3), avec une droite passant par l'origine O et le même point P. Quant aux axes, leurs coefficients angulaires étant donnés par l'équation

$$du^2 - 2cu - d = 0,$$

de laquelle on tire

$$u = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + d^2}}{d} = \frac{c \pm \gamma}{d},$$

ils sont faciles à tracer; d'ailleurs, ils sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites $y = 0$, $dx + cy = r^2$.

Connaissant la direction des axes, on a celle des asymptotes.

Or, les asymptotes et un point quelconque M ou N étant donnés, on peut déterminer la longueur des axes et par suite les sommets.

En décrivant une circonférence sur le diamètre HMK, perpendiculaire à l'axe transverse, on a, en effet,

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \mathrm{MH.MK} = a^2 = b^2.$$

Enfin, si le point P doit suivre la droite $y = x$, il faut que $d = c$; alors l'équation (4) devient

$$x^2 - 2xy - y^2 + \frac{2r^2}{c}y - r^2 = 0.$$

En l'identifiant avec l'équation générale aux foyers

$$\begin{aligned}(1 - m^2)x^2 - 2mn.xy^2 + (1 - n^2)y - 2(\alpha + mp)x \\ - 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0,\end{aligned}$$

on a les égalités

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{1 - m^2} = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{mn} = -\frac{0}{2(\alpha + mp)} \\ = -\frac{r^2}{c(\beta + np)} = -\frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2 - p^2},\end{aligned}\right.$$

d'où

$$p = -\frac{\alpha}{m} \quad \text{et} \quad -r^2 mn = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\alpha^2}{m^2}.$$

Cette dernière relation entre les coordonnées α et β des foyers permet d'avoir de suite le lieu demandé, car des égalités (5) on tire encore

$$m^2 = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2}}, \quad n^2 = \frac{\sqrt{2} \mp 1}{\sqrt{2}}, \quad mn = \mp \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui fournit deux équations différentes :

1° Celle d'une ellipse

$$(6)\qquad r^2(\sqrt{2}+1)=\alpha^2\sqrt{2}+\beta^2(2+\sqrt{2});$$

2° Celle d'une hyperbole

$$(7)\qquad r^2(\sqrt{2}-1)=\alpha^2\sqrt{2}-\beta^2(2-\sqrt{2}).$$

Ces deux coniques passent par les sommets d'un carré, ont leur centre à l'origine et leurs foyers en M, N ; elles sont donc homofocales. Quand $2c^2 > r^2$, le point P est à l'extérieur du cercle (3), les foyers des hyperboles équilatères décrivent l'ellipse (6); par contre, ils décrivent l'hyperbole (7) si $2c^2 < r^2$.

Note. — Solution analytique de M. Albert Isay, élève du lycée de Nancy.

M. J.-B. Pomey a envoyé une excellente solution géométrique. Nous en avons d'ailleurs déjà publié une dans le Tome précédent.

SUR L'ÉQUATION DE HESSE AUX POINTS D'INFLEXION;

PAR M. CRETIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

En vertu des identités d'Euler sur les fonctions homogènes, si deux fonctions ont des dérivées secondes respectivement égales, pour un système de valeurs des variables, les fonctions elles-mêmes et leurs premières dérivées sont respectivement égales à un facteur numérique près.

Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe algébrique; l'équation qui détermine les points d'inflexion ne renferme que les dérivées premières et secondes de la fonction f.

Considérons sur la courbe un point de coordonnées x et y, les dérivées secondes de la fonction f (rendue homogène) pour le point considéré, et la conique dont l'équation est

$$X^2 f''_{x^2} + 2XY f''_{xy} + Y^2 f''_{y^2} + 2X f''_{xz} + 2Y f''_{yz} + f''_{z^2} = 0.$$

Les coefficients sont précisément les dérivées secondes du premier membre, au facteur 2 près. Donc la conique passe par le point considéré, et, pour ce point, les dérivées premières et secondes du premier membre de l'équation de la conique sont égales, à un facteur constant près, aux mêmes quantités relatives à la première courbe. Donc le point (x, y) sera simultanément un point d'inflexion sur la courbe et sur la conique. Or, la condition pour que le point soit d'inflexion sur la conique est qu'elle se réduise à deux droites. C'est donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

SUR LE THÉORÈME DE ROLLE;

PAR M. J. COLLIN.

Dans le cas où il s'agit d'équations algébriques, le théorème de Rolle peut se démontrer de la manière suivante.

Soient $f(x) = 0$ l'équation considérée; $a, b, c, \ldots, l$ ses racines réelles, a et b étant deux racines consécutives; $\varphi(x)$ le polynôme relatif aux racines imaginaires et $\psi(x)$ le quotient de $f(x)$ par $x - a$, de sorte que

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l)\,\varphi(x) = (x-a)\,\psi(x).$$

D'après un théorème bien connu, on a

$$f'(a) = \psi(a);$$

donc

$$f'(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-l)\varphi(a),$$

et de même

$$f'(b) = (b-a)(b-c)\ldots(b-l)\varphi(b).$$

Or, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont de même signe; tous les autres facteurs de $f'(a)$ et $f'(b)$ sont aussi de même signe, à l'exception de $(a-b)$ et $(b-a)$, qui sont de signes contraires. Donc $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires; donc l'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre impair de racines comprises entre a et b.

Le théorème de Rolle n'est ainsi qu'un corollaire immédiat du théorème des substitutions.

NORMALE MENÉE A UNE CONIQUE A CENTRE D'UN POINT DE L'AXE FOCAL;

Par M. Ernest LEBON.

Problème. — *Si par un point o de l'axe focal d'une conique à centre c on mène à la courbe les deux normales égales og et oh et une perpendiculaire ok à un diamètre pq, le lieu du point d'intersection r de cette perpendiculaire et du diamètre ij conjugué au précédent est la droite gh qui passe par les pieds des deux normales.*

Prenons les axes de la conique pour axes coordonnés. On a, en désignant par d la distance co, les équations suivantes de pq, ij et ok :

$$y = mx, \quad y = -\frac{b^2 x}{a^2 m}, \quad y = -\frac{1}{m}(x-d).$$

En portant les valeurs des coordonnées du point o dans l'équation de la normale en h, on trouve que l'équation de hg est

$$x = \frac{a^2 d}{c^2}.$$

L'abscisse du point r ayant aussi cette valeur, la propriété énoncée est vraie.

Applications. — 1° Pour mener d'un point c de l'axe focal les normales égales à une conique à centre, on construit les deux diamètres conjugués égaux, et l'on détermine le point d'intersection r d'un diamètre et de la perpendiculaire à l'autre.

2° Cette propriété permet de vérifier, ou mieux de simplifier, les constructions relatives aux parallèles limites, minima et double qu'il faut trouver dans l'épure du problème suivant : *Construire les projections de la surface de révolution à axe vertical engendrée par une conique à centre dont l'axe focal coupe l'axe de révolution.*

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880.

Mathématiques spéciales.

Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points A_{-n}, $A_{-(n-1)}$, ..., A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :

1° Étant données les coordonnées du point A_0, on propose de trouver les coordonnées des points A_{-n} A_n, et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice n augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes P, Q, R.

3° On étudiera comment varient les points d'intersection de ce lieu et des côtés du triangle PQR, quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par le point O.

Philosophie.

La Terre étant supposée sphérique, on considère le point M de la surface dont la latitude est égale à la longitude :

1° Déterminer le lieu des projections des points M sur le plan de l'équateur;

2° Déterminer le lieu des droites AM, A étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.

Mathématiques élémentaires.

I. Résoudre le système de n équations à n inconnues :

$$
\begin{aligned}
&(x_2+x_3+\ldots+x_n)+1.2\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = 9\,a^2,\\
&2(x_1+x_3+\ldots+x_n)+2.3\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = 25\,a^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})+n(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=(2n+1)^2a^2.
\end{aligned}
$$

II. D'un point O pris dans le plan d'un cercle partent quatre droites qui coupent sa circonférence, la première aux points a et a', la deuxième aux points b et b'; la troisième aux points c et c'; et la quatrième aux points d et d'.

Prouver que les sinus des moitiés des arcs ac, bd, ad, bc, $a'c'$, $b'd'$, $a'd'$, $b'c'$ sont liés entre eux par la relation

$$\frac{\sin\frac{ac}{2}\sin\frac{bd}{2}\sin\frac{a'd'}{2}\sin\frac{b'c'}{2}}{\sin\frac{cb}{2}\sin\frac{da}{2}\sin\frac{d'b'}{2}\sin\frac{a'c'}{2}} = 1.$$

Rhétorique.

I. Aux deux extrémités A et B du diamètre AB d'un demi-cercle, on lui mène deux tangentes; on construit ensuite une troisième tangente, qui coupe les deux premières aux points C et D. On demande de déterminer cette tangente de manière que le volume engendré par le trapèze ABDC en tournant autour du diamètre AB et la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre soient entre eux dans le rapport de m à 1. Discussion.

II. Révolution sidérale et révolution synodique de la Lune. Orbite décrite par la Lune autour de la Terre.

Seconde.

Sur le côté BC d'un triangle ABC ou sur son prolongement, on prend un point arbitraire D. On fait passer deux circonférences, l'une par les points A, B et D, l'autre par les points A, C et D; soient O et O′ les centres de ces deux circonférences. On propose :

1° De démontrer que le rapport des rayons de ces deux circonférences est indépendant de la position du point D sur le côté BC;

2° De déterminer la position que doit occuper le point D pour que les deux rayons aient la plus petite longueur possible;

3° De démontrer que le triangle AOO′ est semblable au triangle ABC;

4° De trouver le lieu décrit par le point M qui partage la droite OO′ dans le rapport de deux longueurs données m et n; on examinera le cas particulier où le point M est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur OO′.

Troisième.

I. Par les deux extrémités d'une droite AB, et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires AC et BD, telles que l'aire du trapèze ABCD ait une valeur constante donnée. Du milieu E de la droite AB on abaisse une perpendiculaire EM sur la droite CD. Trouver le lieu décrit par le pied M de cette perpendiculaire, quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires AC et BD.

Même problème quand les lignes AC et BD, au lieu d'être perpendiculaires à AB, sont parallèles à une droite fixe donnée.

II. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles, et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Discussion.

NÉCROLOGIE.

M. Giusto Bellavitis est mort à Tezze, près de Bassano, le 6 novembre 1880. Son nom est bien connu des lecteurs des *Nouvelles Annales*, et tous comprendront que c'est une grande perte que viennent de faire les sciences mathématiques, en Italie.

Né le 22 novembre 1803, à Bassano, il fit par lui-même ses études: la tournure de son esprit le porta surtout vers les sciences mathématiques. En 1840, il fut admis à l'Institut vénitien; nommé professeur au Lycée de Vicence en 1842, puis à l'Université de Padoue en 1845, il y a constamment, depuis lors, enseigné les Mathématiques, et il y avait acquis une grande renommée. Il était en outre sénateur du royaume italien et conseiller municipal de Padoue.

Les premiers travaux qu'il ait publiés remontent à 1826; à partir de cette époque, il n'a cessé de produire un nombre considérable de Mémoires se rapportant le plus souvent aux sciences, mais sans négliger, pour ainsi dire, aucune branche des connaissances humaines. Il publiait aussi, sous le titre de *Rivista di Giornali,* à des époques irrégulières, un Recueil scientifique des plus intéressants.

Mais son principal titre de gloire est l'invention de la méthode des équipollences, dont il conçut la première idée dès l'année 1832, et à laquelle il a donné ensuite de grands développements. Ce calcul géométrique nouveau commence à être connu et apprécié aujourd'hui, après être longtemps resté dans l'indifférence et l'oubli.

L'écrit dans lequel Bellavitis a publié l'exposé le plus complet de sa méthode, *Exposition de la méthode des équipollences* (1854), a été traduit en français par M. Laisant et inséré tout d'abord dans les *Nouvelles Annales.* Cette traduction a paru ensuite, en 1874, en un Volume édité par M. Gauthier-Villars. La même année, M. Zahradnick en publiait une traduction en langue bohème.

Ces faits montrent que la méthode des équipollences se répandait en Europe au cours des dernières années de l'inventeur. Tout fait croire qu'elle sera de plus en plus appliquée désormais; il est bien probable même, et c'est en même temps désirable, qu'elle finira par pénétrer dans l'enseignement.

Les qualités dominantes de Bellavitis étaient un esprit d'invention très curieux et très droit, et, par-dessus tout, une préoccupation minutieuse de la clarté et du bon sens. Nous savons que ses leçons étaient considérées comme tout à fait remarquables, et cela est loin de nous étonner, car on sent, rien que par ses écrits, combien il avait souci de faire passer dans l'esprit du lecteur, sans difficulté, sans obscurité, ce qu'il avait nettement conçu dans le sien.

Il faut ajouter que l'homme fut à la hauteur du savant. Très fin, très bienveillant et très juste, il était aimé autant qu'admiré de ses élèves, et il laisse des regrets universels, d'autant plus vifs que sa mort était plus imprévue.

Il y pensait pourtant, et il avait fait préparer depuis quelques années des Lettres imprimées ainsi conçues : « *Hier a cessé de vivre le professeur comte Giusto Bellavitis, sénateur du royaume. Padoue, le* .... » Détail touchant : les adresses de ces Lettres, destinées à tous les amis avec lesquels il était en correspondance habituelle, avaient été écrites de sa propre main ; il ne voulait pas qu'ils apprissent par d'autres que lui-même la douloureuse nouvelle.

Bellavitis laisse derrière lui une veuve et un fils, qui l'adoraient autant qu'il les adorait lui-même. Puissent les sympathies et les regrets qu'inspire la mémoire de celui qu'ils ont perdu adoucir un peu leur douleur !

UN ABONNÉ.

CORRESPONDANCE.

Le numéro de décembre 1880 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* renferme une très intéressante *Di-*

gression historique sur les quantités négatives. On y voit (p. 563) que le mot *Algèbre* vient de l'arabe. Je voudrais vous faire une simple observation orthographique sur la transcription *dchebr* du mot arabe.

Ce mot [1] est composé de trois lettres, dont la première (le *djim*) représentait, originairement, l'articulation de notre *g* devant *a*, *o*, *u*; mais cette lettre s'est adoucie par la suite et a pris la valeur du *g* italien, c'est-à-dire celle de *dj* français, qu'elle a partout aujourd'hui, à l'exception de quelques contrées orientales, notamment l'Égypte, où elle a conservé sa valeur archaïque. C'est avec la valeur de *dj* que le *djim* arabe s'est introduit dans les alphabets persan, turk et hindoustani.

Les Allemands, ne connaissant pas l'articulation douce de notre *j*, transcrivent le *djim* des noms orientaux d'une façon fort barbare par *dsch*; ils écrivent donc *al dschebr* au lieu de *al djebr*, et c'est en copiant les Allemands que des Français écrivent *al dchebr,* fort à tort puisque nous pouvons rendre *exactement* le mot arabe. Les Anglais écrivent tout naturellement *al jebr,* leur *j* ayant exactement la valeur de la lettre arabe (*dj*). Il y a donc une singulière méprise dans cette phrase : « Le nom *al dchebr*, et plus tard *al jebr*.... » *Dchebr* est une orthographe tudesque, et *jebr* l'orthographe anglaise d'un seul et même mot arabe qui n'a jamais varié et que nous devons transcrire par *djebr*.

G^al^ PARMENTIER.

Extrait d'une lettre de M. D. Marchand, curé de Pontoise.

J'avais trouvé depuis longtemps une formule permettant de calculer la somme des cinquièmes puissances

---

[1] جبر, dont la première lettre *à droite* ج équivaut à *dj*.

des n premiers nombres entiers. La voici :

$$\Sigma n^5 = n^3 \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)(n)^2(n+1)}{12} \right].$$

Aujourd'hui même, après avoir lu les développements donnés (2^e série, t. XVIII, p. 459), j'ai voulu savoir, malgré mon ignorance de l'Algèbre, si je ne pourrais pas découvrir une autre formule.

Faisant application de ma méthode de décomposition des éléments contenus dans un quotient, je suis arrivé rapidement au résultat suivant :

$$\Sigma n^5 = \frac{n(n+1)}{2} \left[\frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{2(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{24} \right].$$

Voici, du reste, comment j'ai raisonné :

1° On sait que la somme de deux nombres à la première puissance divise exactement la somme de ces mêmes nombres dans les puissances impaires, la troisième, la cinquième, la septième, etc.

2° On sait également qu'à la cinquième puissance, comme à la neuvième, la treizième, la dix-septième, etc., les *désinences* des nombres sont les mêmes qu'à la première puissance.

3° On sait encore que les nombres triangulaires, en dernière analyse, se forment par l'addition successive des nombres.

M'appuyant sur ces principes, j'ai tiré rigoureusement les conclusions suivantes :

1° n divise exactement Σn^5.

2° $\frac{n(n+1)}{2}$ divise exactement Σn^5, puisque les *désinences* de la cinquième puissance sont les mêmes que celles de la première puissance.

3° La division de Σn^5 par $\frac{n(n+1)}{2}$ étant effectuée, il n'y a plus qu'une seule chose à faire : c'est d'*analyser le quotient*.

4° Or, les éléments contenus dans le quotient sont les suivants :

1° Le carré du triangle de n;

2° Deux fois le pyramido-pyramidal de $n-1$, c'est-à-dire

$$1^{\circ} \qquad n(n+1)^2,$$

$$2^{\circ} \qquad \frac{2(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{12},$$

ce qui donne la formule

$$\Sigma n^5 = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{2(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{24}\right].$$

Note relative à un théorème de M. Weill. — A la page 57 de ce Tome, M. Weill démontre le théorème suivant :

Lorsqu'un polygone convexe se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux circonférences, sa surface reste proportionnelle à celle du polygone ayant pour sommets les points de contact des côtés du premier avec la circonférence intérieure.

D'autre part, j'ai, en 1864, proposé la question suivante, qui porte le n° 711 dans les *Nouvelles Annales :*

Lorsqu'un polygone est à la fois inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle : 1° *le centre des moyennes distances des points de contact est situé sur la ligne des centres des deux cercles;* 2° *le double de la surface du polygone est égal à la somme des sinus de ses angles, multipliée par la puissance du centre du cercle inscrit par rapport au cercle circonscrit, prise en signe contraire.*

Dans l'énoncé des *Nouvelles Annales*, les mots *prise en signe contraire* ont été omis. Ce théorème figure aussi dans mon *Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques*, publié en 1867. La seconde partie de ce théorème (qui n'a pas encore été démontrée) rend évident celui de M. Weill, puisque la surface du polygone ayant pour sommets les points de contact est égale au carré du rayon du cercle inscrit, multiplié par la moitié de la somme des sinus des angles du polygone donné.

H. FAURE.

On lit, 2ᵉ série, t. XIX, p. 255 :

La formule (1) donne immédiatement ce théorème, qui est dû à M. Mansion et qu'il a étendu à l'espace :

Si un triangle est circonscrit à une conique et si le point de concours des hauteurs de ce triangle a une puissance constante par rapport au cercle circonscrit, ce point décrit un cercle concentrique à la conique.

M. Weill m'attribue là un théorème qui appartient à quelque autre.

P. MANSION,
Professeur à l'Université de Gand.

M. le Dʳ Marcello Rocchetti nous a envoyé une deuxième solution de la question 1340, ainsi généralisée :

« Déterminer l'aire du triangle S, dont les sommets sont les pieds de trois lignes droites α, β, γ menées respectivement par les sommets A, B, C du triangle ABC, de manière qu'elles divisent les côtés opposés a, b, c en rapports donnés. »

Il en a déduit l'expression que nous avons proposée dans la question 1353, antérieurement à la publication de l'énoncé de cette question.

QUESTIONS.

1359. ABC étant un triangle donné, on le coupe par une transversale qui détermine sur ses côtés ou leurs prolongements six segments, tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit constant : trouver l'enveloppe de la transversale. (BARBARIN.)

1360. Trouver les trajectoires orthogonales d'une droite de longueur constante mobile entre deux axes rectangulaires. (BARBARIN.)

1361. Faire voir que l'étude des variations de la fonction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ peut toujours être ramenée à l'étude des variations de la fonction $\frac{Ax^2+Bx+C}{x^2+px+q}$, dans laquelle les racines α, β de $x^2+px+q=0$ sont *réelles* et *inégales*; que, si $R(x)$ est le reste de la division de Ax^2+Bx+C par x^2+px+q, il y aura un maximum et un minimum si $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)}>0$, il n'y aura ni maximum ni minimum si $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)}<0$, il n'y aura qu'un *maximum* (pour la fonction transformée), si $R(x)$ est constant.

Trouver, en fonction de α, β, $R(\alpha)$, $R(\beta)$, les valeurs de x qui font passer la fonction proposée par un maximum ou un minimum?

Dans le cas où α et β se présenteraient sous la forme $\frac{a\pm\sqrt{b}}{c}$, peut-on simplifier les calculs?

(HÉNET, répétiteur à Bordeaux.)

NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. A. PICART.

1. Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a^2>b^2>c^2)$ l'équation de l'ellipsoïde. L'équation différentielle des lignes de courbure de cette surface est, en posant, pour abréger,

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A,\quad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B,$$

$$(1)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

2. Cette équation a été intégrée pour la première fois par Monge. Le procédé suivi par cet illustre géomètre consiste à différentier cette équation pour éliminer les constantes A et B. Cette élimination de deux constantes exige généralement deux différentiations successives; mais, dans ce cas particulier, une seule différentiation permet d'éliminer à la fois A et B, et l'on obtient l'équation du second ordre

$$(2)\qquad xy\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{y}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\,\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=0.$$

Le premier membre est la dérivée de $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$; on a donc, par une première intégration,

$$(3)\qquad \frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = C.$$

Une seconde intégration donne immédiatement

$$(4)\qquad y^2 = Cx^2 + C'.$$

Reste à déterminer une relation entre les constantes C et C', par la condition que la valeur de y tirée de (4) satisfasse identiquement à l'équation (1).

3. Ce procédé d'intégration s'applique à un grand nombre d'équations, et les calculs qu'il exige sont généralement simples. Mais il faut reconnaître qu'il est un peu détourné et que, faisant dépendre l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre de celle d'une équation d'ordre supérieur, il semble prendre les choses à rebours de la marche naturelle.

Ne pourrait-on intégrer directement l'équation (1) sans passer par la différentiation? C'est ce que nous nous proposons d'examiner.

4. Résolvons l'équation (1) par rapport à $\frac{dy}{dx}$; il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^2 - Ay^2 - B) + \sqrt{x^4 + 2Ax^2y^2 + A^2y^4 - 2Bx^2 + 2ABy^2 + B^2}}{2Axy}$$

ou

$$(5)\quad \begin{cases} 2Axy\,dy \\ \quad + \left(x^2 - Ay^2 - B + \sqrt{x^4 + 2Ax^2y^2 + A^2y^4 - 2Bx^2 + 2ABy^2 + B^2}\right)dx = 0. \end{cases}$$

Multiplions cette dernière équation par x et posons

$$x^2 = u, \quad y^2 = v,$$

d'où

$$2x\,dx = du, \quad 2y\,dy = dv;$$

nous obtenons ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &2\mathrm{A}u\,dv \\ &\quad+\left(u-\mathrm{A}v-\mathrm{B}+\sqrt{u^2+2\mathrm{A}uv+\mathrm{A}^2v^2-2\mathrm{B}u+2\mathrm{AB}v+\mathrm{B}^2}\right)du=0.\end{aligned}\right.$$

Remarquons que, dans cette équation différentielle, les quantités u et v, égales respectivement à x^2 et y^2, doivent être regardées comme essentiellement positives.

On reconnaît aisément que les coefficients de du et de dv conservent le même signe pour toute valeur positive de u et v. La chose est évidente pour le coefficient de dv; quant au coefficient de du, si on l'égale à o, on obtient, en chassant le radical,

$$4\mathrm{A}uv=0,$$

d'où l'on voit que le coefficient ne s'annule que pour $u=0$ et $v=0$; il conserve donc le même signe pour toute valeur positive de u.

Il résulte de là que le coefficient différentiel $\dfrac{dv}{du}$ ou son inverse $\dfrac{du}{dv}$ garde constamment le même signe. La quantité v, considérée comme fonction de u, est donc constamment croissante ou décroissante; il en est de même de la quantité u considérée comme fonction de v. En d'autres termes, si l'on regarde u et v comme les coordonnées d'un point dans un plan, le système de lignes que représente l'équation (6) est tel que chacune de ces lignes n'est coupée qu'en un point par une parallèle à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

Cela nous conduit à examiner si l'intégrale de l'équation (6) ne serait pas linéaire en u et v, de la forme

$$v=hu+k.$$

Si l'on pose

$$(7)\quad z=u-\mathrm{A}v-\mathrm{B}+\sqrt{u^2+2\mathrm{A}uv+\mathrm{A}^2v^2-2\mathrm{B}u+2\mathrm{AB}v+\mathrm{B}^2}$$

et qu'on regarde u, v, z comme les coordonnées d'un point de l'espace, l'intégration de l'équation (1) revient à trouver, sur la surface du second ordre que représente l'équation (7), un système de lignes telles que les projections de chacune d'elles sur le plan des uv et des uz remplissent la condition géométrique exprimée par l'équation

$$(8) \qquad \frac{dv}{du}\,\frac{u}{z} = -\frac{1}{2A}.$$

S'il existe une relation linéaire entre v et u, comme dans ce cas $\frac{dv}{du}$ est constant, il faut que $\frac{u}{z}$ soit aussi constant, et de plus que le produit de ces deux quantités soit égal à $-\frac{1}{2A}$.

Nous avons donc à rechercher s'il existe un système réel de lignes droites sur la surface (7), si ces lignes se projettent sur le plan des uz suivant des droites passant par l'origine des coordonnées, et si le produit des coefficients angulaires $\frac{dv}{du}$, $\frac{u}{z}$ des projections de ces droites sur les plans uv et uz est égal à $-\frac{1}{2A}$.

Mettons l'équation (7) sous forme rationnelle :

$$(9) \qquad z^2 - 2z(u - Av - B) - 4Auv = 0;$$

on voit sans peine que l'axe des v est sur la surface. En conséquence, tout plan passant par cette droite coupe la surface suivant une autre droite. Voilà donc un système de droites situées sur la surface et se projetant sur le plan des uz suivant des droites passant par l'origine. Il reste à vérifier si la relation (8) est satisfaite par les projections de ces droites sur les plans des uv et des uz. Soit $u = mz$ la projection de l'une de ces droites sur le plan des uz. Faisons $z = \frac{u}{m}$ dans l'équation (9); nous obtenons, en divisant par u, l'équation

$$(10) \qquad u - 2m(u - \mathrm{A}v - \mathrm{B}) - 4m^2\mathrm{A}v = 0,$$

qui représente un système de droites dont le coefficient angulaire est

$$-\frac{1-2m}{2m\mathrm{A}(1-2m)} \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2m\mathrm{A}}.$$

Le produit de ce coefficient angulaire par m est bien égal à $-\frac{1}{2\mathrm{A}}$.

Donc l'équation (10), où entre une constante arbitraire m, est l'intégrale générale de l'équation différentielle (6).

En remplaçant dans cette équation u et v par x^2 et y^2 et $2m$ par k, on obtient, pour la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde sur le plan des xy, l'équation suivante

$$\mathrm{A}y^2 + \frac{x^2}{k} = \frac{\mathrm{B}}{k-1},$$

ou

$$\frac{x^2}{\frac{\mathrm{B}k}{k-1}} + \frac{y^2}{\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}(k-1)}} = 1,$$

qui représente des ellipses réelles pour les valeurs de k supérieures à 1, des ellipses imaginaires pour k positif et plus petit que 1, et des hyperboles pour k négatif. Le grand axe des ellipses et l'axe transverse des hyperboles sont dirigés suivant l'axe des x.

QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE PROPOSÉES PAR M. ÉDOUARD LUCAS;

(voir 2e série, t. XIV, p. 509);

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Trouver tous les systèmes de deux nombres entiers dont le quotient par leur somme de la somme de leurs cinquièmes puissances est un carré parfait.*

Cette question, qui comprend comme cas particulier la question **1168**, *a pour solutions simples*

$$(3, -1, 11),\quad (8, 11, 101),$$
$$(123, 35, 13361),\quad (808, -627, 1169341).$$

Il faut trouver les solutions entières de l'équation

$$\frac{x^5+y^5}{x+y} = z^2$$

ou

$$(1)\qquad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^2.$$

1° On ne doit pas regarder comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par la permutation des valeurs de x et y.

2° Si $x = a$, $y = b$ est une solution, $x = ma$, $y = mb$ en sera aussi une, quel que soit le nombre entier m : il suffit donc de chercher les solutions en nombres premiers entre eux.

Si l'on divise par y^4 et que l'on pose $\frac{x}{y} = u$, l'équation (1) peut s'écrire

$$(2)\qquad u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 = \frac{z^2}{y^4} = t^2,$$

et l'on est ramené à trouver les solutions rationnelles de l'équation (2).

Or toute solution connue en fait découvrir d'autres par les procédés suivants, indiqués par Euler.

Soient h une solution de l'équation (2) et k^2 le résultat de sa substitution dans le premier membre de cette équation. Posons $u = v + h$; l'équation (2) devient, en développant,

$$\begin{aligned} &v^4 + (4h - 1)v^3 \\ &\quad + (6h^2 - 3h + 1)v^2 + (4h^3 - 3h^2 + 2h - 1)v + k^2 = t^2. \end{aligned}$$

Désignons, pour abréger, le premier membre par V.

1° On pose

$$V = (v^2 + mv + k)^2,$$

et l'on détermine m de manière à faire disparaître soit le terme en v^3, soit le terme en v; divisant les termes restants par v ou v^2, on a une équation du premier degré pour déterminer v, ce qui fournit deux solutions.

2° On pose

$$V = (v^2 + mv - k)^2,$$

et l'on opère comme dans le cas précédent.

3° On pose

$$V = (v^2 + mv + n)^2,$$

et l'on détermine m et v de manière à faire disparaître le terme en v et le terme indépendant, et l'on divise par v^2.

4° On pose

$$V = (mv^2 + nv + k)^2,$$

et l'on détermine m et n de manière à faire disparaître les termes en v^2 et en v, et l'on divise par v^3; on a encore une équation du premier degré pour déterminer v.

Appliquons à l'équation (2).

On a les solutions évidentes $u = 0$, $u = 1$.

Faisant $h = 1$, on a :

1°

$$V = v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

on trouve

$$m = 1, \quad v = -1, \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad v = -4, \quad u = -3.$$

2°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = -1, \quad v = -1, \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3},$$

solutions équivalentes aux précédentes.

3°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad n = \frac{7}{8}, \quad v = \frac{3}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2,$$

$$n = 1, \quad m = \frac{3}{2}, \quad v = 0, \quad u = 1.$$

Faisons maintenant $h = -3$, d'où $k = 11$:

$$V = v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121.$$

1°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + 11)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = 4, \quad u = 1,$$

$$m = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{41}{11}, \quad u = \frac{8}{11}.$$

2°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv - 11)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = \frac{228}{35}, \quad u = \frac{123}{35},$$

$$m = \frac{71}{11}, \quad v = \frac{1073}{627}, \quad u = -\frac{808}{627}.$$

3°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad n = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{35}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (mv^2 + nv + 11)^2,$$

$$n = -\frac{71}{11}, \quad m = \frac{2703}{2\times 11^3}, \quad v = \frac{763752}{219965}, \quad u = \frac{103857}{219965}.$$

On a ainsi les solutions

$$(0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (3, -1, 11), \quad (8, 11, 101),$$
$$(123, 35, 13361), \quad (808, -627, 1169341),$$
$$(103857, 219965, 40176822841).$$

Ces solutions en feront trouver d'autres indéfiniment, sans autre difficulté que la longueur des calculs, à mesure que les nombres augmentent.

Ce premier calcul donne toutes les solutions simples indiquées par M. Lucas.

2. *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^4 - 5x^2y^2 + 5y^4 = z^2.$$

Il suffit, comme plus haut, de trouver les solutions en nombres premiers entre eux. On a la solution évidente

$$y = 0, \quad x = 1.$$

Divisant par y^4 et posant $\frac{x}{y} = u$, l'équation peut s'écrire

$$u^4 - 5u^2 + 5 = \frac{z^2}{y^4} = t^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution $u = 1$, $t = 1$.

Posons $u = v + h$; il vient

$$v^4 + 4hv^3 + (6h^2 - 5)v^2 + (4h^3 - 10h)v + 1 = t^2.$$

Faisons $h = 1$:

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = t^2.$$

1° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

solution évidente *a priori*;

$$m = -3 \quad \text{donne} \quad v = 1, \quad u = 2.$$

2° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

$$m = 3 \quad \text{»} \quad v = -3, \quad u = -2.$$

3° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 2, \quad n = 1, \quad v = -2, \quad u = -1.$$

4° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = -3, \quad m = -4, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3}.$$

Comme le signe de u est arbitraire, on a les solutions

$$u = 1, 2, \frac{1}{3},$$

ce qui donne pour l'équation proposée les solutions

$$(1, 0, 1),\ (1, 1, 1),\ (2, 1, 1),\ (1, 3, 19).$$

Faisons maintenant $h = 2$.

1°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 4,\quad v = -4,\quad u = -2,$$

$$m = 6,\quad v = -\frac{19}{4},\quad u = -\frac{11}{4},\quad z = 79.$$

2°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 4,\quad v = -4,\quad u = -2,$$

$$m = -6,\quad v = \frac{3}{4},\quad u = \frac{11}{4}.$$

3°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 4,\quad n = \frac{3}{2},\quad 12v + 1 = 12v + \frac{n}{4},$$

$$v = \infty,\quad u = \infty,\quad y = 0.$$

4°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = 6,\quad m = -\frac{17}{2},\quad v = \frac{88}{57},\quad u = \frac{202}{57},\quad z = 32479.$$

On a les nouvelles solutions

$$(11, 4, 79),\ (202, 57, 32479).$$

3. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers et tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

Les côtés et l'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers sont donnés par les formules

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2, \quad s = pq(p^2 - q^2).$$

Il faut donc que l'on ait

$$(1) \qquad p^4 + 2p^3 q + 2p^2 q^2 - 2pq^3 + q^4 = r^2,$$

ou, en posant $\frac{p}{q} = u$,

$$(2) \qquad u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = \frac{r^2}{q^4} = t^2.$$

1° Il suffit de chercher les solutions de l'équation (1) en nombres premiers entre eux, car tous les triangles semblables jouiront de la même propriété.

2° Les deux solutions $u = \frac{a}{b}$ et $u = -\frac{b}{a}$ sont équivalentes. Si l'on écrit la valeur de u de telle sorte que le numérateur soit plus grand que le dénominateur en valeur absolue, le carré de l'hypoténuse devra être augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, suivant que cette valeur de u sera positive ou négative.

Cherchons d'abord une solution de l'équation (2) en posant

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (u^2 + mu + 1)^2;$$

$$m = 1 \quad \text{donne} \quad u = -4, \quad p = 4, \quad q = 1,$$

$$x = 15, \quad y = 8, \quad z = 17, \quad 2s = 20, \quad z^2 - 2s = 13^2;$$

$$m = -1, \quad u = \frac{1}{4}, \quad \text{même solution.}$$

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (mu^2 + nu + 1)^2;$$

$$n = -1, \quad m = \frac{1}{2}, \quad u = -4,$$

solution déjà trouvée.

Soient, en général, h une solution de l'équation (2), k^2 le résultat de sa substitution dans le premier membre.

Posons $u = v + h$; l'équation deviendra

$$v^4 + (4h + 2)v^3 + (6h^2 + 6h + 2)v^2 + (4h^3 + 6h^2 + 4h - 2)v + k^2 = t^2.$$

Faisons $h = -4$:

1°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + 13)^2;$$
$$m = -7, \quad v = 4, \quad u = 0,$$

solution inadmissible ;

$$m = -\frac{89}{13}, \quad v = \frac{191}{52}, \quad u = -\frac{17}{52}, \quad p = 52, \quad q = 17,$$
$$x = 2415, \quad y = 1768, \quad z = 2993, \quad z^2 + 2s = 3637^2.$$

2°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv - 13)^2;$$
$$m = -7, \quad v = \frac{120}{17}, \quad u = \frac{52}{17},$$

solution équivalente à la précédente ;

$$m = \frac{89}{13}, \quad v = \frac{2993}{1560},$$
$$u = -\frac{3247}{1560}, \quad p = 3247, \quad q = 1560,$$
$$x = 8\,109\,409, \quad y = 10\,130\,740, \quad z = 12\,976\,609,$$
$$z^2 - 2s = 9\,286\,489^2.$$

3°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + n)^2;$$
$$m = -7, \quad n = \frac{25}{2}, \quad v = \frac{17}{4}, \quad u = \frac{1}{4},$$

solution équivalente à -4.

4°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (mv^2 + nv + 13)^2;$$

$$n = -89, \quad m = -\frac{7847}{2},$$

$$v = \frac{2793476}{61575405}, \quad u = -\frac{243508144}{61575405},$$

$$x = 5550468569341071\,1, \quad y = 2998822517519664\,0,$$

$$z = 6308774669523876\,1, \quad z^2 - 2s = 336399420687296\,9^2.$$

Les mêmes méthodes, appliquées aux solutions obtenues, en feront trouver d'autres indéfiniment.

4. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

En adoptant les mêmes notations que précédemment, l'équation du problème est

$$(1) \qquad p^4 + p^3 q + 2p^2 q^2 - pq^3 + q^4 = r^2$$

ou

$$(2) \qquad u^4 + u^3 + 2u^2 - u + 1 = t^2.$$

La méthode précédente, appliquée directement à l'équation (2), donne la solution

$$u = -8, \quad p = 8, \quad q = 1,$$

$$x = 63, \quad y = 16, \quad z = 65, \quad s = 504, \quad z^2 - s = 61^2.$$

Posons $u = v + h$; il vient

$$v^4 + (4h + 1)v^3 + (6h^2 + 3h + 2)v^2$$
$$+ (4h^3 + 3h^2 + 4h - 1)v + k^2 = t^2.$$

Faisons $h = -8$:

1°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2} \quad \text{donne} \quad v = 8, \quad u = 0,$$

qui ne donne pas de triangle ;

$$m = -\frac{1889}{122}, \quad v = \frac{3839}{488}, \quad u = -\frac{65}{488} \quad \text{ou} \quad u = \frac{488}{65},$$

$$x = 233919, \quad y = 63440, \quad z = 242369, \quad z^2 + s = 257211^2.$$

2°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv - 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad v = \frac{1008}{65}, \quad u = \frac{488}{65},$$

solution identique à la précédente ;

$$m = \frac{1889}{122}, \quad v = \frac{242369}{61288},$$

$$u = -\frac{249535}{61488}, \quad p = 249535, \quad q = 61488,$$

$$x = 58486942081, \quad y = 30686816160, \quad z = 66048490369,$$

$$z^2 - s = 58864370041^2.$$

3°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad n = \frac{487}{8}, \quad v = \frac{65}{8}, \quad u = \frac{1}{8},$$

solution identique à $u = -8$.

4°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (mv^2 + nv + 61)^2;$$

$$n = -\frac{1889}{122}, \quad m = \frac{1819687}{122^3},$$

$$v = \frac{21553073880}{2791363773}, \quad u = -\frac{777836304}{2791363773},$$

$$x = 7186232337356415113,$$
$$y = 4342448160619629984,$$
$$z = 8396290968997175945,$$
$$\sqrt{z^2 + s} = 9152048360162401489.$$

Au moyen des solutions déjà obtenues, on pourra en trouver d'autres indéfiniment.

5. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que l'aire du triangle, augmentée des carrés construits sur les trois côtés, soit égale à un carré parfait.*

L'équation à satisfaire est

$$pq(p^2 - q^2) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2$$

ou

$$pq(p+q)(p-q) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2.$$

Or, dans les quatre nombres p, q, $p+q$, $p-q$, il y a nécessairement un multiple de 3, et il n'y en a qu'un seul, puisque p et q sont supposés premiers entre eux : le premier membre de l'équation est donc de la forme $3m + 2$, incompatible avec celle d'un carré ; il en résulte que le problème proposé n'a pas de solution.

On voit de même qu'il n'existe pas de triangle rectangle en nombres entiers tel que la somme des carrés des trois côtés, diminuée de l'aire du triangle, soit un carré parfait.

NOTE SUR LA CARDIOÏDE ET LE LIMAÇON DE PASCAL;

PAR M. WEILL.

Considérons deux circonférences se coupant aux points A et B. Par le point A menons une sécante quelconque rencontrant les deux circonférences aux points C et D, et menons en ces points les tangentes qui se rencontrent en M. Lorsque la sécante pivote autour du point A, l'angle $\widehat{CMD}$ reste constant; les quatre points C, M, D, B sont sur une même circonférence qui a pour enveloppe le lieu décrit par le point M. Ce lieu est une cardioïde ayant le point B pour point de rebroussement; si l'on mène au point A les tangentes aux deux circonférences données, ces deux droites déterminent respectivement sur les circonférences un point où elles sont touchées par la cardioïde. On en déduit les conséquences suivantes :

Théorème I. — *On considère deux coniques se coupant en* A, B, I, J. *Une sécante menée par le point* A *rencontre les coniques en* C *et* D; *on mène en ces points les tangentes qui se rencontrent en* M :

1° *Le rapport anharmonique de quatre quelconques des cinq droites* MC, MD, MB, MI, MJ *reste constant quand la sécante tourne autour du point* A.

2° *Les six points* M, C, D, B, I, J *sont sur une même conique, qui a pour enveloppe le lieu du point* M.

3° *Le lieu du point* M *est une courbe du quatrième degré ayant les points* B, I, J *pour points de rebroussement et tangente à chacune des coniques au point où elle est rencontrée par la tangente menée à l'autre au point* M.

Théorème II. — *Étant donnée une courbe quelconque du quatrième degré possédant trois points de rebroussement, par un point* A *de son plan on peut mener deux coniques touchant la courbe et passant par les trois points de rebroussement; la droite qui joint le point* A *au point où l'une des deux coniques touche la courbe est tangente à l'autre conique.*

Théorème III. — *Étant donnée une courbe quelconque* *du quatrième degré possédant trois points de rebroussement et une droite quelconque* D, *les quatre points de rencontre de cette droite* D *avec la courbe et les quatre points où cette même droite est touchée par les quatre coniques qui passent par les points de rebroussement et touchent la courbe se correspondent deux à deux, c'est-à-dire que, lorsque les coordonnées d'un des points du premier groupe sont données, celles d'un point du deuxième groupe sont des fonctions rationnelles des premières, et inversement.*

Pour démontrer ce théorème, considérons une courbe du quatrième degré ayant M, N, P pour points de rebroussement, prenons sur cette courbe un point K et menons par ce point une droite D; la conique qui passe par les quatre points M, N, P, K, en touchant la courbe considérée au point K, rencontre la droite D en un second point L; la conique qui touche la droite D au point L et qui passe par les points M, N, P touche la courbe considérée, en vertu du théorème précédent; à chaque point de rencontre de la droite D avec la courbe correspondra donc une conique et une seule touchant la droite D, passant par les trois points de rebroussement et touchant la courbe. La proposition est donc établie.

Appelons *cercle générateur de la cardioïde* le cercle variable qui passe par le point de rebroussement et touche la courbe.

Théorème IV. — *Si d'un point fixe* P *on mène les tangentes à la série des cercles générateurs de la cardioïde, le lieu des points de contact de ces tangentes est une courbe du sixième degré ayant un point double au point* P *et trois points triples, dont deux sont les ombilics du plan et le troisième est le point de rebroussement de la cardioïde; les tangentes en ce point triple* *sont la droite qui joint le point au point* P *et les deux bissectrices des angles formés par cette droite avec la tangente à la cardioïde. La courbe du sixième degré est unicursale.*

Pour établir ce théorème, il suffit de remarquer que le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe P à un système de coniques ayant pour caractéristiques μ, ν est une courbe de degré $\mu + \nu$ ayant au point P un point multiple d'ordre μ. Or, on a ici

$$\mu = 2, \quad \nu = 4.$$

Théorème V. — *Étant donnée une courbe quelconque du quatrième degré possédant trois points de rebroussement, si d'un point fixe* P *on mène les tangentes à toutes les coniques passant par les trois points de rebroussement et tangentes à la courbe, le lieu de leurs points de contact est une courbe du sixième degré, unicursale, ayant un point double au point* P *et trois points triples aux trois points de rebroussement; les tangentes en chacun des points triples se déterminent individuellement; l'une d'elles passe au point* P.

Théorème VI. — *Étant donnée une parabole et un point* P *dans son plan, on considère une tangente quelconque à la parabole et on mène un cercle tangent à cette droite et passant par le point* P *et le foyer de la parabole; le lieu des points de contact est une courbe du troisième degré; toute tangente à la parabole rencontre cette courbe du troisième degré en trois points que l'on peut trouver par la règle et le compas; en d'autres termes, l'équation du troisième degré dont dépend le problème a toujours une racine commensurable.*

Une propriété analogue se trouvera dans tout problème où il s'agira de trouver le lieu des points de contact des cercles passant par deux points fixes avec un système de droites ou de cercles dont le mouvement est déterminé. Cette remarque est susceptible d'une généralisation bien plus grande et donne des équations dont le premier membre se décompose, par suite d'une propriété géométrique qui permet de distinguer certaines racines des autres; on ne peut pourtant en conclure que les points qui correspondent à ces racines décrivent des courbes distinctes.

Théorème VII. — *Si d'un point* P *pris sur la cardioïde on mène les tangentes à l'un des cercles générateurs, les points de contact se déterminent individuellement. Quand on considère le système des cercles générateurs, le lieu des points de contact des tangentes menées du point* P *se compose de deux courbes distinctes; l'une est le cercle générateur qui passe au point* P, *et l'autre est une anallagmatique du quatrième degré ayant un point double au point de rebroussement de la cardioïde.*

Théorème VIII. — *Par un point fixe* P *pris sur une parabole et par le foyer on mène un cercle tangent à une tangente variable de la courbe; le lieu des points de contact se compose d'une droite et d'une conique; la droite est la tangente au point* P *à la parabole.*

Théorème IX. — *On considère une conique, un triangle circonscrit* ABC *et un point fixe* P *pris sur la courbe. Par ces quatre points on fait passer une conique tangente à une tangente variable de la conique fixe; les points de contact des deux coniques qui répondent à la question se déterminent individuellement; l'un d'eux décrit une droite et l'autre une conique.*

Théorème X. — *Étant donnée une courbe du qua-*

trième degré à trois points de rebroussement, si l'on considère une conique passant par ces trois points et tangente à la courbe, les points de contact des tangentes menées d'un point P *de la courbe à cette conique se déterminent individuellement; lorsque la conique varie, le point* P *restant fixe, le lieu des points de contact se compose de deux courbes distinctes; l'une est la conique qui passe par les trois points de rebroussement et touche la courbe au point* P; *l'autre est une courbe du quatrième degré ayant les trois points de rebroussement pour points doubles et qui est, par suite, unicursale.*

Les quatre derniers théorèmes que nous venons d'énoncer, et qui découlent de la même propriété, présentent l'exemple remarquable d'un système de deux points qu'aucune propriété géométrique ne semble distinguer et qui décrivent deux courbes entièrement différentes; on explique facilement ce résultat en observant que la quantité placée sous le radical carré introduit par la résolution de l'équation du second degré dont dépend la question est un carré parfait pour une position convenable du point P; ce cas se présente justement quand ce point fixe est situé sur la courbe considérée; le double signe du radical donne alors deux courbes différentes.

Considérons deux circonférences ayant pour centres O et O', et un point M; soient MA et MB deux tangentes menées par ce point aux deux circonférences. Menons les droites OC, O'C respectivement parallèles à AM et MB, et joignons CM; cette droite rencontre en un point P la circonférence qui passe par les points O, C, O'. Ceci posé, si le point M se déplace de manière que l'angle AMB reste constant, la longueur CM sera constante et le point P sera un point fixe; dès lors, le point M décrit un *limaçon de Pascal* ayant le point P pour point double et le cercle OCO' pour *cercle directeur*; ce résultat est bien connu.

Si l'on mène la tangente $M'B'$ au cercle O' qui est parallèle à MB, elle détermine sur MA un point M', et le lieu de ce point est un deuxième *limaçon de Pascal* ayant pour point double un point Q situé sur le cercle OCO'.

Les deux points P et Q sont tels, comme le montre un raisonnement fort simple, que l'on voit de ces points les deux circonférences O et O' sous le même angle; ces points sont donc à l'intersection de la circonférence OCO' et de la circonférence qui a pour diamètre la droite SS' qui joint les centres de similitude des deux circonférences.

Le lieu des points d'où les tangentes menées à deux circonférences font un angle donné α se compose donc (lorsque l'angle α est bien défini) de deux limaçons. Si l'angle α varie, les points doubles P et Q des deux limaçons se meuvent sur une circonférence, et la droite PQ passe par un point fixe; le même résultat a lieu si les rayons des deux circonférences changent, leur rapport restant constant. Supposons les deux circonférences invariables, ainsi que l'angle α; le limaçon de Pascal correspondant et ayant le point P pour point double est doublement tangent à chacune des circonférences, et les droites qui joignent les points de contact se coupent sur l'axe de symétrie de la courbe. On en conclut les théorèmes suivants:

THÉORÈME XI. — *On considère une circonférence variable dont le centre se meut sur une circonférence fixe et qui est vue d'un point* P *de cette circonférence sous un angle donné* ω; *cette circonférence a pour enveloppe un limaçon de Pascal ayant le point* P *pour point double; considérant deux quelconques de ces circonférences comme fixes, l'angle circonscrit et ayant son sommet en un point quelconque du limaçon sera con-*

stant; la circonférence variable est orthogonale à une circonférence fixe.

Théorème XII. — *Un cercle doublement tangent à une conique et dont le centre est sur l'axe non focal est vu d'un foyer sous un angle constant et égal au supplément de l'angle des asymptotes.*

Théorème XIII. — *Le lieu des foyers des coniques qui restent semblables à elles-mêmes et doublement tangentes à un cercle fixe (la corde de contact étant parallèle à l'axe focal), et qui sont assujetties à une autre condition simple quelconque, est un cercle concentrique au cercle donné.*

Théorème XIV. — *Si l'on considère une suite de cercles ayant leurs centres sur le cercle directeur d'un limaçon de Pascal et doublement tangents à cette courbe, le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point* P *du plan à ces cercles est une courbe du sixième degré ayant pour points doubles le point* P *et le point double du limaçon et pour points triples les ombilics du plan.*

Considérons une circonférence O et le limaçon de Pascal ayant cette circonférence pour directrice et un point P de cette circonférence pour point double. Considérons la circonférence qui a son centre en un point A de cette circonférence et qui est doublement tangente au limaçon. Soit un point M du limaçon situé sur le rayon vecteur PM qui rencontre la circonférence en un point B. Menons la droite AB et par le point M une parallèle MC à cette droite; MC touchera au point C la circonférence A; le rayon CA rencontre la circonférence O en un point D. Le cercle qui a pour diamètre MD touche le limaçon au point M et passe par le point double P et par le point de contact C de la tangente MC menée du point M au cercle A. On a donc les théorèmes suivants :

Théorème XV. — *Étant donnée une circonférence ayant son centre sur le cercle directeur d'un limaçon de Pascal et doublement tangente à la courbe, les points de contact des tangentes menées à cette circonférence par un point* M *du limaçon se déterminent individuellement; si la circonférence varie, l'un des points de contact décrit la circonférence qui touche le limaçon au point* M *en passant par le point double, et l'autre décrit une anallagmatique du quatrième degré.*

Théorème XVI. — *Étant donnés un cercle doublement tangent à un limaçon de Pascal et ayant son centre sur le cercle directeur, et une droite* D *tangente à ce cercle, l'équation du quatrième degré qui donne les points de rencontre de la droite* D *avec la courbe a une racine rationnelle en fonction des coefficients.*

Théorème XVII. — *Si l'on considère un point* A *d'une conique et un cercle* C *doublement tangent à la courbe (la corde de contact étant parallèle à l'axe focal), les deux cercles qu'on peut mener par le point* A *et le foyer* F *tangentiellement au cercle* C *se déterminent individuellement; le point de contact du cercle* C *avec l'un d'eux se trouve sur la tangente menée par le point* A *à la conique.*

Le théorème que nous venons d'énoncer se prête à un grand nombre d'énoncés différents, car il établit une relation entre les tangentes qu'on peut mener par un point à une conique, les foyers et les deux cercles qu'on peut mener par le point ayant avec la conique un double contact, la corde de contact étant parallèle à l'axe focal. On a, en particulier, les théorèmes suivants :

Théorème XVIII. — *Le lieu des foyers d'une conique tangente à une droite* D *en un point* A *et doublement tangente à un cercle* C (*la corde de contact étant parallèle à l'axe focal*) *se compose de deux cercles passant par le point* A *et respectivement tangents au cercle* C *aux points où il est rencontré par la droite* D.

Théorème XIX. — *Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux circonférences se compose d'une droite et d'une circonférence, pourvu que les cordes de contact soient parallèles dans les deux circonférences.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer, d'après le théorème XII, que du foyer on voit sous le même angle deux circonférences doublement tangentes à la conique et ayant leurs centres sur l'axe non focal.

Considérons deux courbes quelconques et un angle AMB formé par les tangentes MA et MB menées du point M aux deux courbes; lorsque le point M se déplace, l'angle AMB restant constant, le cercle circonscrit au triangle AMB a deux enveloppes; l'une est le lieu du point M, car, pour mener la tangente en M au lieu décrit par ce point, on peut remplacer les deux courbes, dans le voisinage des points A et B, par ces points eux-mêmes; pour obtenir le point de contact du cercle avec sa deuxième enveloppe, considérons les cercles O et O', osculateurs aux deux courbes en A et B; comme le cercle AMB dépend des éléments infiniment petits du premier ordre, la recherche de son enveloppe ne dépendra que de ceux du deuxième ordre, et l'on pourra substituer aux deux courbes leurs cercles osculateurs; le point de contact du cercle avec sa deuxième enveloppe est donc le point double P du limaçon de Pascal qui constitue le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante AMB circonscrit aux deux circonférences O et O'; on aura donc ce point P en menant par les points O et O' des parallèles OD, O'D aux droites MA, MB et en joignant les points M et D; le point où la droite MD rencontre la circonférence est le point cherché.

Reprenons le système de deux cercles O et O' et de l'angle AMB de grandeur constante circonscrit aux deux cercles. Le point M décrit un limaçon de Pascal ayant pour point double un point P situé sur la circonférence OO'M. D'après ce qui a été démontré plus haut, on voit du point P les deux circonférences O et O' sous le même angle; donc le rapport des rayons OA, O'B est égal au rapport des distances PO, PO'; de plus, il est facile de voir que les angles AOP, BO'P sont égaux; on en conclut que le rapport $\frac{PA}{PB}$ reste constant, ainsi que l'angle APB; donc, quand le point M se déplace sur le limaçon, le triangle APB reste semblable à lui-même; en particulier, l'angle PAB reste constant, et, comme le point A se meut sur une circonférence, la droite AB enveloppe une conique ayant le point P pour foyer.

On a donc les théorèmes suivants :

Théorème XX. — *Quand un angle* AMB *de grandeur constante est circonscrit à deux cercles, la droite* AB *qui joint les points de contact de ses côtés avec les deux cercles enveloppe une conique ayant pour foyer le point double du limaçon de Pascal qui constitue le lieu du point* M.

Théorème XXI. — *Si autour du foyer commun* F *de deux coniques on fait tourner un angle* AFB *égal à l'angle des axes focaux des deux coniques, le lieu du point* M *de rencontre des tangentes menées aux deux coniques respectivement en* A *et* B *est un cercle.*

On peut envisager le problème qui consiste à trouver le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à deux circonférences comme un cas particulier du problème suivant :

Trouver le lieu du sommet d'un angle circonscrit à deux circonférences, les coefficients angulaires des côtés étant liés par une relation linéaire par rapport à chacun d'eux.

Le lieu est alors du huitième degré ; il se décompose lorsque l'angle doit être constant (on a alors deux limaçons de Pascal), ou bien lorsque l'angle doit avoir une bissectrice de direction constante. Dans ce dernier cas, l'équation de chacune des courbes du quatrième degré qui composent le lieu prend une forme remarquable ; avec des axes rectangulaires convenablement choisis, cette équation est

$$xy = K\delta + H^2,$$

H et K étant des constantes, et δ étant la distance d'un point du lieu à un point fixe situé sur l'hyperbole équilatère qui a pour équation

$$xy - H^2 = 0.$$

SUR UNE QUESTION DE LICENCE ;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

D'après M. Catalan (*Nouvelle Correspondance mathématique*, novembre 1880), la solution de la question de licence publiée dans ce Recueil, 2e série, t. XX, p. 35, peut être simplifiée de la manière suivante.

Pour l'homogénéité, remplaçons C par $\frac{1}{2c}$ et ka^2 par

b^2; les équations du problème sont

$$\sin V = \frac{r^2 + b^2}{2cr}, \quad d\theta = \frac{dr}{r} \tang V.$$

De la première on tire

$$r = c \sin V \pm \sqrt{c^2 \sin^2 V - b^2},$$

et par conséquent

$$dr = c \cos V \left(1 \pm \frac{c \sin V}{\sqrt{c^2 \sin^2 V - b^2}}\right) dV,$$

puis

$$d\theta = \frac{c \sin V}{\sqrt{c^2 - b^2 - c^2 \cos^2 V}}\, dV.$$

L'intégrale est, en supposant nulle la constante,

$$\theta = \arc \cos \frac{c \cos V}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

La courbe (c) est donc, si l'on veut, représentée par le système des formules

$$c \sin V = \frac{r^2 + b^2}{2r}, \quad c \cos V = \sqrt{c^2 - b^2} \cos \theta.$$

Si l'on élimine V, on a l'équation unique

$$c^2 = \frac{(r^2 + b^2)^2}{4r^2} + (c^2 - b^2) \cos^2 \theta,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$4(b^2 x^2 + c^2 y^2) = (x^2 + y^2 + b^2)^2,$$

équation qui peut encore s'écrire

$$\left(x^2 + y^2 + 2\sqrt{c^2 - b^2}\, y - b^2\right)\left(x^2 + y^2 - 2\sqrt{c^2 - b^2}\, y - b^2\right) = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît que *la courbe se compose de deux circonférences,* ou, plus exactement, les courbes (c) et (C) sont des circonférences comprises entre deux tangentes communes menées du pôle, et dont les rayons sont dans le rapport k.

CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Voulez-vous bien me permettre de vous adresser quelques observations relativement aux questions 1324 et 1296 et aux solutions qui en ont été données dans le dernier numéro d'octobre. Je dirai tout d'abord qu'en proposant la question 1324 je demandais une démonstration et non une vérification, qui n'offrait aucune difficulté : la question reste donc toujours proposée.

Quant à la question 1296, il est certain que M. Realis, en la proposant, a voulu offrir un exercice de vérification aux jeunes lecteurs des *Annales*, car il sait aussi bien que personne que les formules qu'il donne sont un cas particulier des formules générales de Cauchy démontrées dans le quatrième cahier des *Exercices mathématiques*. Il est curieux que l'auteur de la vérification arrive, sans y faire attention, à des formules plus simples que celles de Cauchy, les formules (2) (2^e^ série, t. XIX, p. 458), qui, après la suppression du facteur commun λPQR, sont précisément les formules (51) de mon Mémoire (p. 408; 1879). L'identité (3) (p. 459) se trouve aussi dans le Mémoire cité (p. 407; 1879). Elle est remarquable en ce qu'elle donne la solution d'une question que j'ai proposée autrefois dans les *Nouvelles Annales* : *Trouver six nombres entiers* x, y, z, x', y', z' *tels que ces nombres satisfassent à l'un ou l'autre des deux sys-*

tèmes

$$x^3 + y^3 + z^3 = x'^3 + y'^3 + z'^3, \qquad xyz = x'y'z;$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = x'^3 + y'^3 + z'^3, \quad x + y + z = x' + y' + z'.$$

Lors de la dernière réunion à Reims de l'Association pour l'avancement des Sciences, j'ai communiqué les formules (51) à M. Sylvester, qui m'a dit les avoir trouvées de son côté, mais étendues au cas plus général de l'équation

$$(1) \qquad aX^3 + bY^3 + dXYZ = cZ^3.$$

Voici en quelques mots une démonstration très-simple :

(x, y, z), (x', y', z') étant deux solutions de l'équation (1), les formules de Cauchy donnent

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= 3byy'(xy' - yx') - 3czz'(xz' - zx') \\ &\quad + d(x^2y'z' - x'^2yz), \\ Y &= 3axx'(yx' - xy') - 3czz'(yz' - zy') \\ &\quad + d(y^2x'z' - y'^2xz), \\ Z &= 3axx'(zz' - xz') + 3byy'(zy' - yz') \\ &\quad + d(z^2y'x' - z'^2xy). \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, des deux équations

$$ax^3 + by^3 + dxyz = cz^3, \quad ax'^3 + by'^3 + dx'y'z' = cz'^3$$

on tire

$$\frac{c(z^3y'^3 - y^3z'^3) + dyy'(y^2x'z' - y'^2xz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3} = a,$$
$$\frac{c(x^3z'^3 - z^3x'^3) - dxx'(x^2y'z' - x'^2yz)}{x^3y'^3 - y^3x'^3} = b.$$

Si maintenant on substitue l'expression précédente de b dans la première des formules (2), on obtient

$$X = \frac{[3c(xz' - zx')(yz' - zx') + d(xy' - yx')^2](x^2y'z' - x'^2yz)}{x^2y'^2 + xyx'y' + y^2x'^2}.$$

Or la valeur de Y se déduit évidemment de celle de X en permutant x, y et x', y', et comme, par ce changement, tous les facteurs de X restent les mêmes, excepté $x^2y'z' - x'^2yz$, qui devient $y^2x'z' - y'^2xz$, on a

$$\frac{X}{Y} = \frac{x^2y'z' - x'^2yz}{y^2x'z' - y'^2xz}.$$

On obtient de même

$$\frac{Z}{Y} = \frac{z^2x'y' - z'^2xy}{y^2x'z' - y'^2xz}.$$

Les formules (51) sont donc étendues à l'équation (1).

M. Sylvester, si je ne me trompe, a communiqué sa démonstration à M. Lucas : il serait intéressant qu'elle fût publiée.

Veuillez agréer, Monsieur, etc.

DESBOVES.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1275

(voir 2e série, t. XVII, p. 335);

PAR M. R.-W. GENÈSE.

On donne quatre points a, b, c, d dans un plan et deux points ρ, ρ', non situés dans ce plan.

Les droites d'intersection de deux couples de plans (ρab), $(\rho' cd)$ *et* (ρcd), $(\rho' ab)$ *sont dans un même plan* (P) ; *on peut obtenir six plans analogues en combinant de toutes les manières possibles les points a, b, c, d;*

ces six plans se coupent suivant une même droite (D) *qui rencontre* $\rho\rho'$. (GENTY.)

Un point est donné par les rapports α, β, γ, δ des aires des tétraèdres $\mathrm{P}\rho\mathrm{BC}$, $\mathrm{P}\rho\mathrm{CA}$, $\mathrm{P}\rho\mathrm{AB}$ et PABC à l'aire de ρabc. Soient α, β, γ, δ les coordonnées de ρ'; p, g, r, o celles de d. Les coordonnées de a, b, c, ρ sont

$$(1, 0, 0, 0),\quad (0, 1, 0, 0),\quad (0, 0, 1, 0)\quad \text{et}\quad (0, 0, 0, 1).$$

Alors l'équation du plan ρab est

$$\gamma = 0; \tag{1}$$

celle de $\rho' cd$ est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(p\beta_1 - q\alpha_1)\delta + \delta_1(q\alpha - p\beta) = 0. \tag{2}$$

Le plan $\rho' ab$ est représenté par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\delta_1\gamma - \gamma_1\delta = 0, \tag{3}$$

et ρcd par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$q\alpha - p\beta = 0. \tag{4}$$

Le plan

$$(p\beta_1 - q\alpha_1)(\gamma_1\delta - \delta_1\gamma) + \gamma_1\delta_1(q\alpha - p\beta) = 0$$

contient les intersections de (1) avec (2) et de (3) avec (4). Alors c'est un des plans de la question. Il y en a *deux* autres :

$$(q\gamma_1 - r\beta_1)(\alpha_1\delta - \delta_1\alpha) + \alpha_1\delta_1(r\beta - q\gamma) = 0$$

et

$$(r\alpha_1 - p\gamma_1)(\beta_1\delta - \delta_1\beta) + \beta_1\delta_1(p\gamma - r\alpha) = 0.$$

Les premiers membres de ces équations s'annulent par addition. Alors les trois plans passent par une même droite.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1313

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. S. REALIS.

Un nombre p, qui est la somme de n cubes entiers, étant donné, assigner un nombre q tel que le produit p^2q soit la somme algébrique de n cubes entiers.

Soit

$$p = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots + \alpha_n^3,$$

et posons

$$P_1 = 2\alpha_1^3 + 3\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2) - (\alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots + \alpha_n^3),$$
$$P_2 = 2\alpha_2^3 + 3\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2) - (\alpha_1^3 + \alpha_3^3 + \ldots + \alpha_n^3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$P_n = 2\alpha_n^3 + 3\alpha_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n-1}^2) - (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \ldots + \alpha_{n-1}^3),$$
$$q = (9 - n)(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \ldots + \alpha_n^3) + 9[\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2) + \ldots + \alpha_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n-1}^2)].$$

Nous aurons, par identité,

$$p^2 q = P_1^3 + P_2^3 + \ldots + P_n^3.$$

Note. — La solution donnée, dans le numéro de septembre dernier, par M. Marcello Rochetti, ne répond pas aux termes de l'énoncé.

Question 1342

(voir 2e série, t. XIX, p. 144 et 479);

PAR M. A. LEINEKUGEL.

D'un point donné M *on mène deux droites normales à un paraboloïde; soient a et b leurs pieds, α le pied de la perpendiculaire abaissée de* M *sur la corde ab et β le conjugué harmonique de α relativement aux points a et b; démontrer que le point β est sur la droite menée par* M *perpendiculairement à l'axe.*

(LAGUERRE.)

Soit D la droite d'intersection des plans tangents en a et en b. Par cette droite D menons le plan diamétral DN conjugué aux cordes parallèles à ab et le plan DQ parallèle à ab. Ces quatre plans forment un faisceau harmonique, le plan Mab les coupe suivant un faisceau harmonique de quatre droites et les perpendiculaires abaissées du point M sur ces quatre droites forment aussi un faisceau harmonique. La proposition s'en déduit immédiatement, car dans les paraboloïdes tous les plans diamétraux sont parallèles à l'axe.

Note. — La même question a été résolue par M. A. Gentil, élève du lycée de Grenoble.

Question 1344
(voir 2^e série, t. XIX, p. 433);

PAR M. FRANÇOIS LAUDIERO,
Élève de l'Université de Naples.

Soient A, B, C, D *quatre points d'une conique* (S), *et* M *un point quelconque; si l'on mène les droites* MA, MB, MC, MD *qui rencontrent de nouveau la conique* (S) *en des points* A', B', C', D' *respectivement, les deux coniques* (M, A, B, C, D), (M, A', B', C', D') *auront la même tangente au point* M. (GENTY.)

On sait que, si deux coniques φ, φ' se coupent aux points A, B, C, D et si l'on mène par A, B respectivement deux droites qui coupent φ en F, G et φ' en F', G', les cordes FG, F'G concourent en un point H de la droite CD, et il est clair que, si les points F', G' sont infiniment voisins, la droite FG et la tangente en F'G' à la conique φ' se coupent sur la droite CD.

Cela posé, désignons par ψ, ψ' les deux coniques

$$(M, A, B, C, D), \quad (M, A', B', C', D')$$

respectivement, et observons que pour les coniques (S), φ, qui se coupent dans les quatre points A, B, C, D, la tangente à la conique φ en M et les cordes CD, B'A' concourent en un même point. De même, pour les coniques (S), φ', la tangente en M à la conique φ' et les cordes B'A', CD concourent en un même point.

Donc les deux tangentes en M aux coniques φ, φ' coïncident, et les coniques φ, φ' ont conséquemment la même tangente au point M.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; F. Pisani; N. Goffart; A. Droz; J. Marchal; H. Herzog, du lycée de Rouen; E. Pecquery, élève du lycée du Havre.

Question 1348

(voir 2ᵉ série, t. XIX, p. 480);

PAR M. J. BOUDÈNES,
Élève du lycée de Grenoble.

On donne une parabole P *et on propose :*

1° *De trouver l'équation du cercle* C *qui passe par un point* M *du plan et par les points de contact des tangentes menées de ce point à la parabole ;*

2° *De trouver le lieu des points* M *pour lesquels ce cercle a un rayon constant ;*

3° *De trouver le lieu du centre de ce cercle de rayon constant ;*

4° *De démontrer que la polaire du point* M *par rapport à la parabole et la seconde corde d'intersection du cercle et de la parabole se coupent sur une droite déterminée.* (BARBARIN.)

1° On sait que les cordes d'intersection de deux coniques à axes parallèles sont également inclinées sur les directions de ces axes. Dès lors, si nous prenons pour origine le foyer de la parabole et pour axe des x l'axe de cette courbe, son équation sera

$$(1) \qquad y^2 = 2px + p^2,$$

et, si α, β sont les coordonnées du point M, la polaire de ce point sera représentée par l'équation

$$(2) \qquad \beta y - p(\alpha + x) + p^2 = 0.$$

Toute conique passant par l'intersection de la droite précédente et de la parabole, et ayant un axe parallèle à celui de cette dernière, aura par suite une équation de la forme

$$[\beta y - p(\alpha + x) + p^2]\left(y + \frac{p}{n}x + n\right)$$
$$+ \lambda(y^2 - 2px - p^2) = 0.$$

Pour que ce soit un cercle, il faut d'abord que

$$\lambda = -\frac{p^2 + \beta^2}{\beta},$$

et, pour que ce cercle passe par le point M,

$$n = \frac{p(p - \alpha)}{\beta}.$$

L'équation de ce cercle est donc

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &x^2 + y^2 - \frac{2x}{p}(p^2 + \beta^2) + \frac{2\beta y}{p}(p - \alpha) \\ &\qquad - [(p - \alpha)^2 + p^2 + \beta^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

2° Son rayon a pour valeur la distance du centre au point M. Le lieu du point M pour lequel ce cercle a un rayon constant est donc, α, β étant les coordonnées courantes,

$$\left(\frac{p^2 + \beta^2}{p} - \alpha\right)^2 + \left[\frac{(p - \alpha)\beta}{p} - \beta\right]^2 = R^2$$

ou

$$(p^2 + \beta^2)[(p - \alpha)^2 + \beta^2] = p^2 R^2,$$

équation du quatrième degré qui représente une courbe passant par les points cycliques. Elle devient, si l'on transporte l'origine au point $x = -p$ sur l'axe des x,

$$(4)\qquad (p^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = p^2 R^2.$$

3° Les coordonnées du centre du cercle de rayon R étant devenues, par la transformation précédente de coordonnées,

$$(5)\qquad x = \frac{p^2 + \beta^2}{p}, \quad y = \frac{\alpha\beta}{p},$$

le lieu de ce centre, pour R constant, a donc pour équation

$$x[y^2+(x-p)^2]=R^2(x-p),$$

obtenue par l'élimination de α, β entre la condition (4) et les équations (5). Ce lieu représente une courbe du troisième degré passant encore par les points circulaires à l'infini.

4° Les deux cordes d'intersection du cercle (3) et de la parabole (1) étant

$$\beta y-p(\alpha+x)+p^2=0$$

et

$$\beta y+px+p(p-\alpha)=0,$$

on voit aisément, en les retranchant, que le lieu de leur point d'intersection est

$$x=0,$$

et que, par suite, ces deux droites se coupent toujours sur l'axe des x, c'est-à-dire sur la perpendiculaire à l'axe menée du foyer.

Note. — La même question a été résolue par MM. H. Lez; Moret-Blanc; Baron, élève du lycée Henri IV; G. Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; E. Fauquembergue; A. Geneix-Martin; J. Netter, élève du lycée de Nancy.

Question 1353

(voir 2e série, t. XIX, p. 528);

PAR M. J.-B. DELACOURCELLE,

Enfant de troupe au 53e de ligne, à Tarbes.

Soient ABC *un triangle donné,* A_1, B_1, C_1 *trois points pris sur les côtés de ce triangle et tels qu'on ait*

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{l}{m},\quad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{l'}{m'},\quad \frac{C_1A}{C_1B}=\frac{l''}{m''};$$

l'aire du triangle $A_1B_1C_1$ *est égale à l'aire du triangle* ABC, *multipliée par*

$$\frac{ll'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m'')}.$$

(GENTY).

Les deux triangles AB_1C_1 et ABC, ayant un angle égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle. On a donc

$$\frac{AB_1C_1}{ABC} = \frac{AC_1 \times AB_1}{AB \times AC} = \frac{AC_1}{AB} \times \frac{AB_1}{AC}$$
$$= \frac{AC_1}{AC_1 + BC_1} \times \frac{AB_1}{AB_1 + CB_1};$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{AB_1C_1}{ABC} = \frac{l''}{l''+m''} \times \frac{m'}{l'+m'} = \frac{l''m'}{(l''+m'')(l'+m')}.$$

On obtient de la même manière

$$(2) \qquad \frac{BA_1C_1}{ABC} = \frac{lm''}{(l''+m'')(l+m)},$$

$$(3) \qquad \frac{CA_1B_1}{ABC} = \frac{l'm}{(l'+m')(l+m)}.$$

Or on a

$$A_1B_1C_1 = ABC - AB_1C_1 - BA_1C_1 - CA_1B_1.$$

En portant, dans cette identité, les valeurs de AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 tirées des égalités (1), (2), (3), on trouve, toute réduction faite,

$$A_1B_1C_1 = ABC \times \frac{ll'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m'')}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Robert, à Montreuil (Seine); Choudadow, de Strawropole (Caucase); A. Droz, à Porrentruy (Berne); H. Lez; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; F. Pisani, professeur à l'Institut royal technique de Messine; J. Boudènes et Désiré Giroud, élèves du lycée de Grenoble; E. Pecquery et É. Chrétien, élèves du lycée du Havre.

Question 1356

(voir 2e série, t. XX, p. 48).

PAR MM. E. PECQUERY ET É. CHRÉTIEN,
Élèves du lycée du Havre.

Il y a trois cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points.
(E. G.).

L'équation générale d'une cubique contenant neuf paramètres variables, si l'on exprime que la cubique passe par huit points donnés, on aura huit relations qui détermineront huit des paramètres en fonction du neuvième au premier degré. L'équation générale de la cubique ne contiendra donc finalement qu'un seul paramètre variable au premier degré.

Si maintenant on rapporte la cubique à des axes, dont la droite donnée est l'axe des x, et l'origine le point donné sur cette droite, pour $y = 0$ on a d'abord $x = 0$, puis deux autres racines données par une équation du second degré en fonction du paramètre variable qui y entre au premier degré.

On exprimera que la cubique est tangente à l'axe des x en écrivant que cette équation du second degré en x a ses deux racines égales, ce qui donne, en général, une équation du second degré pour déterminer le paramètre variable, ou en exprimant que $x = 0$ est racine de cette équation, ce qui donne une équation du premier degré pour déterminer le même paramètre. Donc, en général, il y a trois valeurs pour ce paramètre, et par suite trois cubiques satisfaisant aux conditions données.

Note. — M. Dewulf fait remarquer que le théorème peut être généralisé ainsi :

Dans un faisceau de courbes de l'ordre n, il y a, en général, $2(n-1-\delta)$ courbes tangentes à une droite qui passe par δ points de la base du faisceau, en des points autres que ces δ points.

On peut énoncer un théorème analogue où la droite quelconque est remplacée par une courbe de l'ordre m.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Leçons de Statique graphique, par *Antonio Favaro*; traduites de l'italien par *Paul Terrier*. Ire Partie : Géométrie de position. In-8°, avec figures dans le texte. Prix : 7fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1879.

Cours de Calcul différentiel et intégral; par *J.-A. Serret*. 2e édition. 2 vol. in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 24fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1880.

Traité d'Algèbre, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement, par *H. Laurent*. 3e édition, revue et mise en harmonie avec les nouveaux programmes. Ire Partie, à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires; IIe et IIIe Parties, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. 3 vol. in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 12fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

Introduction a la méthode des quaternions; par *C.-A. Laisant*. In-8°, avec figures dans le texte. Prix : 6 fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

Annuaire pour l'an 1881, publié par le *Bureau des Longitudes*, avec des Notices scientifiques. In-18 de 790 pages, avec figures dans le texte et carte. Prix : 1fr, 50. Paris, Gauthier-Villars; 1881.

Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an 1881. Météorologie, Agriculture, Hygiène. In-18, avec figures dans le texte. Prix : 2fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

Éléments d'Arithmétique, à l'usage de l'enseignement primaire supérieur, par *J.-B.-V. Reynaud*. In-8°. — Paris, Delalain; 1879.

Éléments de Géométrie, par *A. Amiot*; revus et augmentés par *F. Vintéjoux*. In-8°, avec figures dans le texte. — Paris, Delagrave; 1881.

Traité de Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire classique, par *E. Lebon*. Ier volume, à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires et Supplément au Ier volume, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr. In-8°, avec figures dans le texte. — Paris, Delalain; 1880 et 1881.

Notions de Trigonométrie, avec application à des exemples par l'emploi des fonctions trigonométriques naturelles. In-8°. — Tours, 25, rue des Acacias; 1879.

TIRAGES A PART.

Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit; af H.-G. Zeuthen. In-8°. — Copenhague, J.-H. Schultz; 1879.

Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques; par H.-G. Zeuthen. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences;* 1880.

Sur le principe de la moindre action; par G.-F.-W. Baehr. Extrait du t. XIV des *Archives néerlandaises;* 1879.

Om Poncelet's Betydning for Geometrien; af Elling Holst. In-8°. — Christiania, A.-W. Brogger; 1878.

Sur l'application d'un principe de la théorie des *fonctions à des recherches purement géométriques;* par ELLING HOLST. Extrait du t. VIII du *Bulletin de la Société mathématique de France;* 1880.

Notes on the normals of conics; by SAMUEL ROBERTS, M. A. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society,* vol. IX, n° 128.

On the decomposition of certain numbers into sums of two square integers by continued fractions; by SAMUEL ROBERTS. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society,* vol. IX, n^os^ 135, 136.

On forms of numbers determined by continued fractions; by SAMUEL ROBERTS. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society,* vol. X, n^os^ 142, 143.

Note on a problem of Fibonacci's; by SAMUEL ROBERTS, F. R. S. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society,* vol. XI, n° 158.

Note on the integral solution of

$$x^2 - 2Py^2 = -z^2 \text{ or } +2z^2$$

in certain cases; by SAMUEL ROBERTS, F. R. S. Extrait des *Proceedings of the London mathematical Society,* vol. XI, n° 161.

Sull' area descritta da una linea invariabile che si move in un piano con determinata legge; Nota del prof. GIUSEPPE BARDELLI. Extrait des *Rendiconti del R. Istituto lombardo,* série II, vol. XII, fasc. VII; 1879.

Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie; Nota di E. D'OVIDIO. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XIV; 1879.

Sopra alcuni iperboloidi annessi alla cubica gobba; Nota di E. D'OVIDIO. — Turin; 1879.

Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie; per E. D'OVIDIO. Extrait du *Giornale di Matematiche,* vol. XVII; 1879.

Sui covarianti lineari fondamentali di due cubiche binarie; Nota di E. d'Ovidio. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XV; 1879.

Sopra due covarianti simultanei di due forme binarie biquadratiche; Nota di E. d'Ovidio. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XV; 1879.

Il risultante di due forme binarie biquadratiche espresso mediante i loro invarianti fondamentali; Nota di E. d'Ovidio. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XV; 1880.

La relazione fra gli otto invarianti fondamentali di due forme binarie biquadratiche; Nota di E. d'Ovidio. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XV; 1880.

Nota sulle forme binarie del 5° *ordine;* per E. d'Ovidio. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XV; 1880.

Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane; Memoria del Dr E. Caporali. — Milan, Bernardoni; 1879.

Sulle transformazioni univoche piane involutorie; Nota del prof. E. Caporali. Extrait du *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli,* fas. 9°; 1879.

Sopra alcuni sistemi di rette; Nota del prof. E. Caporali. Extrait du *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli,* fas. 11°; 1879.

Sulla Statica; Note de G. Bellavitis. Extrait des *Memorie della Accademia dei Lincei,* serie 3a, vol. V; 1879.

Sviluppi in serie delle funzioni implicite, e rami infiniti delle curve algebriche; Note de G. Bellavitis. Extrait des *Memorie della Accademia dei Lincei,* serie 3a, vol. V; 1879.

De la similitude en thermologie; par J.-N. Haton de la Goupillière. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 3e année; 1879.

Propriétés descriptives nouvelles des sections coniques; par J. Carnoy. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 4e année; 1880.

Note sur quelques intégrales définies; par Ph. Gilbert. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 4e année; 1880.

Note sur la formule d'addition dans les fonctions elliptiques; par Ph. Gilbert. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 4e année; 1880.

Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre; par Ph. Gilbert. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 4e année; 1880.

Sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre; par Ph. Gilbert. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 4e année; 1880.

Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell; par S. Realis. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. VI; 1880.

Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles; par Biehler. Extrait du *Journal de Borchardt,* t. 87; 1879.

Sur les fonctions doublement périodiques considérées comme des limites de fonctions algébriques; par Ch. Biehler. Extrait du *Journal de Borchardt,* t. 88; 1879.

Thalès de Milet; ce qu'il a emprunté à l'Égypte; par Paul Tannery. Extrait de la *Revue philosophique,* mars 1880.

Valeur finale de la fonction Y_n *pour des valeurs* *indéfiniment croissantes de l'entier n;* par ESCARY. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1879.

Sur les nombres de Bernoulli; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait des *Annales de l'École Normale supérieure,* t. VIII; 1879.

Sur les normales aux coniques; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1878.

Théorèmes sur les normales aux coniques à centre; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. IV; 1878.

Sur les conchoïdales; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. V; 1879.

Sur les cubiques unicursales; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. V; 1879.

Sur les fonctions linéaires; par A.-E. PELLET. In-8°. — Clermont, Thibaud; sans date.

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs au premier; par A.-E. PELLET. In-8°. — Clermont, Mont-Louis; 1879.

Conférences de Géométrie supérieure; par L. SALTEL. Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux,* t. IV, 2e série.

Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue; par H. LAURENT. Extrait du *Journal de Resal,* t. V; 1879.

Sur la cinématique du plan; par A. LAISANT. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1878.

Mémoire sur les courbes et surfaces anallagma-

tiques; par PICQUET. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1878.

Sur le mouvement d'un corps qui se déplace et se déforme en restant homothétique à lui-même; par G. FOURET. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVIII; 1879.

Sur les surfaces de vis; par G. FOURET. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1878.

Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle. Mémoire de LÉONARD EULER, publié, conformément au manuscrit autographe, par CH. HENRY. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. IV; 1880.

Sur une valeur approchée de $\sqrt{2}$ *et sur deux approximations de* $\sqrt{3}$; par CH. HENRY. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. III; 1879.

Sur divers points de la théorie des nombres. Remarques historiques par CH. HENRY. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1880.

Recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche; par CH. HENRY. Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche,* t. XII; 1879.

Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce; par CH. BIEHLER. In-4°. — Paris, Gauthier-Villars; 1879.

Sur la théorie des équations; par CH. BIEHLER. In-4°. — Paris, Gauthier-Villars; 1879.

Intégration des équations différentielles auxquelles *conduit l'étude des phénomènes d'induction dans les circuits dérivés;* par MARCEL BRILLOUIN. In-4°. — Paris, Gauthier-Villars; 1880.

Sur la quadrature des paraboles du troisième degré; par le général PARMENTIER. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1879.

Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre; par G. HUMBERT. Extrait du *Journal de l'École Polytechnique,* XLVIIIe Cahier; 1880.

Sur la résolution en nombres entiers ou complexes de l'équation $U^n \pm V^n = S^n + W^n$; par M. A. DESBOVES. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences;* 1880.

QUESTIONS.

1362. On donne, sur un plan : un point o, une circonférence, les extrémités a, b d'un diamètre de cette courbe et un autre diamètre D. On demande de déterminer, sur la circonférence, un point m tel que les droites ma, mb interceptent, sur D, un segment vu, du point o, sous un angle droit. (MANNHEIM.)

1363. On donne une ellipse; on prend le triangle acb formé par les deux tangentes ca, cb à cette courbe et le corde de contact ab, et l'on détermine un point m d'où l'on voie, sous des angles droits, les côtés du triangle abc. Quelle est la surface lieu des points tels que m, lorsque l'on prend tous les triangles analogues à acb? (MANNHEIM.)

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE STURM;

PAR M. CANDÈZE,
Élève de l'École Polytechnique.

Considérons une équation entière et formons pour cette équation les fonctions de Sturm, que nous désignerons par V, V_1, ..., V_n.

On aura

$$(1)\qquad V = V_1 Q_1 - V_2,$$

$$(2)\qquad V_1 = V_2 Q_2 - V_3,$$

$$(3)\qquad V_2 = V_3 Q_3 - V_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)\qquad V_{(n-2)} = V_{(n-1)} Q_{(n-1)} - V_n.$$

Nous supposerons que V_n est une constante, c'est-à-dire que V et V_1 sont premiers entre eux.

Remarquons que, lorsque $V = 0$, $V_1 Q_1 = V_2$, c'est-à-dire que $Q_1 V_2$ a le signe de V_1. Le polynôme $Q_1 V_2$ jouit donc, relativement au polynôme V, des propriétés de V', sur lesquelles est fondé le théorème de Rolle, c'est-à-dire qu'entre deux racines réelles de V se trouve au moins une racine de $V_2 Q_1$. Cette remarque, en particulier, nous donne un moyen de séparer les racines d'une équation du troisième degré par des nombres commensurables. En effet, Q_1 et V_2 sont tous les deux du premier degré, et leurs racines séparent les trois racines du polynôme considéré (si le polynôme a ses trois racines réelles).

Cela posé, supposons que $V = 0$ pour une certaine valeur de x; on a

$$(1')\qquad V_1 Q_1 = V_2.$$

Portons dans la seconde équation la valeur de V_2 : on aura

$$(2') \qquad V_1(1 - Q_1 Q_2) = - V_3,$$

ce qui nous montre que $V_3(Q_1 Q_2 - 1)$ jouit encore des mêmes propriétés que V_1.

Tirons V_3 de (2'), et portons sa valeur, ainsi que celle de V_2, dans l'équation (3); elle deviendra

$$(3') \qquad V_1 Q_1 = V_1(Q_1 Q_2 - 1) Q_3 - V_4,$$

c'est-à-dire

$$V_1[(Q_1 Q_2 - 1) Q_3 - Q_1] = V_4.$$

Nous continuerons de même jusqu'à la dernière équation.

Or remarquons que les facteurs successifs de V_1 dans les diverses équations que nous obtenons ainsi ne sont autres que les numérateurs des réduites successives de la fraction continue

$$Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cfrac{1}{Q_3 \ldots}}$$

On le vérifie facilement pour les premières réduites, et l'on en déduit sans peine la loi générale.

Je dis que les numérateurs de ces réduites jouissent des mêmes propriétés que les fonctions de Sturm.

1° Deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler en même temps, car pour cela deux fonctions consécutives de Sturm devraient s'annuler.

2° Lorsqu'une fonction s'annule, les deux fonctions qui la comprennent sont de signes contraires.

En effet, les numérateurs de trois réduites consécutives de la fraction continue sont, comme on le verrait facilement, liés par la relation

$$P_{(r-1)} = P_r Q_r - P_{(r+1)}.$$

3° Considérons d'abord la fraction continue comme ayant pour dernier quotient Q_{n-1}. Si l'on désigne par $P_{(n-1)}$ le numérateur de la réduite correspondante, on a

$$V_1 P_{(n-1)} = V_n$$

lorsque $V = 0$.

V_n est positif ou négatif. S'il est positif, la suite

$$V, \; P_{(n-1)}, \; P_{(n-2)}, \; \ldots \; P_2, \; P_1, \; 1,$$

P_1 n'étant autre que Q_1, P_2 que $Q_1 Q_2 - 1$, ..., jouit des mêmes propriétés que la suite de Sturm, puisque le dernier terme est une constante et que $P_{(n-1)}$ jouit des mêmes propriétés que V_1.

Si V_n est négatif, ce sera la suite

$$V, \; -P_{(n-1)}, \; -P_{(n-2)}, \; \ldots, \; -P_1, \; -1$$

qu'il faudra conserver.

Dès lors, il suffira de substituer x dans Q_1, Q_2, ... et de former les réduites successives, ou, pour mieux dire, leurs numérateurs. On pourra se dispenser, d'ailleurs, de substituer directement dans V la valeur de x. En effet, remarquons que

$$\frac{V}{V_1} = Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cdots - \cfrac{1}{Q_{n-1} - \cfrac{1}{\cfrac{V_{n-1}}{V_n}}}}.$$

Alors $\frac{V}{V_1}$ sera la dernière réduite de cette fraction continue; V sera donc, au signe près, identiquement égal au numérateur. On déterminera ce signe une fois pour toutes, et l'on aura alors une suite dans laquelle les substitutions seront plus aisées que dans les fonctions de Sturm.

Q_1, Q_2, ... sont des fonctions dont les coefficients ne sont pas en général entiers, ceux de V étant supposés entiers; dans les opérations successives que l'on fait, on rend les coefficients entiers en multipliant par des nombres convenables et toujours affectés du signe $+$.

On devra alors modifier la fraction continue.

Supposons que l'on ait multiplié la première identité $V = V_1 Q_1 - V_2$ par α :

$$\alpha V = \alpha V_1 Q_1 - \alpha V_2 = V_1 Q'_1 - V'_2.$$

Continuons l'opération :

$$V_1 = V'_2 Q_2 - V_3.$$

Supposons qu'il faille multiplier encore par β :

$$\beta V_1 = V'_2 Q'_2 - V'_3.$$

On a

$$\frac{\alpha V}{V_1} = Q'_1 - \frac{1}{\dfrac{V_1}{V'_2}} = Q'_1 - \frac{\beta}{\dfrac{\beta V_1}{V'_2}} = Q'_1 - \cfrac{\beta}{Q'_2 - \cfrac{1}{\dfrac{V'_2}{V'_3}}}.$$

On continuerait ainsi, et l'on voit que l'on obtient une fraction continue où toutes les fonctions auront leurs coefficients entiers et dont les réduites jouiront encore des propriétés démontrées plus haut.

Nous donnons ci-dessous un calcul des fonctions pour l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0;$$

on a

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 33x - 18}{3x^2 - 12x + 11} = x - 2 - \cfrac{2}{3x - 6 - \cfrac{1}{x - 2}}.$$

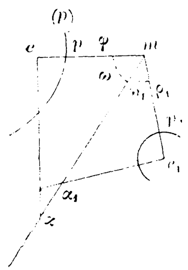
SUR LA CONSTRUCTION DE LA NORMALE DANS UN CERTAIN MODE DE GÉNÉRATION DES COURBES PLANES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

Considérons dans un plan deux courbes fixes (p) et (p_1). Soient mp une normale à la courbe (p), mp_1 une normale à la courbe (p_1), m leur point de rencontre; si nous posons $mp = \rho$, $mp_1 = \rho_1$, le lieu (m) du point m sera défini par une relation de la forme $F(\rho, \rho_1) = 0$.

Proposons-nous de construire la normale en un point m de la courbe (m).

Soient α et α_1 les points où cette normale est coupée par les normales aux enveloppes des droites mp et mp_1, c'est-à-dire par les perpendiculaires aux droites mp et



mp_1, aux points e et e_1, centres de courbure des courbes (p) et (p_1) respectivement relatifs aux points p et p_1.

Pour un déplacement infiniment petit du point m, on a, d'après un principe connu de Géométrie cinématique ([1]), en appelant $d\theta$ et $d\theta_1$ les angles de contingence

([1]) MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive*, p. 603.

respectifs des enveloppes mp et mp_1,

$$d\rho = e\alpha . d\theta, \quad d\rho_1 = e_1\alpha_1 . d\theta_1 .$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{e\alpha . d\theta}{e_1\alpha_1 . d\theta_1}.$$

Mais, le déplacement infiniment petit du point m étant représenté par $d(m)$, on sait que [1]

$$d(m) = m\alpha . d\theta.$$

et de même

$$d(m) = m\alpha_1 . d\theta_1 .$$

d'où il résulte que

$$\frac{d\theta}{d\theta_1} = \frac{m\alpha_1}{m\alpha}.$$

La relation (1) devient donc

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{e\alpha . m\alpha_1}{e\alpha_1 . m\alpha}$$

ou

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}.$$

Or on a, par différentiation de l'équation de la courbe,

$$F'_\rho \, d\rho + F'_{\rho_1} \, d\rho_1 = 0,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = -\frac{F'_{\rho_1}}{F'_\rho},$$

et, par comparaison avec la relation (2),

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = -\frac{F'_{\rho_1}}{F'_\rho}.$$

De là la règle suivante :

On porte respectivement sur mp et sur mp_1 des lon-

---

(1) Même Ouvrage, même page.

gueurs proportionnelles à F'_ρ *et* F'_{ρ_1} ; *sur les droites ainsi obtenues on construit un parallélogramme : la diagonale de ce parallélogramme passant par le point m est la normale cherchée.*

Il y a lieu de faire la distinction suivante : en supposant l'une des longueurs ci-dessus désignées constamment portée dans le sens de m vers p, il faudra porter l'autre dans le sens de m vers p_1 ou en sens contraire, suivant que le rapport $\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1}$ sera négatif ou positif, parce que, dans un cas, les angles ω et ω_1 doivent être comptés en sens inverses, et, dans l'autre, dans le même sens.

Comme cas particuliers de ce théorème général, on a les théorèmes de Joachimsthal, proposés par M. Frenet dans son *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 33.

Il est aisé de voir que *la courbe dont l'équation en coordonnées bipolaires est la même que l'équation de la courbe* (m) *rapportée aux courbes* (p) *et* (p_1) *sera tangente à celle-ci au point* m, *si l'on prend pour pôles les points* p *et* p_1 *correspondant à ce point* m.

Faisons une application de ce qui précède. Supposons qu'on prenne pour courbes fixes un point et un cercle, et pour équation

$$\rho - K\rho_1 = 0.$$

K étant une constante. La courbe ainsi définie est un *ovale de Descartes* [1]; comme, dans ce cas, on a

$$F'_\rho = 1, \quad F'_{\rho_1} = -K,$$

et par suite

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = -\frac{F'_{\rho_1}}{F'_\rho} = K.$$

---

[1] *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 428.

on voit facilement quelle est la construction de la normale par application de la règle générale.

Appelant p le point fixe, p_1 un point de la circonférence fixe, m le point correspondant de l'ovale, on voit, d'après la remarque faite plus haut, que *le cercle ayant pour diamètre la distance des points conjugués harmoniques qui divisent le segment pp_1 dans le rapport* K *est tangent à l'ovale considéré au point m.*

Je terminerai cette Note par quelques théorèmes sur la *lemniscate* qui résultent des principes précédents.

L'équation de cette courbe en coordonnées bipolaires est

$$\rho\rho_1 = K.$$

Par suite,

$$F'_\rho = \rho_1, \quad F'_{\rho_1} = \rho$$

et

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega_1} = -\frac{\rho}{\rho_1},$$

d'où l'on conclut facilement que :

La normale en un point d'une lemniscate est symétrique de la droite qui joint ce point au centre de la courbe par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle formé par les rayons vecteurs du même point.

Il est, de plus, aisé de démontrer que, dans le triangle rectangle, la hauteur et la médiane issues du sommet de l'angle droit sont symétriques par rapport à la bissectrice intérieure issue du même sommet.

On arrive sans difficulté, par la combinaison de cette proposition avec le théorème précédent, au nouveau théorème que voici :

Les points d'une lemniscate où la tangente est parallèle à l'axe des foyers sont sur une circonférence concentrique à cette courbe et passant par les foyers.

REMARQUE SUR LE CENTRE DE COMPOSITION D'UN SYSTÈME DE FORCES QUELCONQUES DANS LE PLAN;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Comme complément à ma Note *Sur la composition des forces dans le plan* (¹), je ferai remarquer que le moyen le plus simple de déterminer le *centre de composition* est le suivant.

On construit un polygone funiculaire quelconque ayant ses sommets respectivement sur les diverses forces données. La ligne d'action de la résultante du système passe par le point de rencontre des côtés extrêmes de ce polygone funiculaire et est parallèle à la somme géométrique des forces considérées.

On fait tourner toutes les forces du système du même angle autour de leurs points d'application. On construit, comme précédemment, la nouvelle ligne d'action. Le point de rencontre de ces deux lignes d'action est le centre de composition cherché.

QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE PROPOSÉES PAR M. ÉDOUARD LUCAS;

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 526);

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Si* (x, y, z) *représente une solution en nombres entiers de l'équation indéterminée*

$$(1) \qquad Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XIX, p. 115 (mars 1880).

on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=0,$$
$$AXx^2+BYy^2+CZz^2=0.$$

De ces deux dernières équations on tire

$$\frac{X}{x(Cz^3-By^3)}=\frac{Y}{y(Ax^3-Cz^3)}=\frac{Z}{z(By^3-Ax^3)}=k,$$

k étant un nombre quelconque.

En remplaçant X, Y, Z par les valeurs déduites de ces relations dans l'équation

$$AX^3+BY^3+CZ^3+3DXYZ=0,$$

on obtient l'équation

$$\begin{aligned}Ax^3(Cz^3-By^3)^3+By^3(Ax^3-Cz^3)^3+Cz^3(By^3-Ax^3)^3\\+3Dxyz(Cz^3-By^3)(Ax^3-Cz^3)(By^3-Ax^3)=0,\end{aligned}$$

qui doit être satisfaite en vertu de l'équation (1).

En effet, si l'on élimine D entre ces deux équations, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}(Ax^6+By^6+Cz^6-BCy^3z^3-ACx^3z^3-ABx^3y^3)\\\times[Ax^3(Cz^3-By^3)+By^3(Ax^3-Cz^3)+Cz^3(By^3-Ax^3)]=0,\end{aligned}$$

car le dernier facteur est identiquement nul.

2. *Si* (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) *désignent deux solutions distinctes de l'équation précédente, on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations*

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=0,$$

$$AXxx_1+BYyy_1+CZzz_1=0.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$\frac{X}{C(z^2x_1z_1 - z_1^2xz) + B(y^2x_1y_1 - xyy_1^2)}$$
$$= \frac{Y}{A(x^2x_1y_1 - x_1^2xy) + C(z^2y_1z_1 - z_1^2yz)}$$
$$= \frac{Z}{B(y^2y_1z_1 - z_1^2yz) + A(x^2x_1z_1 - x_1^2xz)} = k.$$

Si entre les équations

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$
$$AX^3 + BY^3 + CZ^3 + 3DXYZ = 0,$$
$$Ax_1^3 + By_1^3 + Cz_1^3 + 3Dx_1y_1z_1 = 0,$$

on élimine D, on a les deux équations

$$A(x^3x_1y_1z_1 - x_1^3xyz) + B(y^3x_1y_1z_1 - y_1^3xyz) + C(z^3x_1y_1z_1 - z_1^3xyz) = 0,$$
$$A(x^3XYZ - X^3xyz) + B(y^3XYZ - Y^3xyz) + C(z^3XYZ - Z^3xyz) = 0.$$

Si l'on élimine un des coefficients entre ces deux dernières équations, après avoir remplacé dans la dernière X, Y, Z par les valeurs trouvées plus haut, on obtient une identité; donc l'équation

$$AX^3 + BY^3 + CZ^3 + 3DXYZ = 0$$

est une conséquence des autres.

3. *L'équation biquadratique* $x^4 - 5y^4 = 1$ *a pour solution en nombres entiers* $x = 3$, $y = 2$, *et n'en a pas d'autre.*

Il est évident que y doit être pair et x impair.

Je rappellerai d'abord que tout carré impair est égal à huit fois un nombre triangulaire plus 1. Dans ce qui suit, la lettre t désignera toujours un nombre triangulaire.

Cela posé, l'équation peut s'écrire

$$(x^2+1)(x^2-1)=5y^4.$$

Les deux facteurs x^2+1 et x^2-1 ayant pour plus grand commun diviseur 2, et x^2+1 étant de la forme $8m+2$, il faut que le premier soit le décuple ou le double d'un carré impair, et le second le double ou le décuple d'un carré pair.

1° Soient

$$x^2+1=10u^2=10(8t+1)=80t+10,$$
$$x^2-1=2v^2=2.4^n(8t'+1)=4^n.16t'+2.4^n,$$

d'où

$$x^2=80t+9=4^n.16t'+2.4^n+1.$$

La comparaison de ces valeurs montre que l'on doit avoir $n=1$, d'où

$$x^2=80t+9=64t'+9.$$

x^2-1 est un multiple de 8 par un nombre impair; les deux facteurs $x+1$ et $x-1$ seront donc l'un le double, l'autre le quadruple d'un carré impair. Soient

$$x+1=4(8t''+1)=32t''+4,$$
$$x-1=2(8t'''+1)=16t'''+2,$$

d'où

$$x=32t''+3=16t'''+3.$$

Il faut qu'on ait $2t''=t'''$, ce qui ne peut avoir lieu, comme je l'ai démontré (question 1180), qu'en faisant $t''=0$, $t'''=0$, d'où $x=3$, $y=2$, solution admissible avec $t=0$, $t'=0$; ou bien $t''=3$, $t'''=6$, d'où $x=99$, ce qui donne pour t' une valeur fractionnaire : cette solution est donc inadmissible.

Si l'on posait

$$x+1=2(8t_1+1)=16t_1+2,$$
$$x-1=4(8t_2+1)=32t_2+4,$$

il en résulterait

$$x = 16t_1 + 1 = 32t_2 + 5,$$

valeurs incompatibles.

2° Posons maintenant

$$x^2 + 1 = 2(8t + 1) = 16t + 2,$$
$$x^2 - 1 = 10.4^n(8t' + 1).$$

De la première équation, on tire

$$x^2 = 16t + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que $t'' = 2t$, et, par suite, $t = 0$, $t'' = 0$, $x = 1$, $y = 0$, solution admissible; ou bien $t = 3$, $t'' = 6$, ce qui donne $x^2 = 49$, valeur qui ne satisfait pas à la seconde équation.

Les seules solutions en nombres entiers positifs sont donc

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 3, \quad y = 2.$$

4. *La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.*

De l'équation

$$3x^2 + 3x + 1 = z^4$$

on tire

$$x = -\frac{3 \pm \sqrt{3(4z^4 - 1)}}{6}.$$

Il faudrait donc que $4z^4 - 1$ fût le triple d'un carré, et l'on aurait, en remarquant que z^2 est de la forme $3m + 1$,

$$2z^2 + 1 = 3u^2 = 3(8t + 1) = 24t + 3,$$
$$2z^2 - 1 = v^2 = 8t' + 1,$$

d'où

$$z^2 = 12t + 1 = 4t' + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que l'on ait

$$t' = 0, \quad t'' = 0, \quad t = 0.$$

d'où

$$z = 1, \quad x = 0;$$

$t' = 6$, $t'' = 3$ donnerait $t = 2$, inadmissible, puisque 2 n'est pas un nombre triangulaire.

Donc *la différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs n'est jamais un bicarré, à moins que l'un d'eux ne soit* 0.

5. *Trouver toutes les solutions en nombres entiers des deux progressions arithmétiques*

$$\div x^2 . 2y^2 . 3z^2 . 4u^2,$$
$$\div x^2 . 3y^2 . 5z^2 . 7u^2.$$

On a pour la première

$$\div 167^2 . 2 \times 97^2 . 3 \times 57^2 . 4 \times 13^2,$$

de raison 9071, *et pour la seconde*

$$\div 607^2 . 3 \times 303^2 . 5 \times 191^2 . 7 \times 113^2,$$

de raison 93022.

Il suffit de chercher les solutions en nombres premiers entre eux, car si l'on multiplie x, y, z, u par un même nombre m, la raison sera multipliée par m^2.

On reconnaît immédiatement que les quatre carrés doivent être à la fois pairs ou impairs, pour que la raison soit de même forme relativement au diviseur 8, et, comme on veut des nombres premiers entre eux, ils doivent être impairs.

1° On doit avoir

$$x^2 + 3z^2 = 4y^2,$$
$$x^2 + 3z^2 = (x + z\sqrt{-3})(x - z\sqrt{-3}),$$

et, comme x et z doivent être premiers entre eux, chaque facteur doit être un carré. Soit donc

$$x + z\sqrt{-3} = (p + q\sqrt{-3})^2,$$

d'où

$$x - z\sqrt{-3} = (p - q\sqrt{-3})^2,$$

et

$$x^2 + 3z^2 = (p^2 + 3q^2)^2.$$

On en tire

$$x = p^2 - 3q^2,$$
$$z = 2pq,$$
$$y = p^2 + 3q^2.$$

Comme les nombres x, y, z doivent être impairs, on peut poser

$$p = m\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$x = \frac{m^2 - 3n^2}{2}, \quad y = \frac{m^2 + 3n^2}{4}, \quad z = mn.$$

On peut encore poser

$$p = m\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{6}},$$

d'où

$$x = \frac{3m^2 - n^2}{2}, \quad y = \frac{3m^2 + n^2}{4}, \quad z = mn;$$

mais, comme le signe de x est arbitraire, les nouvelles formules rentrent dans les premières.

On a ensuite

$$4u^2 = 6z^2 - 2y^2 = \frac{84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4}{16}.$$

Il faut donc que $84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4$ soit un carré parfait, ou, en posant $\frac{m}{n} = \nu$, $84\nu^2 - 2\nu^4 - 18$ doit être un carré rationnel.

Soient h une solution, k^2 le résultat de sa substitution dans le trinôme; posons $v = h + r$:

$$84v^2 - 2v^4 - 18 = k^2 + (168h - 8h^3)r + (84 - 7h^2)r^2 - 8hr^3 - 2r^4 = t^2.$$

Or l'équation $84v^2 - 2v^4 - 18 = t^2$ est satisfaite par $v = 1$, $t = 8$, d'où $m = 1$, $n = 1$, $x = y = z = u = 1$.

Faisons $h = 1$, $k = 8$, et posons

$$\begin{aligned} & 64 + 160r + 72r^2 - 8r^3 - 2r^4 \\ & = (8 + ar + br^2)^2 \\ & = 64 + 16ar + (a^2 + 16b)r^2 + 2abr^3 + b^2r^4. \end{aligned}$$

Identifiant les premiers termes, on a

$$a = 10, \quad b = -\frac{7}{4},$$

d'où

$$r = \frac{16}{3}, \quad v = \frac{19}{3}, \quad m = 19, \quad n = 3,$$

$$x = 167, \quad y = 97, \quad z = 57, \quad u = 13.$$

Faisons maintenant $h = \frac{19}{3}$, d'où $k = \frac{104}{9}$, et posons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{104}{9}\right)^2 - \frac{26144}{27}r - \frac{3576}{9}r^2 - \frac{152}{3}r^3 - 2r^4 \\ & = \left(\frac{104}{9} + ar + br^2\right)^2 \\ & = \left(\frac{104}{9}\right)^2 + \frac{208}{9}ar + \left(a^2 + \frac{208}{9}b\right)r^2 + 2abr^3 + b^2r^4. \end{aligned}$$

En identifiant les premiers termes, on a

$$a = -\frac{1634}{3 \times 13}, \quad b = -\frac{818575}{4 \times 13^3},$$

puis

$$r = -\frac{307.781 \times 13^2 \times 16}{919.368297},$$

$$v = \frac{19}{3} - \frac{307781 \times 13^2 \times 16}{919368297} = \frac{4990426057}{919368297},$$

$$m = 4\,990\,426\,057, \quad n = 919\,368\,297,$$

$$x = 11\,184\,319\,016\,899\,263\,311,$$

$$y = 6\,860\,016\,606\,742\,651\,969,$$

$$z = 4\,588\,039\,505\,328\,514\,929,$$

$$u = 2\,836\,414\,255\,938\,331\,991 \quad \left[u = \frac{1}{8}\left(\frac{104}{9} + ar + br^2\right)\right].$$

Partant de ces valeurs, on en trouvera d'autres par la même méthode, et ainsi de suite; mais les nombres croissent rapidement et les calculs deviennent très longs.

2° Considérons la progression $\div x^2 . 3y^2 . 5z^2 . 7u^2$.

On a

$$x^2 + 5z^2 = 6y^2$$

ou

$$6y^2 - 5z^2 = x^2,$$

qu'on peut écrire

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = x^2$$

ou

$$[6y - 5z + (y - z)\sqrt{30}]\,[6y - 5z - (y - z)\sqrt{30}] = x^2.$$

Les deux facteurs devant être premiers entre eux, et par conséquent carrés, posons

$$6y - 5z + (y - z)\sqrt{30} = (p + q\sqrt{30})^2,$$

d'où

$$6y - 5z - (y - z)\sqrt{30} = (p - q\sqrt{30})^2$$

et

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = (p^2 - 30q^2)^2.$$

De la première équation l'on tire

$$6y - 5z = p^2 + 30q^2, \quad y - z = 2pq,$$

d'où

$$(1) \qquad \begin{cases} x = p^2 - 30q^2, \\ y = p^2 + 30q^2 - 10pq, \\ z = p^2 + 30q^2 - 12pq. \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire que p et q soient entiers pour que x, y et z le soient. On peut poser

$$p = m\sqrt{2}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(2) \qquad \begin{cases} x = 2m^2 - 15n^2, \\ y = 2m^2 + 15n^2 - 10mn \\ z = 2m^2 + 15n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{3}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{3}},$$

d'où

$$(3) \qquad \begin{cases} x = 3m^2 - 10n^2, \\ y = 3m^2 + 10n^2 - 10mn, \\ z = 3m^2 + 10n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{5}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{5}},$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} x = 5m^2 - 6n^2, \\ y = 5m^2 + 6n^2 - 10mn, \\ z = 5m^2 + 6n^2 - 12mn. \end{cases}$$

On pourrait poser encore

$$p = m\sqrt{15}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \cdots;$$

mais les nouvelles formules rentrent dans les premières, les signes de x, y, z étant arbitraires.

Il faut maintenant faire entrer $7u^2$ dans la progression. On a, en employant les formules (1),

$$\begin{aligned}7u^2 &= 10z^2 - 3y^2\\ &= 7p^4 - 180p^3q + 1560p^2q^2 - 5400pq^3 + 6300q^4,\end{aligned}$$

ou, en divisant par $7q^4$ et posant $\frac{p}{q} = v$,

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{q^4} &= v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900\\ &= (v^2 + av + 30)^2 = v^4 + 2av^3 + (a^2 + 60)v^2 + 60av + 900,\end{aligned}$$

d'où $v = 0$, en faisant $a = -\frac{90}{7}$, d'où

$$x = y = z = u = 1,$$

solution évidente *a priori*.

Posons encore

$$\begin{aligned}&v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900\\ &= (v^2 + av + b)^2 = v^4 + 2av^3 + (a^2 + 2b)v^2 + 2abv + b^2,\end{aligned}$$

d'où, en identifiant les premiers termes,

$$a = -\frac{90}{7}, \quad b = \frac{1410}{49},$$

puis

$$v = \frac{16}{7}, \quad p = 16, \quad q = 7,$$

$$x = 1214, \quad y = 606, \quad z = 382, \quad u = 226,$$

ou, en divisant par 2,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

En posant

$$v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 = (av^2 + bv + 30)^2$$

et identifiant les derniers termes, on trouve

$$p = 105, \quad q = 8,$$

d'où

$$x = 9105, \quad y = 4545, \quad z = 2865, \quad u = 1695,$$

ou, en divisant par 15,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

Les autres formes donnent de même des équimultiples des nombres 607, 303, 191, 113.

Mais, au moyen de cette solution, en opérant comme dans la progression précédente, on en trouvera une deuxième, celle-ci en fera trouver une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

6. *Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la somme des cinquièmes puissances des x premiers nombres est un carré parfait.*

En appelant S_5 cette somme, on a

$$S_5 = \frac{x^2(x+1)^2[(2x+1)^2 - 3]}{24}$$
$$= \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 \left[\frac{(2x+1)^3 - 3}{6}\right].$$

Pour que S_5 soit un carré parfait, il faut et il suffit que $\frac{(2x+1)^2 - 3}{6}$ soit un carré parfait, ce qui exige d'abord que $2x + 1$ soit un multiple de 3.

Posons donc $2x + 1 = 3u$; il faut qu'on ait

$$\frac{3u^2 - 1}{2} = v^2 \quad \text{ou} \quad 3u^2 - 2v^2 = 1,$$

équation qu'on peut écrire

$$(3u - 2v)^2 - 6(v - u)^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont données par les réduites de rang impair dans le développement de $\sqrt{6}$ en fraction continue; ce sont

$$3u - 2v = 1,\ 5,\ 49,\ 485,\ 4801,\ 47525,\ 470449,\ 4656965,\ \ldots,$$
$$v - u = 0,\ 2,\ 20,\ 198,\ 1960,\ 19042,\ 192060,\ 1901198,\ \ldots,$$

d'où

$$u = 1,\quad 9,\quad 89,\quad 881,\quad 8721,\quad 86329,\quad 854569,\quad 8459361,\ \ldots,$$
$$v = 1,\ 11,\ 109,\ 1079,\ 10681,\ 105371,\ 1046629,\ 10360559,\ \ldots,$$
$$x = 1,\ 13,\ 133,\ 1321,\ 13081,\ 129493,\ 1281853,\ 12689041,\ \ldots.$$

Si l'on appelle x_n le terme général de cette dernière suite, on a

$$x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2} + 4,$$
$$v_n = 10v_{n-1} - v_{n-2}.$$

Note. — Reste à résoudre le n° 7.

SUR UN PROCÉDÉ PARTICULIER DE DIVISION RAPIDE;

PAR M. C. HENRY.

Si l'on divise l'unité par 9 et par une suite de nombres se terminant par 9, on aperçoit entre les différentes fractions décimales consécutives une suite de relations dont la loi est évidente et d'où il ressort un procédé de division rapide.

En effet,

$$\frac{1}{9} = 0,11111\ldots,$$

$$\frac{1}{19} = 0,052631578\,9\ldots,$$

$$\frac{1}{29} = 0,0344827586\ldots,$$

$$\frac{1}{39} = 0,0256410256\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{99} = 0,011111\ldots,$$

$$\frac{1}{109} = 0,009173\ldots,$$

$$\frac{1}{119} = 0,008403\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{199} = 0,005025125628140 7\ldots,$$

$$\frac{1}{209} = 0,00477\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{999} = 0,001111\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans le cas de $\frac{1}{9}$, chaque nombre décimal exprime le $\frac{1}{1}$ du nombre marqué par le chiffre antérieur; dans le cas de $\frac{1}{19}$, le $\frac{1}{2}$ du nombre marqué par le chiffre antérieur; dans le cas de $\frac{1}{29}$, le $\frac{1}{3}$ du nombre marqué par le chiffre antérieur; dans le cas de $\frac{1}{39}$, le $\frac{1}{4}$, etc.; dans le cas de $\frac{1}{99}$, le $\frac{1}{10}$ du chiffre antérieur; dans le cas de $\frac{1}{109}$, le $\frac{1}{11}$; dans le cas de $\frac{1}{119}$, le $\frac{1}{12}$; etc.; dans le cas de $\frac{1}{199}$, le $\frac{1}{20}$; dans le cas de $\frac{1}{209}$, le $\frac{1}{21}$; etc.; dans le cas de $\frac{1}{999}$, le $\frac{1}{100}$ du chiffre précédent; etc., etc.

Lorsque la fraction exprimant le rapport des deux nombres décimaux consécutifs du quotient a pour dénominateur un multiple de 10, comme dans le cas de $\frac{1}{199}$ la fraction $\frac{1}{20}$, dans le cas de $\frac{1}{299}$ la fraction $\frac{1}{30}$, dans le cas de $\frac{1}{1999}$ la fraction $\frac{1}{200}$, il suffit évidemment de diviser par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... des tranches de 2, 3, ... chiffres.

Lorsque le dividende est plus grand que le diviseur, il est clair qu'il faut calculer d'abord la partie entière du quotient et le premier chiffre décimal, puis appliquer à ce premier nombre la fraction convenable.

Pour la raison de ce procédé, nous renverrons à un Mémoire de Cauchy intitulé *Sur les moyens de vérifier ou de simplifier les diverses opérations de l'Arithmétique décimale* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XI, p. 853; 1841). Dans ce travail, Cauchy fonde une règle de transformation rapide des fractions ordinaires en périodiques sur la remarque suivante : *On double à très peu près le nombre des chiffres décimaux que renferme une valeur très approchée du quotient fourni par une division arithmétique, quand, pour augmenter le degré d'approximation, l'on ajoute à cette valeur approchée le premier terme de la progression arithmétique qui représente le quotient développé suivant les puissances ascendantes du reste.*

CONDITION D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE HOMOGÈNE, AYANT LA FORME D'UN ELLIPSOIDE A TROIS AXES INÉGAUX ET ANIMÉE D'UN MOUVEMENT UNIFORME DE ROTATION AUTOUR DE L'UN DE CES AXES;

PAR M. A. PICART.

Jacobi a reconnu le premier qu'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe et dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances, peut se maintenir d'elle-même en équilibre sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Il suffit que les trois demi-axes A, B, C et la vitesse angulaire constante ω, avec laquelle le fluide tourne autour de l'axe A, satisfassent aux deux équations de condition

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{C^2}\right)D} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{A^2}\right)D},$$

$$\omega^2 = \frac{2\pi\rho}{B^2C^2}\int_0^\infty \frac{\alpha\, d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{C^2}\right)D},$$

dans lesquelles ρ représente la densité du fluide et D l'expression

$$\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{C^2}\right)}.$$

M. Liouville a démontré ces formules, dans le XXIII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, par une méthode analogue à celle qu'avait suivie Laplace pour reconnaître que la forme d'un ellipsoïde de révolution convient à l'équilibre d'une masse fluide homogène.

Je suis arrivé au même résultat par une voie peut-être plus élémentaire et qui a l'avantage de mettre en évidence, sous une forme très nette, la loi suivant laquelle varie la pesanteur sur la surface.

Les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène à trois axes inégaux sur un point de sa surface sont

$$X = 4\pi\rho x \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = 4\pi\rho y \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = 4\pi\rho z \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

λ et μ représentant les quantités $\frac{B^2}{A^2} - 1$, $\frac{C^2}{A^2} - 1$.

On peut écrire

$$X = Mx, \quad Y = Ny, \quad Y = Pz,$$

en posant

$$M = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$N = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$P = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exprimons la condition pour que l'attraction soit la résultante de deux forces dirigées, l'une, G, suivant la normale à la surface, l'autre, H, suivant la perpendiculaire abaissée sur l'axe A :

$$(1)\qquad Mx = G\frac{x}{A^2\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}},$$

$$(2)\qquad Ny = G\frac{y}{B^2\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}} + H\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

$$(3)\qquad Pz = G\frac{z}{C^2\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}} + H\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

ou

$$(1')\qquad M = \frac{Gp}{A^2},$$

$$(2')\qquad N = \frac{Gp}{B^2} + \frac{H}{r},$$

$$(3')\qquad P = \frac{Gp}{C^2} + \frac{H}{r},$$

r étant la distance du point attiré à l'axe A, et p la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point; d'où

$$(a)\qquad N - \frac{MA^2}{B^2} = P - \frac{MA^2}{C^2},$$

auquel cas

$$(b)\qquad G = \frac{MA^2}{p},$$

$$(c)\qquad H = \left(N - \frac{MA^2}{B^2}\right)r.$$

La composante normale est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.

La composante perpendiculaire à l'axe est proportionnelle à la distance du point à l'axe.

Il résulte de là que si une masse fluide homogène de forme ellipsoïdale dont les axes satisfont à la relation (a) tourne autour de l'axe A avec une vitesse angulaire $\omega = \sqrt{N - \frac{MA^2}{B^2}}$, elle se maintient d'elle-même en équilibre, puisque la composante H est détruite par la force centrifuge, et qu'il ne reste que la composante G, normale à la surface.

La formule (b) exprime la loi suivant laquelle varie la pesanteur sur la surface de cet ellipsoïde :

La pesanteur en chaque point de la surface est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en ce point.

L'équation de condition (a) se transforme aisément dans la formule suivante

$$\frac{B^2C^2}{A^4}\int_0^1 \frac{u^4\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\mu u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En remplaçant λ et μ par leurs valeurs et en posant $\frac{A^2(1-u^2)}{u^2} = x$, on obtient finalement l'équation de Jacobi, savoir

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{B^2}\right)\left(1+\frac{x}{C^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{x}{A^2}\right)\left(1+\frac{x}{B^2}\right)\left(1+\frac{x}{C^2}\right)}}$$
$$= \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{a}{A^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{x}{A^2}\right)\left(1+\frac{x}{B^2}\right)\left(1+\frac{x}{C^2}\right)}}.$$

La vitesse angulaire de rotation ω est donnée par la formule

$$(d) \qquad \omega^2 = N - \frac{MA^2}{B^2}.$$

Si l'on applique au second membre une transformation analogue à celle qu'on a fait subir à l'équation (a), on obtient

$$\omega^2 = \frac{2\pi\rho(B^2 - A^2)}{A^2B^4}\int_0^\infty \frac{\alpha\,d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\alpha}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\alpha}{C^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ce n'est point là la formule donnée par Jacobi. On y arrive aisément en éliminant M de la formule (d), au moyen de la relation (a).

On a ainsi

$$\omega^2 = \frac{PC^2 - NB^2}{C^2 - B^2},$$

et, en transformant le second membre comme précédemment, on obtient

$$\omega^2 = \frac{2\pi\rho}{B^2C^2}\int_0^\infty \frac{\alpha\,d\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{C^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{A^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{B^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{C^2}\right)}}.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LE D^r AUGUSTE SCHOLTZ,
A Budapest.

Déterminons les valeurs de la deuxième polaire (émanant) de la forme cubique

$$f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

pour le pôle y_1, y_2 et pour les valeurs du rapport $x_1 : x_2$, pour lesquels la forme f se réduit à zéro.

Le covariant quadratique H (hessien) et le covariant cubique Q (jacobien de la forme f et du hessien H) de la forme f sont

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2,$$
$$Q = c_0 x_1^3 + 3 c_1 x_1^2 x_2 + 3 c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3,$$

si

$$c_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3,$$
$$c_1 = a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2,$$
$$c_2 = -(a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2),$$
$$c_3 = -(a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3).$$

Le discriminant de la forme f est

$$\Delta = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2).$$

En désignant les racines négatives de l'équation

$$H = 0$$

par r_0 et r_1, ainsi que

$$r_0 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 + \sqrt{\Delta}}{2(a_0 a_2 - a_1^2)},$$
$$r_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 - \sqrt{\Delta}}{2(a_0 a_2 - a_1^2)},$$

on aura les relations suivantes :

$$c_0 + a_0 \sqrt{\Delta} = c_0 + a_0 \sqrt{\Delta},$$
$$(c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1 = c_1 + a_1 \sqrt{\Delta},$$
$$(c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1^2 = c_2 + a_2 \sqrt{\Delta},$$
$$(c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1^3 = c_3 + a_3 \sqrt{\Delta},$$

et

$$\begin{aligned}
c_0 - a_0\sqrt{\Delta} \quad &= c_0 - a_0\sqrt{\Delta},\\
(c_0 - a_0\sqrt{\Delta})\,r_0 &= c_1 - a_1\sqrt{\Delta},\\
(c_0 - a_0\sqrt{\Delta})\,r_0^2 &= c_2 - a_2\sqrt{\Delta},\\
(c_0 - a_0\sqrt{\Delta})\,r_0^3 &= c_3 - a_3\sqrt{\Delta}.
\end{aligned}$$

Multiplions les deux membres des équations précédentes successivement par x_1^3, $3x_1^2x_2$, $3x_1x_2^2$, x_2^3 et faisons les sommes; nous obtiendrons

$$(1)\qquad \begin{cases} (c_0 + a_0\sqrt{\Delta})(x_1 + r_1x_2)^3 = Q + f\sqrt{\Delta},\\ (c_0 - a_0\sqrt{\Delta})(x_1 - r_0x_2)^3 = Q - f\sqrt{\Delta}. \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que

$$Q + f\sqrt{\Delta}, \quad Q - f\sqrt{\Delta}$$

sont des cubes complets d'expressions linéaires, résultat qui est déjà connu. Notre développement nous fournissait aussi les expressions linéaires. Des équations (1) on tire

$$(2)\qquad f\sqrt{\Delta} = \mu_1^3(x_1 + r_1x_2)^3 - \mu_0^3(x_1 + r_0x_2)^3,$$

où

$$(3)\qquad \begin{cases} \mu_0 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c_0 - \tfrac{1}{2}a_0\sqrt{\Delta}},\\ \mu_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c_0 + \tfrac{1}{2}a_0\sqrt{\Delta}}, \end{cases}$$

et où l'on prend pour toutes les deux racines cubiques les valeurs réelles.

On obtient les valeurs du rapport $x_1 : x_2$, pour lesquelles la forme f se réduit à zéro en vertu de l'équation (2) (en supposant que le discriminant Δ est différent de zéro), de la relation suivante

$$(4)\qquad \mu_1(x_1 + r_1x_2) = \varepsilon^\nu \mu_0(x_1 + r_0x_2),$$

où $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ et où l'on met pour ν successivement les valeurs 0, 1, 2.

De l'équation (2) on tire, pour la deuxième polaire de la forme f, c'est-à-dire pour

$$\begin{aligned} P &= (a_0 y_1^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2)x_1 \\ &\quad + (a_1 y_1^2 + 2a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2)x_2; \end{aligned}$$

la valeur

$$\begin{aligned} P\sqrt{\Delta} &= \mu_1^3(y_1+r_1 y_2)^2(x_1+r_1 x_2) \\ &\quad - \mu_0^3(y_1+r_0 y_2)^2(x_1+r_0 x_2) \end{aligned}$$

ou

$$P\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} \mu_0(x_1+r_0x_2) & \mu_0^2(y_1+r_0y_2)^2 \\ \mu_1(x_1+r_1x_2) & \mu_1^2(y_1+r_1y_2)^2 \end{vmatrix},$$

et puisque, selon l'équation (2),

$$(5) \qquad \begin{cases} \mu_1(x_1+r_1x_2) = \varepsilon^\nu \mu_0(x_1+r_0x_2), \\ \mu_0(x_1+r_0x_2) = \varepsilon^{2\nu}\mu_1(x_1+r_1x_2), \end{cases}$$

on peut aussi écrire

$$(6) \qquad P\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} \varepsilon^\nu\mu_0(x_1+r_0x_2) & \mu_0^2(y_1+r_0y_2)^2 \\ \varepsilon^{2\nu}\mu_1(x_1+r_1x_2) & \mu_1^2(y_1+r_1y_2)^2 \end{vmatrix}.$$

Parce que

$$\mu_0\mu_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(c_0^2 - a_0^2\Delta)} = -(a_0a_2 - a_1^2)$$

et

$$(a_0a_2 - a_1^2)(r_0 - r_1) = \sqrt{\Delta},$$

on obtient encore les équations suivantes

$$\begin{vmatrix} \mu_0(x_1+r_0x_2) & \mu_0(y_1+r_0y_2) \\ \mu_1(x_1+r_1x_2) & \mu_1(y_1+r_1y_2) \end{vmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{\Delta},$$

$$\begin{vmatrix} \mu_0(y_1+r_0y_2) & \mu_0(x_1+r_0x_2) \\ \mu_1(y_1+r_1y_2) & \mu_1(x_1+r_1x_2) \end{vmatrix} = -(x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{\Delta}.$$

En multipliant les deux membres de la première équation par $\varepsilon^{\nu}\mu_1(y_1+r_1y_2)$ et les deux membres de la seconde par $\varepsilon^{2\nu}\mu_0(y_1+r_0y_2)$, et faisant la différence, on peut obtenir la différence sous la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \varepsilon^{\nu}\mu_0(x_1+r_0x_2) & \mu_0^2(y_1+r_0y_2)^2 \\ \varepsilon^{2\nu}\mu_1(x_1+r_1x_2) & \mu_1^2(y_1+r_1y_2)^2 \end{vmatrix} \\ +&\begin{vmatrix} \varepsilon^{2\nu}\mu_0(x_1+r_0x_2) & \mu_0\mu_1(y_1+r_0y_2)(y_1+r_1y_2) \\ \varepsilon^{\nu}\mu_1(x_1+r_1x_2) & \mu_0\mu_1(y_1+r_0y_2)(y_1+r_1y_2) \end{vmatrix} \\ =&(x_1y_2-x_2y_1)[\varepsilon^{\nu}\mu_1(y_1+r_1y_2)+\varepsilon^{2\nu}\mu_0(y_1+r_0y_2)]\sqrt{\Delta}. \end{aligned}\right.$$

Le premier déterminant du côté gauche est, selon l'équation (6), identique à $P\sqrt{\Delta}$. Le second déterminant s'évanouit, puisque, en vertu de l'équation (5), les éléments de la première colonne sont aussi égaux. Selon les équations (1) et (3), on a encore

$$\mu_1(y_1+r_1y_2)=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q'+\tfrac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}},$$
$$\mu_0(y_1+r_0y_2)=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q'-\tfrac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}},$$

si Q' et f' signifient les formes Q et f, en y remplaçant les arguments x_1, x_2 par y_1, y_2, c'est-à-dire si

$$f'=a_0y_1^3+3a_1y_1^2y_2+3a_2y_1y_2^2+a_3y_2^3,$$
$$Q'=c_0y_1^3+3c_1y_1^2y_2+3c_2y_1y_2^2+c_3y_2^3.$$

Ainsi l'équation (7) revient à

$$\begin{aligned}(a_0y_1^2+2a_1y_1y_2+a_2y_2^2)x_1+(a_1y_1^2+2a_2y_1y_2+a_3y_2^2)x_2 \\ =(x_1y_2-x_2y_1)\left(\varepsilon^{\nu}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q'+\tfrac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}}+\varepsilon^{2\nu}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}Q'-\tfrac{1}{2}f'\sqrt{\Delta}}\right).\end{aligned}$$

En y substituant des valeurs spéciales convenablement choisies du pôle y_1, y_2, on obtient, de cette équation, les formes connues pour la résolution de l'équation du troisième degré

$$a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3=0.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. F. BRIOT,
Capitaine d'infanterie de marine, à Cherbourg.

Étant donnée l'équation générale du quatrième degré, on peut toujours, par une transformation facile à effectuer, la ramener à la forme

$$(1)\qquad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

et faire dépendre la variable de trois inconnues auxiliaires v, y, z, en posant

$$x = v + y + z,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}&(v + y + z)^4 \\ &\quad + A(v + y + \quad)^2 + B(v + y + z) + C = 0\end{aligned}$$

et successivement

$$\begin{aligned}&(v^2 + y^2 + z^2 + 2vy + 2vz + 2yz)^2 \\ &+ A(v^2 + y^2 + z^2 + 2vy + 2vz + 2yz)^2 \\ &\qquad\qquad + B(v + y + z) + C = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(v^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(v^2 + y^2 + z^2)(vy + vz + yz) \\ &\quad + 4(v^2z^2 + v^2y^2 + y^2z^2) + 8vyz(v + y + z) \\ &\quad + A(v^2 + y^2 + z^2) + 2A(vy + vz + yz) \\ &\qquad\qquad + B(v + y + z) + C = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(v^2 + y^2 + z^2)^2 \\ &\quad + [2(v^2 + y^2 + z^2) + A](2vy + 2vz + 2yz) \\ &\quad + A(v^2 + y^2 + z^2) + (8vyz + B)(v + y + z) \\ &\qquad\qquad + 4(v^2y^2 + v^2z^2 + y^2z^2) + C = 0.\end{aligned}$$

En établissant, ce qui est toujours possible, entre v, y et z les relations suivantes

$$v^2 + y^2 + z^2 = -\frac{A}{2}, \quad vyz = -\frac{B}{8},$$

et en remarquant que les deuxième et quatrième termes de la dernière égalité disparaissent, on obtient

$$v^2 y^2 + v^2 z^2 + y^2 z^2 = \frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}.$$

Dès lors, v^2, y^2 et z^2 sont les racines de l'équation cubique

$$(2) \qquad X^3 + \frac{A}{2} X^2 + \left(\frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}\right) X - \frac{B^2}{64} = 0.$$

Par conséquent, v, y, z peuvent être déterminés, et, en combinant convenablement leurs six valeurs, on obtient huit quantités égales deux à deux et de signes contraires; mais l'équation proposée, contenant une puissance impaire de l'inconnue, ne peut admettre pour racines que quatre d'entre elles ayant des valeurs absolues différentes.

L'existence de ces huit quantités s'explique facilement en considérant que le changement de signe du coefficient B entraîne nécessairement celui des quatre racines considérées, sans modifier celles qui servent à les déterminer.

Il est facile de s'assurer que l'équation (1) admettra quatre racines réelles, ou deux racines réelles et deux imaginaires, ou bien quatre racines imaginaires, lorsque l'équation (2) aura trois racines positives ou deux racines imaginaires et une positive, ou bien des groupes de racines différents des précédents.

Lorsque $B = 0$, les valeurs de x sont données par la formule

$$x = \pm\sqrt{-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - C}};$$

elles le sont également par la suivante

$$x = \pm\sqrt{-\frac{A}{4}+\sqrt{\frac{C}{4}}} \pm \sqrt{-\frac{A}{4}-\sqrt{\frac{C}{4}}},$$

et l'identité de ces deux expressions se vérifie facilement en les élevant au carré.

SUR LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME PARTICULIER DE DEUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU DEGRÉ m A DEUX INCONNUES;

PAR M. ESCARY.

Le système des deux équations simultanées du degré m,

$$(1) \qquad ax^m + by^m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = c,$$

se résout d'une manière très élégante en introduisant, comme l'a fait M. Lannes dans la question du Concours général de 1879 (¹), les angles du triangle construit avec les coefficients a, b, c comme côtés, en supposant cette construction possible. En effet, en rendant ces équations homogènes, elles s'écrivent

$$(2) \qquad \begin{cases} ax^m + by^m = cz^m, \\ \dfrac{a}{x^m} + \dfrac{b}{y^m} = \dfrac{c}{z^m}. \end{cases}$$

Si l'on pose $\frac{y}{z} = \alpha$, $\frac{z}{x} = \beta$, $\frac{x}{y} = \gamma$, et qu'on multiplie les équations (2) membre à membre, on a, en rendant le résultat entier,

$$ab\gamma^{2m} + (a^2 + b^2 - c^2)\gamma^m + ab = 0,$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XIX, p. 508.

d'où l'on tire

$$\gamma^m = \frac{c^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2}}{2ab}.$$

Or, si l'on désigne par S la surface du triangle dont les côtés sont a, b, c, on voit que le radical a pour valeur $4S\sqrt{-1}$. En observant encore que l'on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$
$$2S = ab\sin C,$$

on a enfin

$$\gamma^m = -\cos C \pm \sqrt{-1}\sin C,$$

d'où

$$\gamma = \cos\frac{C + (2K+1)\pi}{m} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{C + (2K+1)\pi}{m},$$

où l'on doit attribuer à K les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

On trouve de la même manière

$$\alpha = \cos\frac{A + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{A + 2K\pi}{m},$$
$$\beta = \cos\frac{B + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{B + 2K\pi}{m}.$$

Si maintenant l'on fait, dans les équations (2), $z = 1$, on retombe dans les équations (1), et des valeurs précédentes de α et de β on tire celles de x et de y, savoir

$$x = \cos\frac{B + 2K\pi}{m} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{B + 2K\pi}{m},$$
$$y = \cos\frac{A + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{A + 2K\pi}{m}.$$

Ce sont les $2m$ systèmes de solutions des équations proposées (1).

Il nous a paru intéressant de présenter ici cette résolution du système des équations (1), à cause de l'analogie que l'on observe, grâce à la représentation géométrique de M. Lannes, entre ses solutions et celles des équations trinômes, dans le cas des racines imaginaires, car on sait que ces dernières racines conduisent alors, en les interprétant géométriquement, à l'élégant théorème de Cotes.

SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE LILLE. — NOVEMBRE 1878);

PAR M. ÉVESQUE,
Élève de la Faculté des Sciences de Montpellier.

Une surface de révolution autour de l'axe des z est définie par l'équation $z = f(r)$: trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires des projections sur le plan des xy des courbes tracées sur cette surface et qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chaque point de l'une d'elles comprenne la normale à la surface en ce point.

Il résulte de l'énoncé même du problème que le plan osculateur en un point quelconque de l'une des courbes en question doit être normal à la surface, ce qui est la propriété caractéristique des lignes géodésiques; la normale à la surface aura donc la même direction que la normale principale; or celle-ci fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$; d'un autre côté, la normale à la surface fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$.

Or, l'équation de la surface proposée étant, en coordonnées rectangulaires,

$$F = z - f(\sqrt{x^2+y^2}) = 0,$$

on voit que les cosinus des angles que la normale à cette surface fait avec les axes sont proportionnels à

$$-\frac{df}{d\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad -\frac{df}{d\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1.$$

Ces deux normales devant se confondre, on devra avoir

$$(1) \qquad \frac{d\frac{dx}{ds}}{x} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{y},$$

équation qui va nous donner l'équation différentielle des courbes proposées. Elle donne, en effet,

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = -C,$$

$$y\,dx - x\,dy = -C\,ds.$$

Or

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta\,;$$

on a donc l'équation

$$(2) \qquad r^2\,d\theta = C\,ds.$$

Mais

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + f'^2(r)\,dr^2\,;$$

donc l'équation différentielle des projections sur le plan xy des lignes géodésiques de la surface $z = f(r)$ sera

$$r^2\,d\theta = C\sqrt{dr^2(1+f'^2) + r^2\,d\theta^2},$$

ou bien, finalement,

$$(3) \qquad d\theta^2 = \frac{C^2(1+f'^2)\,dr^2}{r^2(r^2-C^2)};$$

c'est l'équation demandée.

L'équation (2) montre que l'aire de la courbe dont l'équation (3) est l'équation différentielle est proportionnelle à l'arc s de la courbe gauche de l'espace.

Observation. — Le numéro de février 1881 des *Nouvelles Annales* renferme une solution de cette question, due à M. Fauquembergue. Il arrive finalement à une équation différentielle du second ordre, que voici :

$$(a)\quad \left\{ \begin{aligned} & r(1+f'^2)\frac{d^2\theta}{dr^2} \\ & \qquad + [2(1+f'^2) - rf'f'']\frac{d\theta}{dr} + r^2\frac{d\theta^3}{dr^3} = 0. \end{aligned} \right.$$

On remonte aisément de cette équation à l'équation (3) ci-dessus, qui est du premier ordre, car l'équation (a) rentre dans la classe des équations

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^n = 0,$$

que l'on sait intégrer (*Cours d'Analyse* de Sturm, p. 50); il suffit donc de poser $\dfrac{d\theta}{dr} = y$.

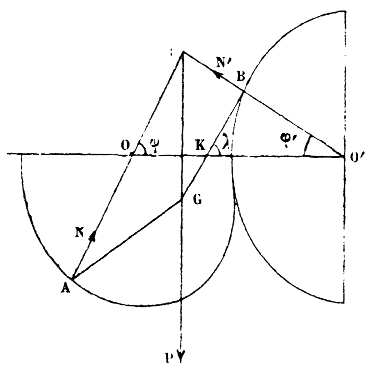
PROBLÈME DE MÉCANIQUE ;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Une tige rigide pesante s'appuie, par ses extrémités, sur deux hémisphères creux, tangents extérieurement, et tels que l'un des grands cercles de base soit horizontal et l'autre vertical : trouver la position d'équilibre de la tige ; discuter le problème.

(*Nouv. Corresp. math.*)

Soient N et N′ les réactions qui s'exercent en A et B, et soit P le poids de la tige, appliqué en son milieu G. Il faut, pour l'équilibre, que ces trois forces soient dans un même plan et concourent en un point I. Ce plan doit



être vertical, puisqu'il contient GP qui est vertical; de plus, comme les forces N et N′ doivent être normales aux deux sphères (le frottement étant négligé), elles doivent passer par les centres O et O′. Le plan des trois forces est donc un plan méridien vertical; nous supposerons que ce soit le plan de la figure.

1° Désignons par R le rayon des deux sphères, l la longueur de la tige, φ, φ' et λ les angles IOO′, IO′O et l'angle que fait la tige avec OO′. Écrivons que la projection de AB sur une droite perpendiculaire à OO′ est égale à la somme des projections des deux rayons AO, BO′ sur la même droite, et que OO′ est égale à la somme algébrique des projections sur OO′ des trois droites AO, AB, BO′; nous aurons les équations

$$l \sin\lambda = R\sin\varphi + R\sin\varphi',$$
$$2R = l\cos\lambda - R\cos\varphi + R\cos\varphi'.$$

ou, en posant $\frac{l}{R} = K$,

$$(1) \qquad \sin\varphi + \sin\varphi' = K \sin\lambda,$$

$$(2) \qquad \cos\varphi' - \cos\varphi = 2 - K\cos\lambda.$$

D'autre part, la droite IG étant une médiane du triangle AIB, on a, d'après une formule connue,

$$\cot \mathrm{IGB} = \frac{\cot \mathrm{IAG} - \cot \mathrm{IBG}}{2}$$

ou

$$(3) \qquad 2 \operatorname{tang}\lambda = \cot(\varphi - \lambda) - \cot(\varphi' + \lambda).$$

2° Après quelques transformations, la dernière équation devient

$$2 \operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi' = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos\varphi \cos\varphi'},$$

$$2 \sin\frac{\varphi - \varphi'}{2} \cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \operatorname{tang}\lambda \left[\cos(\varphi - \varphi') + \cos(\varphi + \varphi')\right]$$

ou

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2}\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} - \operatorname{tang}\lambda\left[\cos^2\frac{\varphi - \varphi'}{2} - \sin^2\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right] \\ & \quad = \operatorname{tang}\lambda \cos(\varphi + \varphi'). \end{aligned} \right.$$

Or les équations (1) et (2), divisées membre à membre, donnent

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{2 - K\cos\lambda}{K\sin\lambda},$$

d'où

$$\sin\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{2 - K\cos\lambda}{\sqrt{4 - 4K\cos\lambda + K^2}},$$

$$\cos\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{K\sin\lambda}{\sqrt{4 - 4K\cos\lambda + K^2}}.$$

Ces mêmes équations, étant ajoutées, après avoir été élevées au carré, donnent aussi

$$\cos(\varphi + \varphi') = 2K\cos\lambda - \frac{K^2}{2} - 1.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), on arrive à la suivante

$$(5) \qquad [4K\cos\lambda - (K^2 + 3)]^2 = 2K^2 - 7,$$

d'où

$$\cos\lambda = \frac{K^2 + 3 \pm \sqrt{2K^2 - 7}}{4K}.$$

Discussion. — Les deux racines sont toujours positives; elles seront réelles si l'on a

$$(6) \qquad K > \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Pour qu'elles soient admissibles, il faut qu'elles soient plus petites que 1. Écrivons que le résultat de la substitution de 1 à $\cos\lambda$, dans l'équation (5), est positif et que la somme des racines est plus petite que 2, nous obtiendrons les deux inégalités

$$(7) \qquad K^4 - 8K^3 + 20K^2 - 24K + 16 > 0,$$
$$(8) \qquad K^2 - 4K + 3 < 0,$$

qui expriment que les deux racines sont toutes deux < 1. Si le premier membre de l'inégalité (7) était négatif, une seule racine (celle obtenue en prenant le radical avec le signe —), serait plus petite que 1.

Cette inégalité peut d'abord s'écrire

$$(K - 2)(K^3 - 6K^2 + 8K - 8) > 0.$$

Égalant à zéro le polynôme de la seconde parenthèse, on obtient l'équation

$$K^3 - 6K^2 + 8K - 8 = 0,$$

qui a une seule racine réelle égale à 4,7, à 0,1 près par excès.

Par suite, l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(K-2)[K-(4,7-\alpha)]>0,$$

α étant une quantité plus petite que 0, 1.

En y joignant l'inégalité (8), écrite sous la forme

$$(K-1)(K-3)<0,$$

la discussion du problème est alors facile et peut se résumer dans le tableau suivant :

Variation de $K=\frac{l}{R}$.	Nombre de solutions.
$K<\sqrt{\frac{7}{2}}$	0
$K=\sqrt{\frac{7}{2}}$	1
$\sqrt{\frac{7}{2}}<K\leq 2$	2
$2<K\leq 4,7-\alpha$	1
$K>4,7-\alpha$	0

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION, 1879);

SOLUTION DE M. J. BOUDÈNES,

Élève du lycée de Grenoble.

Soient deux axes rectangulaires Ox *et* Oy, *sur* Ox *un point* A, *sur* Oy *un point* B. *On considère toutes les hyperboles équilatères qui passent au point* A *et sont tangentes à l'axe* Oy *au point* B.

1° *Former l'équation générale de ces hyperboles équilatères.*

2° *Trouver le lieu des points de rencontre de la tangente en* A *à chacune de ces hyperboles avec les parallèles menées par l'origine aux asymptotes de cette même hyperbole.*

3° *Le lieu précédent est une parabole* P : *former l'équation de l'axe et l'équation de la tangente au sommet de cette parabole* P, *construire ces droites et déterminer géométriquement la grandeur du paramètre de cette parabole.*

4° *Trouver le lieu du sommet de la parabole* P *quand le point* A *se déplace sur* Ox, *le point* B *restant fixe.*

Soient $OA = a$, $OB = b$, k et λ des paramètres arbitraires.

1° Si l'équation

$$y = \lambda(x - a) \tag{1}$$

représente la tangente à l'une des hyperboles au point A, cette hyperbole aura pour équation

$$x[y - \lambda(x - a)] + k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = 0,$$

avec la condition

$$k = \frac{\lambda}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}},$$

qui exprime que l'hyperbole est équilatère.

2° Les parallèles menées de l'origine aux asymptotes de ces hyperboles ont pour équation

$$x(y - \lambda x)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0. \tag{2}$$

Le lieu de leurs points d'intersection avec la tangente à l'hyperbole au point A, obtenu par l'élimination du paramètre variable λ entre les équations (1) et (2), a donc pour équation

$$(3)\qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 - ax\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=0.$$

C'est donc une parabole qui passe par l'origine des coordonnées et qui a pour tangente en ce point l'axe des y.

3° m étant un paramètre arbitraire, l'équation (3) de cette parabole s'écrit identiquement

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+m\right)^2 - ax\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2m}{a^2}\right)-\frac{2my}{b}-m^2=0.$$

La condition que le diamètre

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+m=0$$

et la tangente à son extrémité

$$ax\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2m}{a^2}\right)+\frac{2my}{b}+m^2=0$$

sont perpendiculaires nous donne immédiatement

$$m=-\frac{1}{2},$$

d'où, pour équations de l'axe et de la tangente au sommet,

$$(4)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{1}{2}=0,$$

$$(5)\qquad \frac{x}{b}-\frac{y}{a}+\frac{b}{4a}=0.$$

Si donc

$$OA_1=\frac{OA}{2},\quad OB_1=\frac{OB}{2},\quad OB_2=\frac{OB}{4},$$

on voit aisément que l'axe de la parabole sera la droite

A_1B_1 et la tangente au sommet la droite B_2S, perpendiculaire à l'axe.

De plus, si la droite $O\omega$ est perpendiculaire à l'axe, la longueur $A_1\omega$ est une sous-normale de la parabole et représente, par suite, la grandeur du paramètre.

4° Le lieu du sommet S de la parabole P, quand le point A se déplace sur Ox, le point B restant fixe, a pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}by + \frac{b^2}{8} = 0,$$

obtenue par l'élimination du paramètre a entre les deux équations (5) et (4) de la tangente au sommet et de l'axe.

Ce lieu est un cercle dont le centre est au point

$$x = 0, \quad y = \frac{3}{4}b$$

et qui passe par le point B_1,

$$x = 0, \quad y = \frac{b}{2}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. H. Lez; J. Auzelle, élève du lycée de Moulins; H. Herzog, du lycée de Rouen; H. Courbe.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880 [1].

Composition de Mathématiques.

On donne une ellipse et un cercle ayant pour centre un foyer F de l'ellipse.

---

[1] Questions données à quelques élèves qui n'ont pu concourir que plus tard.

On demande :

1° De trouver le lieu I du point tel que, si l'on mène par ce point des tangentes à l'ellipse et au cercle, les coefficients angulaires m et m' des tangentes à l'ellipse et les coefficients angulaires k et k' des tangentes au cercle vérifient la relation

$$2(mm' + kk') = (m + m')(k + k');$$

2° De trouver l'équation du lieu P du point de contact des tangentes menées par un point donné à tous les lieux I correspondant aux diverses valeurs du carré du rayon du cercle ;

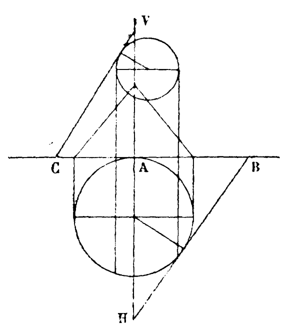
3° De construire le lieu P, lorsque le point donné est situé sur le grand axe de l'ellipse ;

4° De construire le lieu P, lorsque le point donné est situé sur la directrice correspondant au foyer F de l'ellipse.

Composition de Géométrie descriptive.

Un cône et un cylindre pleins étant donnés, on enlève leurs parties non communes, ainsi que la portion de

AC = 10 cm
AB = 16
AH = 20
AV = 16
VD = 3



chacun des deux corps qui se trouve au-dessus du plan horizontal : représenter par ses projections le solide restant.

Le cône est de révolution et a son axe vertical. La trace verticale du cylindre est un cercle de $0^m,04$ de rayon.

Ayant tracé la ligne de terre BAC parallèlement aux petits côtés de la feuille et la ligne HAV parallèlement aux grands, la première à $0^m,02$ au-dessus et la seconde à $0^m,03$ à gauche du centre du rectangle formé par les côtés du cadre, portez sur ces deux lignes les quatre premières longueurs indiquées par la légende et la cinquième sur CV; tirez aussi HB. La droite qui a sa trace horizontale en H et sa trace verticale en V est parallèle aux génératrices du cylindre et contient le sommet du cône. La trace horizontale de celui-ci est tangente à HB et à la ligne de terre. La trace verticale du cylindre est située à droite de CV et touche cette ligne en D.

CORRESPONDANCE.

M. Ernest Lebon nous prie de faire remarquer que la propriété qu'il a démontrée (2e série, t. XX, p. 133) est vraie quand le point o est situé sur l'un quelconque des axes d'une conique à centre.

ERRATUM AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Introduction, page x, second exemple : *au lieu de*

$$\log\tan 15^\circ 33' 40'' = 1,444783\underline{9},$$

lisez

$$\log\tan 15^\circ 33' 40'' = \bar{1},444783\underline{9}.$$

Cette faute a été signalée par M. Besche.

NOTE SUR LES LIMITES ET LES NOMBRES INCOMMENSURABLES;

Par M. E. JABLONSKI,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

Dans la plupart des définitions ou des démonstrations reposant sur la notion de limite, on est obligé de former des suites de nombres constamment croissants ou constamment décroissants, et il en résulte des difficultés ou des longueurs que l'on peut éviter au moyen d'un théorème plus général que celui sur lequel on s'appuie ordinairement.

Je vais établir ce théorème en reprenant la suite des propositions qui y conduisent.

Théorème I. — *Lorsque deux variables sont constamment égales, si l'une tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

Théorème II. — *Lorsque la différence de deux variables tend vers zéro en même temps que l'une d'elles tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

Soient u et v deux variables, et $u - v = \alpha$; supposons que v tende vers l et α vers zéro. On a

$$v = l + \beta,$$

β tendant vers zéro; donc

$$u = l + \alpha + \beta.$$

α et β tendant vers zéro en même temps, il en est de même de leur somme; donc u tend vers l.

Théorème III. — *Lorsqu'une variable constamment* *croissante est assujettie à rester moindre qu'un nombre fini déterminé, elle tend vers une limite inférieure ou égale à ce nombre. De même, lorsqu'une variable constamment décroissante est assujettie à rester supérieure à un nombre déterminé, elle tend vers une limite supérieure ou égale à ce nombre.*

C'est à ce théorème bien connu que je me propose de substituer un théorème plus général.

THÉORÈME IV. — *Soit u une variable assujettie à prendre, dans l'ordre des indices, les valeurs formant la suite indéfinie*

$$(1) \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots,\ a_q,\ \ldots,\ a_r,\ \ldots,$$

toutes moindres qu'un nombre A; *si dans cette suite, que je ne suppose pas constamment croissante, on peut prendre une suite de nombres constamment croissants*

$$(2) \qquad a_0,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ \ldots,\ a_r,\ \ldots,$$

et tels que la différence entre ces nombres et ceux d'indices intermédiaires de la première suite tende vers zéro lorsque les indices croissent indéfiniment, la variable u tend vers une limite inférieure ou égale à A.

En effet, soit v une variable assujettie à prendre seulement les valeurs de la suite (2) dans l'ordre des indices; en vertu du théorème III, elle tend vers une limite inférieure ou égale à A. On peut imaginer que, lorsque v passe de a_p à a_r, u passe par toutes les valeurs d'indices intermédiaires depuis a_p jusqu'à a_r; il en résulte que la différence $u - v$ est ou rigoureusement nulle ou tend vers zéro lorsque les indices croissent indéfiniment, et par suite que v tend vers la même limite que u (théorèmes I et II).

THÉORÈME V. — *Lorsque deux suites indéfinies de* *nombres,*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p,\ a_q,\ a_r,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_p,\ b_q,\ b_r,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

sont telles que l'un quelconque des nombres de la première soit moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde, et que la différence $b_n - a_n$ *entre deux termes correspondants tende vers zéro lorsque* n *croît indéfiniment, les deux suites tendent vers une limite commune.*

La différence $b_n - a_n$ tendant vers zéro, il suffit de prouver que la première suite tend vers une limite.

Soit a_p un nombre de la première suite. Supposons d'abord qu'il soit plus grand que tous ceux qui le précèdent et qui le suivent. On a, par hypothèse, quelque grand que soit n,

$$a_n < a_p < b_n.$$

Or $b_n - a_n$ tend vers zéro; donc a_n et b_n tendent vers a_p, et le théorème est démontré. Sinon, on peut trouver, parmi ceux qui suivent a_p, un nombre $a_r > a_p$. En répétant le même raisonnement sur a_r, et ainsi de suite, on voit que, si aucun des nombres de la première suite n'est la limite commune, on peut, dans cette suite, former une suite de nombres constamment croissants.

Soient a_0, a_1, ..., a_p, a_r, ..., a_m, ..., $a_{m'}$, ... cette suite, et a_n un nombre d'indice intermédiaire entre m et m', et qui par suite est moindre que $a_{m'}$. On a

$$a_{m'} - a_n < b_n - a_n,$$

puisque, par hypothèse,

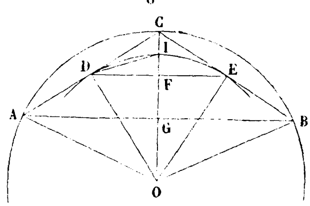
$$a_{m'} < b_n;$$

donc $a_{m'} - a_n$ tend vers zéro lorsque les indices croissent indéfiniment. Les conditions énoncées dans le théorème IV étant satisfaites, la première suite tend vers une limite, ce qu'il fallait démontrer.

Première application. — *Longueur d'une circonférence.* — Inscrivons dans une circonférence une suite de polygones convexes quelconques dont le nombre des côtés croisse indéfiniment d'une manière quelconque, pourvu que tous les côtés tendent vers zéro. Soit DE... un de ces polygones; par les sommets, menons des tangentes à la circonférence : elles forment le polygone convexe circonscrit ACB.... Nous aurons ainsi deux suites de polygones qui se correspondent deux à deux.

Soient a_n le périmètre de l'un des polygones inscrits, b_n celui du polygone circonscrit correspondant. Si l'on fait croître n d'une manière quelconque, on obtient deux

Fig. 1.



suites indéfinies. Le périmètre de l'un quelconque des polygones inscrits est évidemment moindre que celui de l'un quelconque des polygones circonscrits; de plus, la différence $b_n - a_n$ tend vers zéro. En effet, on a (*fig.* 1)

$$\frac{DC}{DF} = \frac{OC}{OD},$$

d'où

$$\frac{DC - DF}{DF} = \frac{IC}{OD},$$

$$DC - DF = \frac{IC . DF}{OD}.$$

$b_n - a_n$ se compose de la somme des différences telles que DC — DF ; donc

$$b_n - a_n = \Sigma(\mathrm{DC} - \mathrm{DF}) = \frac{1}{\mathrm{OD}}\Sigma \mathrm{IC}.\mathrm{DF}.$$

Soit α la plus grande des flèches IC ; on a

$$\Sigma \mathrm{IC}.\mathrm{DF} < \alpha\Sigma \mathrm{DF} \quad \text{ou} \quad \Sigma \mathrm{IC}.\mathrm{DF} < \alpha a_n;$$

donc

$$b_n - a_n < \frac{a_n}{\mathrm{OD}}\alpha.$$

a_n conserve une valeur finie, et, toutes les flèches tendant vers zéro, il en est de même de α ; donc $b_n - a_n$ tend vers zéro.

Il en résulte que, quelle que soit la loi d'inscription, les périmètres des polygones convexes inscrits et circonscrits, réguliers ou non, tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la longueur de la circonférence considérée.

Un procédé tout semblable permet de définir la longueur d'un arc convexe d'une courbe quelconque.

Deuxième application. — *Définition de* $\sqrt{2}$. — Soient m et n deux nombres entiers, tels que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2 < \left(\frac{m+1}{n}\right)^2,$$

ce que l'on peut toujours faire.

A chaque valeur de n correspond une valeur de m et une seule.

Faisons croître *n d'une manière quelconque,* et soient

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m'}{n'}, \quad \ldots,$$

$$\frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'+1}{n'}, \quad \ldots$$

les deux suites indéfinies ainsi obtenues. Un quelconque des nombres de la première a un carré moindre que celui de l'un quelconque des nombres de la seconde; donc l'un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde. D'ailleurs, la différence $\frac{1}{n}$ de deux termes correspondants tend vers zéro; donc les deux suites tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur arithmétique de $\sqrt{2}$.

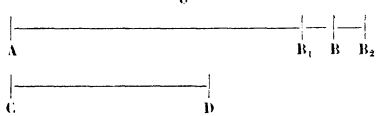
Les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont les valeurs de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{n}$ près, par défaut ou par excès.

Troisième application. — *Définition des nombres incommensurables et des opérations faites sur ces nombres.* — Pour définir le rapport de deux grandeurs, on imagine d'abord que ces grandeurs ont une commune mesure; le rapport est alors le nombre fractionnaire ordinaire dont les termes sont les nombres entiers qui expriment combien de fois chacune des grandeurs contient la commune mesure.

Cette définition ne subsiste plus lorsque les deux grandeurs n'ont pas de commune mesure : il faut lui substituer une autre définition, reposant sur la notion de limite.

Pour fixer les idées, soient deux longueurs AB et CD, qui n'ont pas de commune mesure. Divisons CD en n parties égales, et portons une de ces parties autant de fois

Fig. 2.



que possible sur AB à partir de A; supposons que l'on puisse la porter m fois et qu'on obtienne ainsi le point B_1 : en la portant une fois de plus, on dépassera B et on obtiendra le point B_2. Quelque grand que soit n, on ne tombera jamais au point B, et, en faisant croître indéfiniment ce nombre, on obtiendra deux suites de longueurs telles que AB_1 et AB_2, les unes toutes moindres que AB, les autres toutes supérieures à AB et tendant évidemment vers AB.

Les rapports de AB_1 et AB_2 à CD sont respectivement $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, lorsque n croît indéfiniment ; on a ainsi deux suites illimitées de nombres. Tous ceux de la première mesurant des longueurs moindres que AB et ceux de la seconde des longueurs supérieures à AB, un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde ; d'ailleurs la différence $\frac{1}{n}$ entre deux termes correspondants tend vers zéro : donc ces deux suites, c'est-à-dire $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, tendent vers une limite commune qui est, par définition, le rapport de AB à CD.

Cette définition n'exige pas que toutes les longueurs AB_1 soient croissantes, ni que toutes les longueurs AB_2 soient décroissantes ; n peut croître d'une manière absolument quelconque sans que la limite soit changée.

De la même manière on peut définir les opérations sur les nombres incommensurables.

Addition. — Soit à définir $a+b$, a et b étant des nombres incommensurables.

Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ les nombres qui tendent vers a, comme il résulte de la définition précédente ; $\frac{m_1}{n_1}$ et $\frac{m_1+1}{n_1}$ ceux qui tendent vers b.

Formons

$$\frac{m}{n}+\frac{m_1}{n_1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{n}+\frac{m_1+1}{n_1}.$$

Si l'on fait croitre n et n_1 d'une manière quelconque, on obtient deux suites indéfinies de pareilles sommes dont le sens est bien défini, puisque les termes en sont commensurables. L'un quelconque des nombres $\frac{m}{n}$ étant moindre que l'un quelconque de la suite $\frac{m+1}{n}$, et de même pour $\frac{m_1}{n_1}$, on voit que $\frac{m}{n}+\frac{m_1}{n_1}$ sera moindre que l'une quelconque des sommes telles que $\frac{m+1}{n}+\frac{m_1+1}{n_1}$; d'ailleurs, la différence entre deux sommes correspondantes est $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$, qui tend vers zéro; donc ces deux sommes tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de $a+b$.

Soustraction. — Il s'agit de définir $a-b$.

Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ les nombres commensurables qui tendent vers a; $\frac{m_1}{n_1}$ et $\frac{m_1+1}{n_1}$ ceux qui tendent vers b.

Supposons $a>b$; on peut imaginer que n et n_1 soient assez grands pour que l'on ait aussi $\frac{m}{n}>\frac{m_1+1}{n_1}$, et par suite $\frac{m+1}{n}>\frac{m_1}{n_1}$. Formons les deux différences

$$\frac{m}{n}-\frac{m_1+1}{n_1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{n}-\frac{m_1}{n_1}.$$

On voit sans peine que, si l'on forme les deux suites en faisant croitre n et n_1, un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde; d'ailleurs, la différence $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}$ tend vers zéro : donc ces deux différences tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de $a - b$.

On procède de même pour toutes les autres opérations; il est d'ailleurs facile de définir, en général, une expression telle que $f(x, y, z, \ldots)$, pour des valeurs incommensurables des lettres qui y entrent. Supposons que cette expression reste finie et continue lorsque x, y, z, ... ont des valeurs commensurables comprises dans de certains intervalles, et soient a, b, c, ... des nombres incommensurables compris dans ces mêmes intervalles.

Imaginons que l'on remplace successivement x par $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, ou inversement, suivant que f croît ou décroît en valeur absolue lorsque x croît, et de même pour y, z, ...; on formera de la sorte deux expressions dont les valeurs seront bien définies, puisqu'elles dépendront de nombres commensurables. Par le même raisonnement, basé sur le théorème général, on prouve que les valeurs numériques ainsi obtenues tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de $f(a, b, c, \ldots)$.

Il y a plus : toute relation

$$f(x, y, z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

vraie pour toutes les valeurs de x, y, z, ... commensurables prises dans de certains intervalles, subsiste si l'on y remplace x, y, z, ... par des nombres incommensurables a, b, c, ... compris dans les mêmes intervalles.

En effet, si l'on fait dans φ les mêmes substitutions que dans f, on obtient des nombres f' et φ', f'' et φ''; or on a, par hypothèse,

$$f' = \varphi', \quad f'' = \varphi'';$$

donc les limites sont aussi égales, et, par suite,

$$f(a, b, c, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots).$$

Ainsi, par exemple :

Dans un polynôme à termes incommensurables, on peut à volonté intervertir l'ordre des termes.

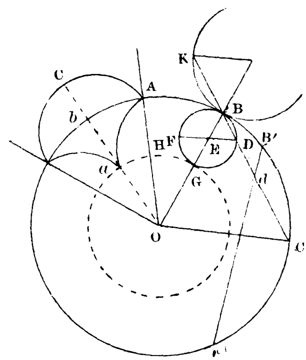
Dans un produit de facteurs incommensurables, on peut à volonté intervertir l'ordre des facteurs.

Enfin les règles d'opérations algébriques effectuées sur des expressions quelconques peuvent se traduire par une ou plusieurs égalités, vraies pour toutes les valeurs commensurables des lettres qui y entrent, au moins dans de certains intervalles; on peut conclure de ce qui précède que ces règles subsistent dans toute leur généralité pour des valeurs incommensurables de ces mêmes lettres et dans les mêmes intervalles.

NOTE SUR UNE ENVELOPPE;

PAR M. S.-F.-W. BAEHR,
Professeur à l'École polytechnique de Delft.

On suppose les deux aiguilles d'une montre de longueurs égales, et l'on demande l'enveloppe de la droite qui passe par leurs extrémités. Soient OA le rayon du cadran qui correspond avec midi et, à un moment quelconque, OB la direction de l'aiguille des heures; on aura, en faisant l'angle BOC égal à onze fois l'angle AOB, la direction correspondante de l'aiguille des minutes OC, et BC sera une position de l'enveloppée. Pour déterminer le point D où elle touche son enveloppe, faisons CC' égal à douze fois BB'; alors B'C' sera une autre position de l'enveloppée, et les triangles semblables BdB' et CdC' donnent $dB' : dC =$ corde BB' : corde $12\,BB'$, en sorte que, lorsqu'on fait tendre B' vers B, on aura à la limite $DB = \frac{1}{12}\,DC$ ou $BD = \frac{1}{13}\,BC$. Menant des paral-



lèles à CO, on aura aussi $BE = ED = \frac{1}{13}\,BO$, et le cercle décrit du centre E avec le rayon EB passera par D et sera tangent au cercle décrit du centre O du cadran avec le rayon $OG = \frac{11}{13}\,OB$. L'angle FEG, égal à l'angle BOC, étant onze fois l'angle HOG, tandis que le rayon EG est $\frac{1}{11}$ du rayon OG, l'arc de cercle FG aura la même longueur que l'arc GH. Donc le point F est un point de l'épicycloïde décrite par le point de contact H quand le cercle EG, en partant de la position où il touche le cercle OH en H, roule sur ce cercle directeur OH, et, par conséquent, le point diamétralement opposé D est un point de l'épicycloïde égale que décrit alors le point A du cercle mobile; celle-ci est donc l'enveloppe cherchée.

Si l'on divise le cadran, à partir du point de midi A, en onze parties égales, ce qui donne les points où les aiguilles se superposent, l'enveloppe sera tangente au cercle du cadran en ces points, tandis qu'elle aura des points de rebroussement sur les rayons qui passent par les milieux des arcs de cette division, et qui sont les points où les aiguilles viennent en ligne droite, en sorte qu'alors les tangentes à l'enveloppe passent par le centre du cadran. La même courbe est l'enveloppe de la droite qui passe par les extrémités des prolongements, jusqu'au cercle du cadran, des aiguilles, et, si on la fait tourner autour du centre jusqu'à ce que les points de rebroussements viennent sur les rayons où les aiguilles se superposent, elle sera l'enveloppe de la droite qui passe par l'extrémité de l'une des aiguilles et l'extrémité du prolongement de l'autre.

Si, sur le prolongement de OB, on prend $BI = \frac{1}{11} OB$, le cercle décrit du point I' avec le rayon BI sera coupé par le prolongement de CB en un point K, tellement que l'angle KIB est égal à l'angle BOC, ou onze fois l'angle AOB, en sorte que l'arc de cercle BK aura la même longueur que l'arc BA. Ce point K est donc un point de l'épicycloïde décrite par le point de contact A quand le cercle IB, en partant de la position où il touche le cercle OA en A, roule sur ce cercle directeur, et, le point B étant le centre instantané de rotation, KB est normale à cette courbe. Ainsi les normales à l'épicycloïde sont tangentes à l'enveloppe; celle-ci est donc la développée de l'épicycloïde extérieure au cercle du cadran, et sa longueur sera égale à $22 \times \left(\frac{2}{13} + \frac{2}{11}\right)$, ou $7 \frac{5}{13}$ fois le rayon du cadran.

QUESTIONS NOUVELLES D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE PROPOSÉES PAR M. ÉDOUARD LUCAS;

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 83);

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Déterminer le dernier chiffre du $n^{ième}$ terme de la série de Lamé donnée par la loi de récurrence*

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

et les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

Les derniers chiffres forment nécessairement une période, qui recommencera lorsque les derniers chiffres de deux termes consécutifs redeviendront les mêmes. Formons cette période:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7,
0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9,
0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3,
0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1.

On voit que

0	termine les termes de rang	$60m + (1, 16, 31, 46)$,
1	»	$60m + (2, 3, 9, 20, 23, 29, 42, 60)$,
2	»	$60m + (4, 37, 55, 58)$,
3	»	$60m + (5, 8, 14, 27, 45, 47, 48, 54)$,
4	»	$60m + (10, 13, 19, 52)$,
5	»	$60m + (6, 11, 21, 26, 36, 41, 51, 56)$,
6	»	$60m + (22, 40, 43, 49)$,
7	»	$60m + (15, 17, 18, 24, 35, 38, 44, 47)$,
8	»	$60m + (7, 25, 28, 34)$,
9	»	$60m + (12, 30, 32, 33, 39, 50, 53, 59)$;

m peut être 0.

Au moyen de ce tableau, le reste de la division de n

par 60 fera connaître le dernier chiffre du $n^{\text{ième}}$ terme de la série ou de u_{n-1}.

On peut remarquer que les chiffres qui terminent les 30 derniers termes de la période sont les compléments à 10 de ceux qui terminent les 30 premiers.

Il y a 4 termes terminés par chacun des chiffres pairs et 8 terminés par chacun des chiffres impairs.

2. *Formuler les restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux termes donnés de la série, u_p et u_q, en fonction des rangs p et q.*

Remarquons : 1° que, si l'on prolonge la série vers la gauche en donnant aux termes des indices négatifs, on aura

$$u_{-n} = \mp u_n,$$

suivant que n est pair ou impair; 2° que, si l'on prend les termes de m en m, et que l'on désigne par v les termes de la série ainsi formée, on aura, quel que soit le point de départ,

$$(1) \qquad v_{n+2} = \mathrm{A}v_{n+1} \mp v_n,$$

suivant que m est pair ou impair, avec

$$\mathrm{A} = \frac{u_{2m}}{u_m},$$

nombre toujours entier.

Cela posé, proposons-nous de trouver les restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de u_p et u_q. Soient, pour fixer les idées, $q > p$ et $q - p = m$, et supposons qu'on prenne les quotients par excès si m est pair, et par défaut si m est impair, de manière à avoir toujours un reste moindre que la moitié du diviseur.

Les restes successifs seront, d'après la formule (1),

$$u_{p-m},\ u_{p-2m},\ u_{p-3m},\ \ldots,$$

jusqu'à ce que l'on passe d'un indice positif à un indice négatif. Soient p' le plus petit, q' le plus grand des deux indices en valeur absolue, et $q'-p'=m'$; on aura ensuite

$$u_{p'-m'},\ u_{p'-2m'},\ \ldots,$$

et ainsi de suite. En d'autres termes, les restes seront des termes de la série ayant pour indices les restes qu'on obtiendrait si, dans la recherche du plus grand commun diviseur entre p et m, on faisait les divisions par soustractions successives.

Les restes sont ainsi exprimés en termes de la série dont les indices sont fonctions de p et q. Nous verrons plus loin l'expression d'un terme de la série en fonction de son indice.

3. *Traiter les mêmes questions pour la série*

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ \ldots,$$

données par la loi de récurrence

$$u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n,$$

et généralement pour les séries récurrentes du premier genre données par la loi

$$u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n,$$

dans laquelle a et b désignent des nombres premiers entre eux.

La période des derniers chiffres se forme de la même manière; elle est, pour la première série,

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 2,\ 9,\ 0,\ 9,\ 8,\ 5,\ 8,\ 1;$$

0 termine les termes de rang		$12m+(1, 7)$,
1	»	$12m+(2, 12)$,
2	»	$12m+(3, 5)$,
5	»	$12m+(4, 10)$,
8	»	$12m+(9, 11)$,
9	»	$12m+(6, 8)$.

Aucun terme n'est terminé par 3, 4, 5, 6.

Les formules qui expriment les restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de u_p et u_q en termes de la série restent les mêmes que pour la série de Lamé.

Considérons la série

$$0,\ 1,\ a,\ a^2+b,\ a^3+2ab,\ a^4+3a^2b+b^2,$$
$$a^5+4a^3b+3ab^2,\ a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3,\ \ldots,$$

dont la loi de récurrence est

$$u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n.$$

Si l'on prend les termes de m en m, et qu'on désigne par v les termes de la série obtenue, on aura

$$v_{n+2}=\mathrm{A}v_{n+1}\mp b^m v_n,$$

suivant que m est pair ou impair, avec

$$\mathrm{A}=\frac{u_{2m}}{u_m},$$

nombre entier.

Si l'on a soin de supprimer, dans chaque reste obtenu dans la recherche du plus grand commun diviseur de u_p et u_q, le facteur b^m qui est premier avec le diviseur, puis $b^{m'}$, quand on sera ramené à chercher le plus grand commun diviseur de $u_{p'}$ et $u_{q'}$, ..., la loi des restes sera la même que dans les deux cas déjà considérés.

4. *Trouver l'expression générale du terme de la série, en supposant* $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, *quelles que soient les valeurs de* a et b.

La fonction génératrice de la série est

$$\frac{1}{1-ax-bx^2} = \frac{1}{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}-x\right)\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}+x\right)}$$
$$= \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}}\left(\frac{1}{\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}-x}+\frac{1}{\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}+x}\right).$$

u_n est le coefficient de x^{n-1} dans le développement de cette fonction ordonnée suivant les puissances croissantes de x; on a donc

$$u_n = \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2b}\right)^n\right]$$

ou

$$u_n = a^{n-1} + \frac{n-2}{1}a^{n-3}b + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^{n-5}b^2$$
$$+ \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^{n-7}b^3 + \ldots.$$

Si l'on fait $a = 1$, $b = 1$, on a, pour la série de Lamé,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

et, en faisant $a = 2$, $b = 1$, on a, pour la série du n° 3,

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right].$$

Nous avons obtenu les restes de la recherche du plus grand commun diviseur entre u_p et u_q, exprimés en termes de la série dont les indices sont fonctions de p et q; on pourra donc exprimer les restes eux-mêmes en fonction de p et q.

3. *Si p désigne un nombre premier et u_p l'expression*

$$u_p = \frac{(a+\sqrt{b})^p - (a-\sqrt{b})^p}{\sqrt{b}},$$

démontrer que u_{p+1} est divisible par p si b est un non-résidu quadratique de p, et que u_{p-1} est divisible par p, en exceptant les valeurs de a pour lesquelles $a^2 - b$ est divisible par p, si b désigne un résidu quadratique de p.

On a

$$u_{p+1} = \frac{(a+\sqrt{b})^{p+1} - (a-\sqrt{b})^{p+1}}{\sqrt{b}}.$$

Développant et supprimant les termes qui contiennent le facteur p, on a

$$u_{p+1} \equiv 2(p+1)a\left(a^{p+1} + b^{\frac{p-1}{2}}\right) \quad (\text{mod.}\, p).$$

Or

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, p) \qquad (\text{théorème de Fermat}),$$

et, b étant un non-résidu quadratique de p,

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad (\text{mod.}\, p);$$

donc

$$u_{p+1} \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, p). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a

$$u_{p-1} = \frac{(a+\sqrt{b})^{p-1} - (a-\sqrt{b})^{p-1}}{\sqrt{b}}$$

$$\equiv -2a\left(a^{p-3} + a^{p-5}b + a^{p-7}b^2 + \ldots + b^{\frac{p-3}{2}}\right)$$

$$\equiv \frac{-2a\left[(a^2)^{\frac{p-1}{2}} - b^{\frac{p-1}{2}}\right]}{a^2-b} \equiv \frac{-2a(1-1)}{a^2-b} \quad (\text{mod.}\, p).$$

Le numérateur $\equiv 0 (\text{mod.}\, p)$, c'est-à-dire qu'il est divisible par p; donc, si $a^2 - b$ n'est pas divisible par p, u_{p-1} le sera nécessairement.

C. Q. F. D.

8. *Résoudre complètement l'équation*

$$x^2+(x+1)^2+\ldots+[x+(n-1)]^2=y^2$$

pour les valeurs de n égales à 2, 11, 23, 24.

$$\begin{aligned}&x^2+(x+1)^2+\ldots+[x+(n-1)]^2\\&\quad=nx^2+n(n-1)x+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=y^2.\end{aligned}$$

1° Soit $n=2$:

$$\begin{aligned}2x^2+2x+1=y^2&=\left(1+\frac{m}{n}x\right)^2\\&=1+\frac{2m}{n}x+\frac{m^2}{n^2}x^2,\quad \frac{m}{n}>1,\end{aligned}$$

d'où

$$x=\frac{2n(m-n)}{2n^2-m^2};$$

x sera entier et positif si l'on a

$$2n^2-m^2=1 \quad \text{ou} \quad 2n^2-m^2=2.$$

Dans le second cas, m doit être pair; posons alors $m=2m'$.

On a à trouver les solutions des deux équations

$$(1) \qquad m^2-2n^2=-1,$$

$$(2) \qquad n^2-2m'^2=1.$$

Elles seront données par les réduites de rang pair pour (1) et de rang impair pour (2) dans le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue. On obtient ainsi les doubles séries de valeurs

$$\begin{aligned}m&=1,\ 7,\ 41,\ 239,\ 1393,\ 8119,\ \ldots,\\n&=1,\ 5,\ 29,\ 169,\ 985,\ 5741,\ \ldots,\\m&=0,\ 4,\ 24,\ 140,\ 816,\ 4756,\ \ldots,\\n&=1,\ 3,\ 17,\ 99,\ 577,\ 3363,\ \ldots\end{aligned}$$

On en déduit les deux séries de valeurs de x

$$x = 0,\ 20,\ 696,\ 23660,\ 803760,\ 27304196,\ \ldots,$$
$$x = -1,\ 3,\ 119,\ 4059,\ 137903,\ 4684659,\ \ldots,$$

qu'on peut réunir en une seule

$$x = -1,\ 0,\ 3,\ 20,\ 119,\ 696,\ 4059,\ 23660,\ 137903,\ 803760,\ \ldots,$$

dont la loi de récurrence est

$$u_{n+3} = 7\,(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n.$$

2° Soit $n = 11$:

$$11x^2 + 110x + 11 \times 35 = y^2$$

ou

$$11\,(x+5)^2 + 110 = y^2,$$
$$y^2 - 11\,(x+5)^2 = 110.$$

Posons

$$y = \pm 11\,(x + 5 - 10u),$$

y étant évidemment un multiple de 11; l'équation devient, en divisant par 110,

$$(x+5)^2 - 22u + 110u^2 = 1,$$

et, en posant $x + 5 - 11u = \pm x_1$,

$$x_1^2 - 11u^2 = 1.$$

Les valeurs de x_1 et de u sont données par les réduites de rang impair dans le développement de $\sqrt{11}$ en fraction continue; ce sont

$$x_1 = 1,\ 10,\ 199,\ 3970,\ 79201,\ 1580050,\ \ldots,$$
$$u = 0,\ 3,\ 60,\ 1197,\ 23880,\ 476403,\ \ldots,$$

et, comme $x = 11u - 5 \mp x_1$, on a les deux séries de valeurs de x

$$x = -6,\ 18,\ 456,\ 9192,\ 183474,\ 3660378,\ \ldots,$$
$$x = -4,\ 38,\ 854,\ 17132,\ 341876,\ 6820478,\ \ldots,$$

et les deux séries de valeurs correspondantes de y

$$y = 11, \quad 77, \quad 1529, \quad 30503, \quad 608531, \quad \ldots,$$
$$y = 11, \quad 143, \quad 2849, \quad 56837, \quad 1133891, \quad \ldots.$$

La loi de récurrence pour chaque série est

$$u_{n+3} = 21(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n.$$

3° Soit $n = 23$:

$$23x^2 + 23 \times 22x + 23 \times 165 = y^2$$

ou

$$y^2 - 23(x+11)^2 = 23 \times 44$$

(y est multiple de 23).

Posons

$$y = \pm 23(x + 11 - 22u);$$

l'équation devient, en divisant par 23×22,

$$(x + 11 - 23u)^2 - 23u^2 = 2,$$

ou, en posant $x + 11 - 24u = \pm x_1$,

$$x_1^2 - 23u^2 = 2.$$

Les solutions de cette équation sont données par les réduites de rang pair correspondant au quotient complet de dénominateur 2 dans le développement de $\sqrt{23}$ en fraction continue; les dénominateurs des quotients complets sont

$$7, \quad 2, \quad 7, \quad 1, \quad 7, \quad 1, \quad 7, \quad 1, \quad \ldots.$$

Une seule réduite satisfait à la question : c'est $\frac{5}{1}$.

On a donc

$$x_1 = 5, \quad u = 1, \quad \text{d'où} \quad x = 12 \mp 5,$$
$$x = 7, \quad y = 92,$$
$$x = 17, \quad y = 138.$$

En donnant à u la valeur -1, on aurait les solutions négatives

$$x = -29, \quad x = -39.$$

4° Soit $n = 24$.

$$24x^2 + 24 \times 23x + 4 \times 23 \times 47 = y^2$$

ou

$$6(2x + 23)^2 + 1150 = y^2.$$

$2x + 23$, 1150 et y étant premiers entre eux deux à deux, on peut, si l'équation est résoluble, satisfaire à l'équation indéterminée du premier degré

$$y = n(2x + 23) - 1150u,$$

où y et x seraient des valeurs données satisfaisant à l'équation du second degré, et n et u des indéterminées.

Substituant cette valeur de y, on a

$$(n^2 - 6)(2x + 23)^2 - 2300nu(2x + 23) + 1150^2u^2 = 1150.$$

Il faut que $n^2 - 6$ soit divisible par 1150; or,

$$34^2 - 6 = 1150.$$

Posons donc $n = 34$ et divisons par 1150; il vient

$$(2x + 23)^2 - 68u(2x + 23) + 1150u^2 = 1$$

ou

$$(2x + 23 - 34u)^2 - 6u^2 = 1,$$

ou, en posant $2x = 23 - 34u = \pm x_1$,

$$x_1^2 - 6u^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont données par les réduites de rang impair dans le développement de $\sqrt{6}$ en fraction continue; ce sont :

$$x_1 = 1,\ 5,\ 49,\ 485,\ 4801,\ 47525,\ 470449,\ 4656965,\ \ldots,$$
$$u = 0,\ 2,\ 20,\ 198,\ 1960,\ 19402,\ 192060,\ 1901198,\ \ldots,$$

$$x = \frac{34u - 23 \pm x_1}{2},$$

d'où

$$x = -11,\ 25,\ 353,\ 3597,\ 35709,\ 353585,\ 3500283,\ \ldots,$$
$$x = -12,\ 20,\ 304,\ 3112,\ 30908,\ 306060,\ 3029784,\ \ldots,$$

puis

$$y = 34,\ 182,\ 1786,\ 17678,\ \ldots,$$
$$y = 34,\ 158,\ 1546,\ 15302,\ \ldots.$$

La loi de récurrence pour chacune des quatre séries est

$$u_{n+3} = 11(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n.$$

9. *Démontrer, sans se servir de la Table des nombres premiers, que* $2^{31} - 1$ *est un nombre premier.*

$$2^{31} - 1 = 2147483647,$$

dont la racine carrée, à une unité près, est 46340.

Il faut démontrer que $2^{31} - 1$ n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à 46340.

Or, $2^{31} - 1$ n'admet que des diviseurs de la forme $62m + 1$, et comme ils doivent diviser aussi $2^{32} - 2$, qui est de la forme $t^2 - 2u^2$, et n'admet que des diviseurs de la forme $8m + 1$ et $8m + 7$, les diviseurs de $2^{31} - 1$ doivent être de la forme $248m + 1$ ou $248m + 63$.

Il y a $\left(\frac{46340}{248}\right) = 186$ nombres de chaque forme inférieurs à 46340, parmi lesquels on peut supprimer ceux qui ne sont pas premiers.

A cet effet, je représente les 186 nombres de chaque série par son numéro d'ordre 1, 2, 3, 4, ..., 186.

Considérons d'abord les nombres $248m + 1$.

Soient p un nombre premier, r le reste de la division de 248 par p, et n le numéro d'ordre du premier terme divisible par p; on aura

$$1 + nr = mp \quad \text{ou} \quad mp - nr = 1.$$

n sera donné rapidement par la réduction de $\frac{m}{n}$ en fraction continue; ce sera le numérateur de l'avant-dernière réduite, pris avec le signe + ou le signe — suivant que cette réduite est de rang pair ou impair, $\frac{1}{0}$ étant la première. S'il est négatif, on le remplacera par le complément à p. On effacera les nombres $n + kp$.

Pour les nombres $248m + 63$, il faudra multiplier cette valeur de n par le reste de la division de 63 par p et supprimer le multiple de p contenu dans le produit.

En opérant ainsi, et ayant égard aux nombres premiers < 263, il ne reste dans la première série que les termes

6, 11, 17, 21, 24, 26, 29, 32, 35, 36, 41, 45, 47, 50, 59, 62, 66, 71, 74, 80, 81, 87, 89, 92, 95, 96, 104, 105, 110, 111, 116, 117, 120, 125, 126, 146, 147, 150, 155, 161, 162, 171, 176, 180, 182, 186,

où n représente $248n + 1$, et dans la seconde série

1, 5, 10, 11, 20, 22, 25, 37, 46, 47, 52, 58, 62, 65, 68, 76, 82, 85, 86, 95, 113, 118, 121, 122, 125, 136, 137, 142, 143, 148, 163, 166, 167, 170, 172, 173, 176, 178, 185.

où n représente $248n + 63$.

En tout, 85 diviseurs à essayer.

Si l'on écrit les produits de 248 par les neuf premiers nombres, tous ces diviseurs s'obtiendront immédiatement ou par l'addition de deux nombres.

Trois seulement, 311, 1303, 1489, donnant des quotients de sept chiffres, on vérifie par la division ordinaire qu'ils ne divisent par 2147483647. Pour tous les autres, on peut opérer par logarithmes; les Tables à 7 décimales donnent avec certitude le dernier chiffre du quotient, et l'on ne conserve que les diviseurs dont le dernier chiffre multiplié par le dernier chiffre du quotient donne un produit terminé par 7.

Cette condition n'est remplie que par les nombres suivants :

Diviseurs...	5953, 17609, 18353, 20399, 21143, 27281, 29761, 32303, 40487.
Quotients...	360739, 121953, 117009, 105273, 101559, 78717, 72157, 66479, 53041.

Les preuves par 9 et par 11 montrent que le produit de l'un de ces diviseurs par le quotient correspondant ne peut pas être égal à 2147483647; donc ce nombre, n'admettant pas de diviseur inférieur à sa racine carrée, est un nombre premier. C. Q. F. D.

Note. — Il reste à résoudre les numéros 6 et 7.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Haillecourt, inspecteur honoraire de l'Université.

Le principe invoqué par M. Barbarin, dans sa *Note sur le planimètre polaire* (*voir* 2^e série, t. XIX, p. 212), pourrait s'énoncer ainsi (*voir* la figure) :

Pourvu que B'A' = BA, B *et* B' *étant sur une même circonférence qui a* C *pour centre, l'angle* ACA' *est invariable.*

Pour s'assurer de la fausseté de ce prétendu principe, il n'est nécessaire que d'examiner un des nombreux cas particuliers qui se présentent; prenons-en deux seulement.

1° Soient A et A′ à l'infini; ACA′, égal à l'angle de B′A′ avec BA, serait égal à BCB′, ce qui est impossible, puisque B′A′ peut tourner autour de B′, sans que ni B ni A soient déplacés;

2° Si Γ est une circonférence ayant B pour centre, B′ se confond avec B, $B'CB = 0$; mais $A'CA \gtrless 0$, sauf pour le cas où CA est tangent à Γ [1].

Reste à expliquer comment, en partant d'un principe faux, l'auteur peut arriver à la démonstration des formules (7) et (8), qui sont exactes.

Réponse de M. Barbarin.

Je reconnais pleinement la justesse des critiques de M. Haillecourt, et il suffit en effet de jeter les yeux sur la *fig.* 1 de mon Article pour reconnaître que le déplacement fini de la figure de *forme variable* ABC ne peut être assimilé à une simple rotation autour du point fixe C, ce qui serait vrai si la figure avait une *forme invariable*.

Toutefois, on peut voir que, au point de vue des indications du planimètre, tout se passe en effet comme si cette rotation seule existait. Je me permets donc de vous donner ci-après la nouvelle rédaction d'après laquelle mon Article devrait être conçu, et vous prie, etc.

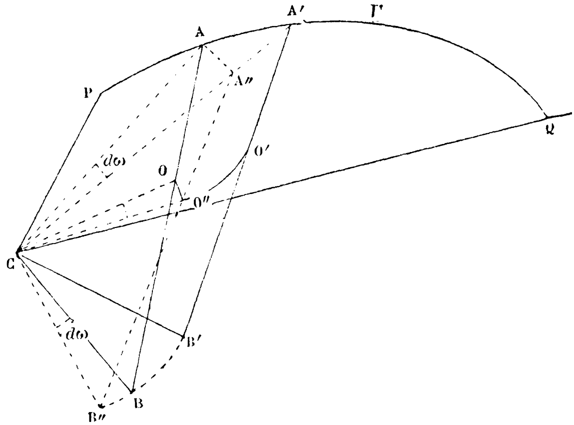
On peut passer de la position ABC du levier à la position infiniment voisine A′B′C par une rotation d'angle $\widehat{ACA''} = d\omega$ autour du point fixe C, suivie

---

[1] On suppose un mouvement infiniment petit.

d'une translation rectiligne A″A′ dans le sens du rayon vecteur CA′ (*fig.* 1).

Fig. 1.



1° L'effet de la rotation est de faire tourner les rayons CA, CO, CB de l'angle $d\omega$; donc, en employant les mêmes notations que dans mon précédent Article (p. 212-215) et en désignant par dS l'arc de cercle OO″, on a

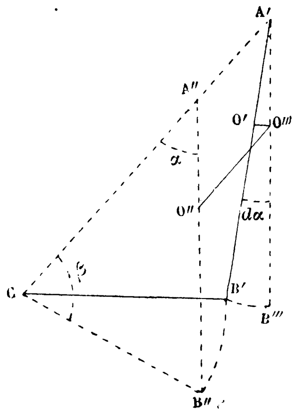
$$\rho^2 \frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2)\frac{d\omega}{2} + (a+b)\,dS\cos\widehat{COB};$$

dans ce mouvement, la roulette a enregistré la quantité $dS\cos\widehat{COB} = du$, et l'on a

$$\rho^2 \frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2)\frac{d\omega}{2} + (a+b)\,du.$$

2° Analysons maintenant l'effet de la translation du point A suivant A″A′. Ce mouvement peut lui-même être considéré (*fig.* 2) comme la résultante d'une translation parallèle qui transporterait $A''B''$ en $A'B'''$, suivie d'une rotation autour de A' qui porte enfin $A'B'''$ suivant $A'B'$.

Fig. 2.



Dans la translation parallèle, le point O décrit la droite $O''O''' = A''A'$ et la roulette enregistre un nombre égal à $O''O''' \sin \widehat{O'''O''A''}$.

Dans la rotation, le point O''' décrit l'arc $O'''O'$ et la roulette indique un nombre qui est précisément la longueur de cet arc; donc l'indication totale de la roulette pour le passage de O'' en O' est la somme algébrique des quantités $O'''O'$ et $O''O''' \sin \widehat{O'''O''A''}$.

Désignons un instant par α l'angle $CA''B''$ et par β l'angle $A''CB''$; l'indication totale dv de la roulette pour le passage de O'' en O' est donc

$$dv = A''A' \sin\alpha + a\,d\alpha,$$

$d\alpha$ étant l'angle $\widehat{B'A'B''}$. Mais

$$\rho = CA'' = b\cos\beta + (a+c)\cos\alpha;$$

donc

$$d\rho = A''A' = -\,b\sin\beta\,d\beta - (a+c)\sin\alpha\,d\alpha,$$

donc

$$dv = -b\sin\beta\sin\alpha\, d\beta - (a+c)\sin^2\alpha\, d\alpha + a\, d\alpha,$$

enfin, dans le triangle $cB''A''$, on a

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a+c}{\sin\beta};$$

donc

$$dv = -\frac{b^2}{a+c}\sin^2\beta\, d\beta - (a+c)\sin^2\alpha\, d\alpha + a\, d\alpha;$$

par conséquent, en définitive, l'indication de la roulette pour le déplacement élémentaire du point A au point A' est la somme algébrique $du + dv$. L'indication totale correspondant au secteur plan CPQ, balayé par le planimètre, est par conséquent

$$\int du + \int dv = \mathrm{U} + \mathrm{V},$$

avec la relation

$$\text{aire CPQ} = (a^2 + c^2 - b^2)\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + (a+b)\mathrm{U}.$$

Admettons maintenant qu'on fasse décrire à la pointe A un contour *fermé* quelconque. Je dis que l'intégrale V est nulle. En effet

$$\int dv = -\frac{b^2}{a+c}\int \sin^2\beta\, d\beta$$
$$- (a+c)\int \sin^2\alpha\, d\alpha + a\int d\alpha.$$

Or

$$\int \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha,$$

$$\int \sin^2\beta\, d\beta = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\sin 2\beta,$$

donc

$$\int dv = \frac{b^2}{a+c}\left(\frac{1}{4}\sin 2\beta - \frac{1}{2}\beta\right)$$
$$+ \left(a+c\right)\left(\frac{1}{4}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\alpha\right) + a\alpha.$$

Or, dans le triangle $CB''A'''$, la somme des deux angles α, β est toujours inférieure ou au plus égale à π. Donc ces deux angles oscillent nécessairement entre zéro et un maximum moindre que π; il en résulte que, lorsque, après avoir décrit complètement le contour fermé, la pointe mobile A est revenue au point de départ, les angles α, β sont revenus à leurs valeurs initiales, et, par conséquent, l'intégrale définie V est nulle.

Du reste, dans l'appareil de M. Amsler, $CB'' = A''B''$; donc $\alpha = \beta$ et $b = a + c$. On a alors

$$\int dv = b\,\frac{1}{2}\sin 2\alpha - c\alpha,$$

et, α oscillant forcément entre o et $\frac{\pi}{2}$, on a encore $V = 0$.

Par conséquent, suivant que la pointe fixe C est à l'intérieur ou à l'extérieur du contour fermé, on a

$$S = (a^2 + c^2 - b^2)\pi + (a + b)U$$

ou

$$S = (a + b)U.$$

Pour répondre maintenant aux objections de M. Haillecourt, il suffit de dire :

1° Que si Γ est une circonférence ayant B pour centre, $\widehat{ACA'}$ vaut $\widehat{BCB''}$ et non $\widehat{BCB'}$, qui est nul en effet, la rotation $d\omega$ ayant pour résultat d'amener B en B'' et la translation $A''A'$ ramenant B'' en B.

2° Si A et A' sont à l'infini (nous sortons ici de l'emploi pratique du planimètre), comme ils sont du reste sur le même rayon vecteur parallèle à l'asymptote de la courbe Γ, la rotation $d\omega$ n'existe plus, et l'angle BCB'' est nul, ainsi que ACA'. Quant à l'angle BCB', il est indéterminé, la ligne $B'A'$ n'étant plus assujettie qu'à être parallèle à l'asymptote et le point B' pouvant être pris en un point quelconque de la circonférence CB.

3° Les calculs faits plus haut expliquent comment, en partant d'un principe faux, j'ai pu arriver à un résultat exact, puisque, en appliquant ce principe, j'étais conduit à négliger des quantités que l'application du principe vrai fait considérer, mais dont l'ensemble est sans influence sur le résultat final. Ce dernier, dès lors, doit être le même dans les deux cas.

Extrait d'une lettre de M. V. Jamet.

En 1874, je crois, M. Painvin avait proposé, dans les *Nouvelles Annales*, de démontrer que les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont sur un même hyperboloïde. La démonstration de ce théorème se trouve dans plusieurs Ouvrages, notamment dans la traduction allemande de l'Ouvrage de M. Salmon. Voici cependant une démonstration qui, je crois, n'a été publiée nulle part. Vous voudrez bien l'insérer, si vous jugez qu'elle puisse intéresser vos lecteurs.

Je m'appuierai sur le théorème suivant :

Si quatre forces se font équilibre, elles sont situées sur un même hyperboloïde [1].

En effet, la somme de leurs moments par rapport à une droite quelconque doit être nulle. Si l'on considère, en particulier, une droite qui rencontre trois des forces considérées, comme les moments de ces trois forces par rapport à cette droite sont nuls, le moment de la quatrième est nul aussi, et par suite la droite rencontre la quatrième force. Ainsi toute droite qui rencontre les trois premières forces rencontre la quatrième :

---

[1] Proposé comme exercice dans l'Ouvrage de M. Garcet

c'est dire que les quatre forces sont sur un même hyperboloïde.

Cela posé, j'aurai démontré le théorème si je fais voir que *quatre forces dirigées suivant les quatre hauteurs d'un tétraèdre et proportionnelles aux faces opposées se font équilibre*. Or, si l'on projette les quatre faces d'un tétraèdre sur un plan, et qu'on donne à la projection d'une des faces le même signe qu'au cosinus de l'angle que fait une même direction, prise sur une droite perpendiculaire au plan de projection, avec la direction de la hauteur correspondante qui va, par exemple, du sommet du tétraèdre à cette face, on voit que la somme algébrique de ces projections est nulle. Or cette somme est, à un facteur près, la somme des projections des forces considérées sur l'axe du plan de projection. Donc la somme des projections des quatre forces sur un axe quelconque est nulle.

Il en résulte que, si l'on construit, par la méthode de Poinsot, la résultante générale et le couple résultant des forces considérées, on trouvera que la résultante générale est nulle.

Je dis que le moment du couple résultant est aussi nul. En effet, soit ABCD le tétraèdre. La somme des moments, par rapport à l'arête AB, des deux hauteurs issues des sommets A et B est évidemment nulle. Si l'on désigne par S_1 l'aire de la face ABC, par α l'angle dièdre des deux plans ABC, ABD, par h_1 la hauteur issue du sommet D, le moment, par rapport à AB, de la force dirigée suivant cette hauteur est, au signe près, $KS_1h_1 \cot\alpha$. Le moment de la force issue du sommet C est, encore au signe près, $KS_2h_2 \cot\alpha$, S_2 désignant l'aire de la face ABD, h_2 la hauteur correspondante.

Si maintenant l'on remarque que ces deux moments sont de signes contraires et que $S_1h_1 = S_2h_2$, il en résulte que la somme des moments des quatre forces par rapport à AB est nulle; il en est de même de la somme des moments des forces par rapport à AC et à BC.

Si donc l'axe du couple résultant n'est pas nul, il doit être dirigé perpendiculairement à la face ABC; mais il doit aussi être perpendiculaire aux trois autres faces du tétraèdre, ce qui est impossible. Il faut donc admettre qu'il est nul.

Remarque. — Le théorème que je viens de démontrer peut encore servir à démontrer le suivant, qu'on donne souvent comme exercice de Mécanique :

Si, aux centres de gravité des faces d'un tétraèdre, on applique quatre forces perpendiculaires à ces faces et proportionnelles à leurs aires, elles se font équilibre.

En effet, les centres de gravité des faces d'un tétraèdre sont les sommets d'un second tétraèdre homothétique au premier par rapport à son centre de gravité.

Extrait d'une Lettre de M. Gambey.

Permettez-moi d'attirer l'attention de vos lecteurs sur un mode de description des courbes du second ordre qui me semble peu connu.

Soient deux droites rectangulaires indéfinies HI, KL, qui se coupent en P. Prenons deux points fixes A et B sur la première et un point quelconque C sur la seconde. Traçons AC et BC : élevons en A une perpendiculaire sur AC qui coupe BC en M, et sur BC, au point B, une autre perpendiculaire qui coupe CA prolongée en M' : si le point C décrit la droite KL, les points M et M' décrivent deux coniques de même espèce. Cette espèce dépend des positions relatives des points A, B et P.

Supposons d'abord le point P en dehors du segment AB et à gauche de A. Les deux coniques sont alors des ellipses ayant la droite AB pour axe commun. Les foyers de la première sont sur AB; ceux de la seconde sur une perpendiculaire à AB. Elles sont inégales, mais elles ont la même excentricité $\sqrt{\frac{AB}{BP}}$. Si l'on pose $AB = 2a$, et qu'on appelle $2b$, $2b'$ les longueurs des axes dirigés selon la perpendiculaire à AB, $2c$ et $2c'$ les distances focales, on a les relations

$$bb' = a^2, \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Si le point P s'éloigne indéfiniment de A, l'excentricité tend vers zéro, et les deux coniques tendent à se confondre en un cercle qui a pour diamètre AB. En effet, pour $AP = \infty$, les deux droites AC et BC sont parallèles, et AM est perpendiculaire sur BC.

Supposons maintenant le point P entre A et B. Les deux coniques sont alors des hyperboles ayant le même axe focal AB. L'excentricité de la première est $\sqrt{\frac{AB}{BP}}$, celle de la seconde $\sqrt{\frac{AB}{AP}}$. Ces rapports sont égaux quand le point P est situé au milieu de AB, et les deux hyperboles se confondent en une seule qui est équilatère. Quand le point P parcourt le segment AB, on obtient donc deux fois toutes les hyperboles qui ont leurs sommets réels en A et B.

Le cercle décrit sur AB comme diamètre coupe KL en deux points C_1 et C_2; les droites BC_1, BC_2 donnent les directions des asymptotes de la première hyperbole, et les droites AC_1, AC_2 celles des asymptotes de la seconde.

Si l'on appelle encore $2b\sqrt{-1}$, $2b'\sqrt{-1}$ les axes imaginaires et $2c$, $2c'$ les distances focales, on a les relations

$$bb' = a^2, \qquad \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Supposons enfin que le point B s'éloigne indéfiniment du point A, qui reste fixe, ainsi que le point P. L'excentricité $\sqrt{\frac{AB}{BP}}$ tend vers 1, et l'ellipse et l'hyperbole lieux des points M tendent toutes deux à se confondre en une parabole unique, dont le sommet est en A et dont l'axe est sur AB. Si l'on fait $AB = \infty$, et qu'on pose $AP = 2p$, l'équation de la parabole sera $y^2 = \pm 2px$, suivant que le point P sera à gauche ou à droite du point A. Dans ce cas, le point M est l'intersection de la perpendiculaire élevée en A sur AC et d'une parallèle à la droite HI menée par le point C.

Ainsi, quelle que soit l'espèce de la conique à décrire, la construction reste la même.

P. S. — Ce qui précède m'a été suggéré par l'examen d'un cas particulier de la question suivante :

Soient pris deux points fixes A *et* B *sur une ellipse. On trace par* A *une sécante quelconque qui coupe de nouveau l'ellipse en* C, *on trace* BC *et l'on élève en* B *une perpendiculaire sur* BC. *Cette perpendiculaire coupe* AC *en* M : *lieu de* M ?

On trouve, dans le cas général, une équation du quatrième degré, décomposable en trois facteurs, dont deux représentent la droite AB et la perpendiculaire à cette droite au point B, et l'autre une conique.

Le cas particulier est celui où les deux points A et B sont aux extrémités d'un axe. Alors la conique elle-même se change en une droite perpendiculaire sur AB.

NOTE RELATIVE A LA QUESTION 1210

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 523);

PAR M. V. HIOUX.

Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré également donnée.

La solution publiée, 2ᵉ série, t. XVI, p. 523, est très simple et très élégante, mais elle n'est pas complète.

Nous nous proposons de reprendre et d'achever la solution du problème. Établissons pour cela quelques préliminaires.

I. Si un cône du second degré a pour équation

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + \ldots = 0,$$

pour que ce cône soit *capable* d'un trièdre ayant ses arêtes parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde ayant pour demi-axes a, b, c, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$(1) \qquad Ma^2 + Nb^2 + Pc^2 = 0 \quad [1].$$

II. Appelons (D) une déférente anallagmatique, (S) la sphère directrice de centre O et de rayon R, (P) le plan tangent au centre de la sphère variable Σ dont on cherche l'enveloppe.

Du point O abaissons sur le plan (P) la perpendiculaire $O\mu'$, qui rencontre Σ en m et m', points équidi-

[1] *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. II, p. 429.

stants de μ'. On sait que m et m' sont les points de contact de Σ et de son enveloppe.

Sur $O\mu'$, marquons un point μ tel que l'on ait

$$O\mu . O\mu' = R^2.$$

Le point μ étant le pôle du plan (P) par rapport à (S), le lieu du point μ est la polaire réciproque (D') de (D) par rapport à (S). Or, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point m, et par x', y', z' celles du point μ, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{2R^2 x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \\ y' = \dfrac{2R^2 y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \\ z' = \dfrac{2R^2 z}{x^2+y^2+z^2+R^2}. \end{cases}$$

Ces formules sont de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 1864). On peut d'ailleurs les établir comme il suit :

Les coordonnées du point m étant x, y, z, celles du point m' sont

$$\frac{R^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 z}{x^2+y^2+z^2},$$

puisque l'on a

$$O m . O m' = R^2.$$

Le plan (P), perpendiculaire sur Om et également distant de m et de m', a pour équation

$$xX + yY + zZ = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+R^2).$$

Le même plan (P) est le plan polaire du point $\mu(x', y', z')$ par rapport à la sphère (S), représentée par

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2.$$

On a donc encore, pour l'équation du plan (P),

$$x'X + y'Y + z'Z = R^2.$$

En identifiant ces deux équations du même plan, on obtient les formules (2).

III. Lorsque la déférente (A) est une surface du second ordre, on peut toujours supposer son équation ramenée à la forme

$$(D) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z - F = 0.$$

Alors, si l'on pose

$$H = F + \frac{C^2}{A} + \frac{C'^2}{A'} + \frac{C''^2}{A''},$$

la polaire réciproque (D') de (D) par rapport à

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

est représentée par l'équation

$$\begin{aligned}(D') = H\left(\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{A'} + \frac{z'^2}{A''}\right) \\ -\left(\frac{Cx'}{A} + \frac{C'y'}{A'} + \frac{C''z'}{A''} + R^2\right)^2 = 0.\end{aligned}$$

L'emploi des formules (2) donne, pour l'équation de la cyclide,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&4H\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''}\right)\\ &-\left(x^2+y^2+z^2+\frac{2Cx}{A} + \frac{2C'y}{A'} + \frac{2C''z}{A''} + R^2\right)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Si, dans cette équation, on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

le premier membre, après suppression du facteur commun 4, devient identique à celui de (D') débarrassé des accents de x, y, z. Donc la cyclide passe par la courbe sphérique d'intersection de (S) et de la polaire réciproque de la déférente par rapport à (S).

IV. Ces préliminaires posés, nous indiquerons simplement la marche de la solution.

Prenons pour axes coordonnés trois droites rectangulaires OX, OY, OZ parallèles aux axes $2a$, $2b$ et $2c$ de l'ellipsoïde donné.

Soit $M(\alpha, \beta, \gamma)$ le centre d'une sphère variable Σ coupant orthogonalement la sphère directrice

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

L'équation de Σ est

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + R^2 = 0.$$

Soit $C(x_1, y_1, z_1)$ le centre de l'ellipsoïde, et soit $P = 0$ le plan polaire de ce point par rapport à Σ.

Le cône de sommet C circonscrit à Σ a pour équation

$$f_1 f - P^2 = 0,$$

en représentant par f_1 le premier membre de f pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

Les coefficients des termes en x^2, y^2 et z^2 sont

$$f_1 - (x_1 - \alpha)^2, \quad f_1 - (y_1 - \beta)^2, \quad f_1 - (z_1 - \gamma)^2.$$

En les multipliant respectivement par a^2, b^2 et c^2, puis ajoutant, on doit avoir

$$(a^2 + b^2 + c^2)f_1 - a^2(x_1 - \alpha)^2 - b^2(y_1 - \beta)^2 - c^2(z_1 - \gamma)^2 = 0.$$

Cette équation représente le lieu du point M. Elle est du second degré en α, β, γ et ne renferme pas les rectangles de ces variables. On est ainsi ramené au problème traité au § III.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 329

(voir 1^re série, t. XV, p. 303);

PAR M. A. GENEIX-MARTIN.

Dans une progression géométrique de quatre termes, on donne la somme des antécédents et la somme des conséquents : trouver ces termes sans opérer d'élimination.

Voici une solution plus simple que celle qui est donnée, 1^re série, t. XV, p. 303.

a, b, c, d étant les quatre termes, q la raison, on a

$$b = aq, \quad c = aq^2, \quad d = aq^3;$$

on a aussi

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

et

$$a + b + c = m,$$
$$b + c + d = n,$$

m et n étant des nombres donnés, d'où

$$a(1 + q + q^2) = m, \quad aq(1 + q + q^2) = n.$$

Divisant membre à membre,

$$q = \frac{n}{m}.$$

Or

$$a = \frac{m}{1 + q + q^2} = \frac{m}{1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}} = \frac{m^3}{m^2 + mn + n^2},$$

$$b = aq = \frac{m^2 n}{m^2 + mn + n^2},$$

$$c = aq^2 = \frac{mn^2}{m^2 + mn + n^2},$$

$$d = aq^3 = \frac{n^3}{m^2 + mn + n^2}.$$

Question 1308

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 563);

PAR M. MORET-BLANC.

Soient O *un point fixe dans un plan,* M *un point qui se meut dans ce plan,* MV *la vitesse à un instant quelconque,* MU *l'accélération. Démontrer que l'aire du triangle* OMU *mesure la dérivée de l'aire variable du triangle* OMV *par rapport au temps.*

(LAISANT.)

Soient S l'aire du triangle OMV, S′ sa dérivée par rapport au temps et Δt un temps très petit que nous ferons tendre vers zéro. Prenons sur MU la longueur $MU_1 = MU.\Delta t$; construisons le parallélogramme MVV_1U_1 et le triangle MOU_1. On a

$$S' = \lim \frac{OMV_1 - OMV}{\Delta t}$$
$$= \lim \frac{OMU_1}{\Delta t} = \lim \frac{OMU.\Delta t}{\Delta t} = OMU.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. G. Bardelli, à Milan; C. Bergmans, répétiteur à l'École du Génie civil de Gand; J. Krantz; L. Julliard; Lacombe, à Bar-sur-Seine; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Question 1357

(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 48);

PAR M. A. AIGNAN,

Élève du lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

ABC *étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point* O *de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments : trouver le lieu du point* O *pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est constant.*

(BARBARIN.)

Nous prendrons comme axes de coordonnées deux des côtés du triangle. Soit O un des points du lieu tel que les points A′, B′, C′, obtenus en joignant O aux trois sommets et prolongeant, donnent

$$A'C \times B'A \times C'B = k \quad \text{ou} \quad mnp = k.$$

L'équation de CC′ sera, a, b, c désignant les trois côtés du triangle,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{p} - 1 = 0,$$

celle de AA′,

$$\frac{x}{a-m} + \frac{y}{c} - 1 = 0,$$

et les coordonnées du point O satisfont à ces deux équations.

De ces deux équations on tire

$$p = \frac{ay}{a-x}, \qquad m = -\frac{cx + ay - ac}{c-y}.$$

On a du reste

$$mnp = (a-m)(b-n)(c-p),$$

d'où

$$n = \frac{(a-m)(c-p)b}{mp+(a-m)(c-p)}.$$

Remplaçant m et p par les valeurs trouvées plus haut, on obtient

$$n = \frac{bcx}{cx+ay},$$

et l'équation du lieu est

$$(1) \qquad -\frac{abcxy(cx+ay-ac)}{(a-x)(c-y)(cx+ay)} = k.$$

Le lieu est du troisième degré et présente trois directions asymptotiques, les directions des côtés du triangle.

Le coefficient des termes en x^2, $c(abcy - kc + ky)$, égalé à zéro, donne l'asymptote parallèle à Ox,

$$(2) \qquad y = \frac{kc}{abc+k}.$$

On aura de même, pour l'asymptote parallèle à Oy,

$$(3) \qquad x = \frac{ka}{abc+k}.$$

Par raison de symétrie, nous aurons une troisième asymptote parallèle à AC et son équation sera

$$(4) \qquad x_1 = \frac{kb}{abc+k},$$

en prenant BC pour axe des x_1 et AC pour axe des y_1. On voit de plus que la courbe passe par les trois sommets du triangle et que les tangentes en ces points sont parallèles aux côtés opposés.

Déterminons la forme de la courbe suivant les valeurs de k.

Première Partie : $k > 0$. — Pour un point pris à l'intérieur du triangle ,

$$a > x > 0, \quad c > y > 0, \quad cx + ay - ac < 0;$$

donc

$$-\frac{abcxy(cx + ay - ac)}{(a - n)(c - y)(cx + ay)} > 0.$$

On peut avoir des points du lieu à l'intérieur. Il est aisé de voir qu'il n'y en aura pas toujours. k peut varier de 0 à $+\infty$, et le produit des trois segments, quand O est à l'intérieur du triangle, ne peut dépasser un maximum, qui est atteint lorsque O est le centre de gravité du triangle. En effet,

$$mnp(a - m)(b - n)(c - p) = k^2$$

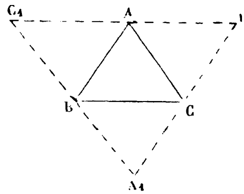
en valeur absolue, et ce produit sera maximum quand les produits deux à deux seront maxima, car ils le sont en même temps pour $m = a - m$, $n = b - n$, $p = c - p$, ce qui donne bien pour O le point de concours des médianes. Dans ce cas, $k = \frac{abc}{8}$. Donc, suivant que k sera inférieur, supérieur ou égal à $\frac{abc}{8}$, on aura les trois dispositions du lieu (1) (2), (3).

Dans le cas particulier de $k = \frac{abc}{8}$, le point de concours des médianes est le seul point du lieu qui soit à l'intérieur du triangle; pour $k > \frac{abc}{8}$, il n'y a plus de points de lieu à l'intérieur.

Si k croît au delà de toute limite, la courbe se réduit à trois droites indéfinies menées par les sommets du triangle parallèlement aux côtés opposés.

Remarque I. — On obtient ainsi tous les points du plan, sauf ceux qui sont compris dans les angles opposés par le sommet à ceux du triangle et ceux des trois

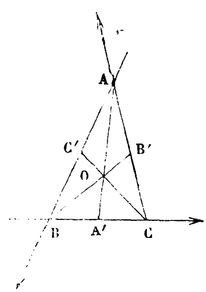
Fig. 1.



triangles AB_1C, CA_1B, BC_1A formés par les côtés du triangle proposé et les parallèles menées par les sommets parallèlement aux côtés opposés.

Seconde Partie : $k < 0$. — On peut se rendre compte du double signe que doit prendre k. Nous compterons

Fig. 2.



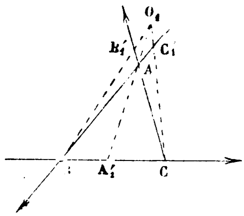
positivement les segments dans le sens des flèches.

Pour un point de l'intérieur du triangle, les trois segments CA', AB', BC' sont négatifs, leur produit est négatif, et, comme (1) donne ce produit changé de signe, dans (1), il faut $k > 0$ pour tout point à l'intérieur du triangle ainsi que pour toutes les régions examinées dans la première Partie.

Prenons au contraire un point O_1 dans une des régions qu'il nous reste à examiner.

On a les trois segments CA'_1, AB'_1, AC'_1, qui sont

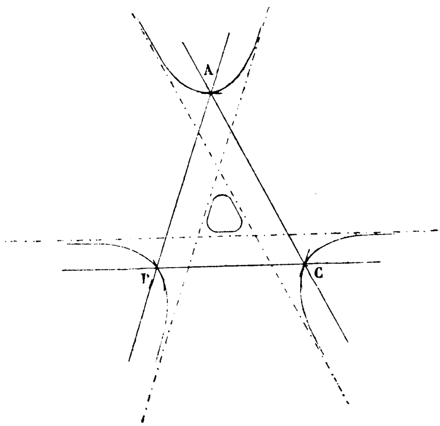
Fig. 3.



affectés des signes —, +, —. Leur produit, changé de signe, sera bien négatif, ce qui exige, dans (1), $k < 0$.

Cette notation du produit est arbitraire; mais, une fois que nous avons fait une hypothèse sur k pour la

Fig. 4.



première Partie, la discussion de la seconde s'en déduit forcément.

Nous supposerons donc $k < 0$ et nous mettrons le signe en évidence.

On aura, pour asymptote parallèle à Ox,

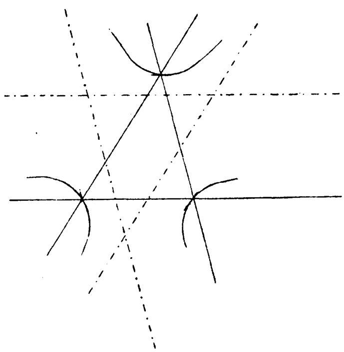
$$y = -\frac{kc}{abc - k}.$$

Les autres se déduisent de celle-là par analogie :

1° Supposons $k < abc$. Le lieu passe toujours par les points A, B, C, et on a la courbe représentée par la *fig.* 4.

2° $k = abc$. Les branches infinies du lieu, ainsi que

Fig. 5.



les asymptotes, se sont éloignées à l'infini dans le sens négatif.

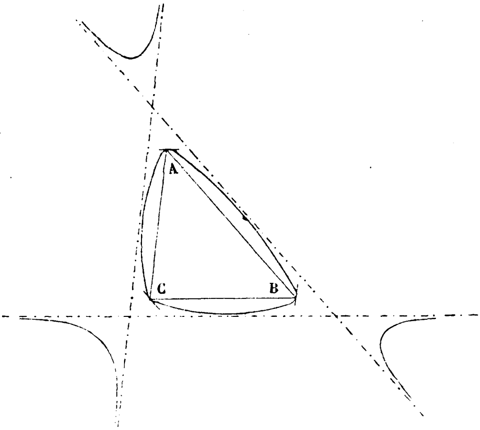
3° $k > abc$. Si $k = abc + \varepsilon$, les asymptotes passent à $+\infty$ relativement à chaque côté, et, lorsque k décroit, elles ser approchent des sommets du triangle parallèlement aux côtés opposés.

Enfin, pour k tendant vers $-\infty$, les asymptotes deviennent les parallèles aux côtés du triangle, menées par les sommets opposés.

C'est le cas limite de la première Partie.

En résumé, pour k croissant de $-\infty$ à $+\infty$, le lieu

Fig. 6.



passe par tous les points du plan une fois, et une fois seulement.

Remarque. — Dans le cas où le lieu a une courbe à branches fermées, cette courbe n'est pas coupée par les asymptotes, car le lieu est du troisième degré et ne peut être rencontré en plus de trois points par une droite quelconque.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Baron, élève du lycée Henri IV; A. de Vauvineux, élève du lycée de Grenoble; E. Pecquery, élève du lycée du Havre; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; L. Fulcrand, boursier à la Faculté des Sciences de Bordeaux; H. Lez et Moret-Blanc.

SUR LES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES FOYERS DES COURBES DU SECOND DEGRÉ ET SUR LA DÉTERMINATION ANALYTIQUE DE CES POINTS;

Par M. le Dr A. LETNIKOW,
Professeur à l'École impériale technique de Moscou.

1. Nous supposerons que la courbe du second degré rapportée aux coordonnées rectilignes quelconques est représentée par l'équation générale

$$(1)\qquad f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées inconnues d'un foyer, et appelons ρ le rayon vecteur mené du foyer au point quelconque de la courbe donnée; en adoptant la définition connue des foyers indiquée par Euler, nous aurons

$$\rho = Mx + Ny + Q,$$

où M, N et Q sont les coefficients à déterminer, avec la condition que la fonction linéaire représentant le rayon vecteur doit avoir la valeur positive pour tous les points de la courbe donnée.

On démontre très facilement que les foyers, comme les définit Euler, n'existent que dans les courbes du second degré.

Pour la commodité des calculs, nous représenterons dans la suite la fonction linéaire ci-dessus sous la forme

$$(2)\qquad \rho = M(x - x_1) + N(y - y_1) + K.$$

L'équation

$$(3)\qquad M(x - x_1) + N(y - y_1) + K = 0,$$

où x et y sont les coordonnées courantes, représentera une droite nommée *directrice* de la courbe du second degré. La distance δ d'un point quelconque de la courbe (1) à la directrice (3) sera

$$\delta = V[M(x - x_1) + N(y - y_1) + K],$$

où

$$V = \frac{\sin\theta}{\sqrt{M^2 + N^2 - 2MN\cos\theta}},$$

θ étant l'angle des axes des coordonnées; d'ailleurs, $V > 0$. On aura donc

$$\frac{\rho}{\delta} = \frac{1}{V} = \varepsilon \quad \text{ou} \quad \rho = \varepsilon\delta,$$

où ε est une constante positive que l'on nomme *excentricité* de la courbe (1).

2. Il est évident qu'en général la directrice ne coupe pas la courbe, car autrement, pour le point d'intersection, on aurait $\delta = 0$, et, par conséquent, $\rho = 0$, et le foyer (x_1, y_1), dans ce cas singulier, serait situé sur la courbe. Le lieu géométrique déterminé par la condition $\rho = \varepsilon\delta$ se réduirait, dans ce cas, au système de deux droites concourantes au point foyer et formant avec la directrice de deux côtés un même angle φ déterminé par l'égalité $\varepsilon = \frac{1}{\sin\varphi}$. L'expression du rayon vecteur serait alors

$$\rho = M(x - x_1) + N(y - y_1).$$

Laissant de côté ce cas exclusif, qui ne présente pas d'intérêt, nous admettrons, dans la suite, que la directrice ne coupe pas la courbe.

3. Menons, par le foyer F_1, (x_1, y_1), une droite parallèle à la directrice; il est évident que sur cette droite il y aura deux points L et L′ du lieu considéré, ces points

étant déterminés par leurs distances du foyer

$$FL = FL' = 2D,$$

où D est la distance du foyer à la directrice. La corde LL' est divisée par le point F en deux parties égales; donc son équation est

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) = 0,$$

où

$$X_1 = f'_{x_1}(x_1, y_1) \quad \text{et} \quad Y_1 = f'_{y_1}(x_1, y_1).$$

L'équation de la directrice comme parallèle à la corde LL' pourra donc s'écrire sous la forme

$$(4) \qquad X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k = 0,$$

où k est une constante inconnue. La comparaison de l'équation (4) à l'équation (3) nous donne les relations

$$M = \lambda X_1, \quad N = \lambda Y_1, \quad K = \lambda k,$$

λ étant un facteur positif ou négatif. On aura, de plus,

$$(5) \qquad \rho = \lambda[X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k].$$

Le signe de λ sera déterminé par la condition que ρ doit être positif.

4. Soit M, (x, y), un point quelconque de notre courbe; menons le rayon vecteur FM et supposons qu'il coupe la courbe en un autre point N, (x', y'); nous devrons avoir

$$(6) \qquad \begin{cases} FM = \lambda[X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k], \\ FN = \lambda[X_1(x' - x_1) + Y_1(y' - y_1) + k]. \end{cases}$$

L'équation de la corde MN passant par le point F est

$$(7) \qquad \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = r,$$

où

$$p = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \quad q = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta},$$

α étant l'angle formé par cette droite avec l'axe des x, r la distance positive ou négative de deux points (x, y) et (x_1, y_1), en prenant $r > 0$ si l'on a $y > y_1$, et en admettant $r < 0$ si le point (x, y) est situé sur la droite considérée du côté où $y < y_1$. On aura d'ailleurs, comme on sait, cette relation entre p et q :

$$p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta = 1.$$

Supposons que le point M, (x, y), de la courbe est situé sur la droite (7), du côté où $y > y_1$; alors on aura

$$(8) \qquad \text{FM} = \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q}.$$

Il serait facile de faire voir que l'autre point d'intersection N, (x', y'), ne pourra pas se trouver sur la droite (7) du même côté du point F comme le point M, c'est-à-dire du côté où $y > y_1$, car l'égalité

$$\text{FN} = \frac{x' - x_1}{p} = \frac{y' - y_1}{q}$$

nous conduirait nécessairement à la conclusion que le point N coïncide avec le point M. Donc, si nous considérons les points de la courbe pour lesquels le rayon vecteur s'exprime par la formule (5), nous devrons supposer que l'autre point d'intersection N, s'il existe, se trouve sur la droite (6) du côté du point F où $y < y_1$, et nous aurons, par conséquent,

$$(9) \qquad -\text{FN} = \frac{x' - x_1}{p} = \frac{y' - y_1}{q}.$$

L'élimination de x et y et de x' et y' des formules (6) au moyen des égalités (8) et (9) nous donne

$$\begin{aligned} \text{FM} &= \lambda[\quad (\text{X}_1 p + \text{Y}_1 q)\text{FM} + k], \\ \text{FN} &= \lambda[-(\text{X}_1 p + \text{Y}_1 q)\text{FN} + k]. \end{aligned}$$

En éliminant ensuite $X_1 p + Y_1 q$ entre ces deux équations, nous aurons l'expression d'un théorème connu,

$$(10) \qquad \frac{1}{\text{FM}} + \frac{1}{\text{FN}} = \frac{2}{k\lambda} = \text{const.},$$

savoir, que *la moyenne harmonique entre les deux segments déterminés par le foyer sur une corde focale est constante.*

Si d'ailleurs nous appliquons l'égalité (10) à la corde LL', dont la longueur $\text{LL}' = 2\text{P}$ est ce qu'on appelle le *paramètre* de la courbe, nous verrons que la constante de la dernière équation est égale à $\frac{2}{\text{P}}$, et, par conséquent, le demi-paramètre

$$\text{P} = k\lambda.$$

5. Maintenant nous pouvons déterminer la constante k en fonction des coordonnées du foyer.

Désignons, pour abréger, la première partie de l'équation (1) par u; alors, en éliminant x et y entre les équations (1) et (7), nous aurons, pour les points d'intersection de la droite (7) avec la courbe (1), l'équation

$$(11) \qquad sr^2 + tr + u_1 = 0,$$

en désignant par u_1 la valeur de la fonction $u = f(x, y)$ quand on y met x_1 et y_1 au lieu de x et y, et en posant, pour abréger,

$$\text{A}p^2 + \text{B}pq + \text{C}q^2 = s,$$
$$\text{X}_1 p + \text{Y}_1 q = t.$$

Soient r_1 et r_2 les deux racines de l'équation (11); nous aurons

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -\frac{t}{u_1}.$$

Posons $r_1 = \text{FM}$; alors $r_2 = -\text{FN}$, et, d'après la relation (18), nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{k\lambda}.$$

En prenant la somme des deux dernières égalités, nous trouverons

$$2k\lambda u_1 = (2u_1 - k\lambda t)r_1.$$

Mais la formule (5), jointe aux équations (7), nous donnera

$$r_1 = \lambda t r_1 + k\lambda;$$

en éliminant r_1 entre cette dernière équation et la précédente, nous trouverons très facilement

$$k = 2u_1.$$

De manière que la formule (5) deviendra

$$(12) \qquad \rho = \lambda[X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$

et l'équation de la directrice sera

$$(13) \qquad X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0.$$

D'après cette équation, on voit immédiatement que *la directrice est la polaire du foyer.*

De ce que cette droite, étant une polaire, ne coupe pas la courbe, nous concluons que son pôle, c'est-à-dire *le foyer de la courbe, se trouve du côté intérieur du plan de la courbe,* et, par suite, que du foyer on ne peut pas mener des tangentes réelles à la courbe.

6. Le théorème exprimé par la relation (10) nous conduira immédiatement aux équations qui servent à déterminer les coordonnées du foyer. En effet, l'équation (11) nous donne

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \pm \frac{\sqrt{t^2 - 4su_1}}{u_1},$$

et, d'après la relation (10), nous devrons avoir

$$(14) \qquad \pm\frac{\sqrt{t^2-4su_1}}{u_1}=\frac{2}{k\lambda}=\frac{1}{\lambda u_1}=\text{const.},$$

c'est-à-dire que cette expression ne doit pas dépendre de la direction de la corde focale considérée ; autrement dit, la valeur de l'expression $t^2 - 4su_1$ doit être indépendante de paramètres angulaires p et q, qui déterminent la direction de la corde. Mais on a

$$\begin{aligned} t^2-4su_1 = {} & (X_1^2-4Au_1)p^2 \\ & + (Y_1^2-4Cu_1)pq + 2(X_1Y_1-2Bu_1)pq, \end{aligned}$$

et nous pouvons poser

$$\frac{(X_1^2-4Au_1)p^2+(Y_1^2-4Cu_1)q^2+2(X_1Y_1-2Bu_1)pq}{p^2+q^2+2pq\cos\theta}=\text{const}.$$

Cette dernière condition nous mène aux équations

$$\frac{X_1^2-4Au_1}{1}=\frac{Y_1^2-4Cu_1}{1}=\frac{X_1Y_1-2Bu_1}{\cos\theta},$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} X_1^2-Y_1^2 &= 4(A-C)u_1, \\ X_1Y_1-2Bu_1 &= (X_1^2-4Au_1)\cos\theta, \end{aligned}\right.$$

et sont les équations connues qui déterminent les coordonnées d'un foyer de la courbe du second degré (1). Nous aurons d'ailleurs, d'après l'équation (14),

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{X_1^2-4Au_1}},$$

et, par conséquent, le demi-paramètre P se déterminera par la formule

$$(16) \qquad P=\frac{2u_1}{\sqrt{X_1^2-4Au_1}}.$$

Ainsi, le paramètre de la courbe (1), l'expression du rayon vecteur (12) et l'équation de la directrice correspondante seront complètement connus si nous déterminons les coordonnées du foyer au moyen des équations (15).

7. En éliminant u_1 entre les deux équations (15), nous trouverons

$$(B-2C\cos\theta)X_1^2-2(A-C)X_1Y_1-(B-2A\cos\theta)Y_1^2=0,$$

et cette équation représente, comme l'on sait, les axes de la courbe du second degré : donc *les foyers se trouvent sur les axes de la courbe.*

Dans le cas de la parabole, on a $B^2-4AC=0$, et si, au moyen de cette condition, on élimine A de la dernière équation, on trouve sans difficulté que le premier membre se décompose en produit de deux facteurs linéaires, de manière que l'équation considérée peut se représenter sous la forme

$$[(2C\cos\theta-B)X_1+(B\cos\theta-2C)Y_1](2CX_1-BY_1)=0,$$

et, comme pour le cas de la parabole le facteur

$$2CX_1-BY_1=2CD-BE,$$

et, par suite, est une constante qui n'est pas égale à zéro, l'équation des axes se réduira à

$$(17)\qquad (2C\cos\theta-B)X_1+(B\cos\theta-2C)Y_1=0,$$

c'est-à-dire à une équation du premier degré qui représente l'axe de la parabole, le seul qui existe et sur lequel sera situé le foyer cherché.

Les conclusions de ce paragraphe résultent aussi directement de la propriété de la courbe exprimée par la relation ci-dessus $\rho=\varepsilon\delta$, d'après laquelle on reconnaît très facilement que tous les points du lieu considéré sont disposés symétriquement par rapport à la droite menée par le foyer perpendiculairement à la directrice; donc *le foyer est situé sur un axe de la courbe perpendiculaire à la directrice.*

8. Passons maintenant au calcul des coordonnées du foyer, et considérons d'abord les courbes ayant un centre. Comme le foyer est situé sur un axe, ses coordonnées x_1 et y_1 doivent satisfaire à l'équation d'un axe, et l'on aura

$$(18) \qquad y_1 - \beta = \mu(x_1 - \alpha),$$

où α et β sont les coordonnées connues du centre de la courbe et μ est le coefficient angulaire d'un des axes, ce coefficient étant une des deux racines de l'équation connue

$$(19) \quad (B - 2C\cos\theta)\mu^2 + 2(A - C)\mu - (B - 2A\cos\theta) = 0.$$

De cette manière, les coordonnées du foyer se déterminent par la résolution d'une des équations (15), combinée avec l'équation (18). Pour abréger le calcul, nous prendrons pour inconnues

$$x_1 - \alpha = x' \quad \text{et} \quad y_1 - \beta = y',$$

x' et y' étant les coordonnées du foyer par rapport aux axes des coordonnées menées par le centre, parallèlement aux axes primitifs. L'introduction de ces inconnues nous donne

$$X_1 = 2Ax' + By',$$
$$Y_1 = Bx' + 2Cy',$$
$$u_1 = u_0 + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2,$$

où u_0 désigne la valeur de la fonction u quand on y change x et y en α et β.

Les équations (15) deviendront

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} & x'^2 - y'^2 + \frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC} = 0, \\ & x'y' + \cos\theta\, y'^2 + \frac{H(B - 2A\cos\theta)}{B^2 - 4AC} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$H = \frac{AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC} = u_0.$$

L'équation (18) s'écrira

$$y' = \mu x'.$$

Cette équation, combinée avec la première des équations (20), nous donnera

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} & x'^2 = -\frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC}\,\frac{1}{1 - \mu^2}, \\ & y'^2 = -\frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC}\,\frac{\mu^2}{1 - \mu^2}. \end{aligned} \right.$$

La constante μ pourra admettre ici deux valeurs différentes, et, par conséquent, on aura deux couples de valeurs correspondantes de x' et de y'. On aura ainsi quatre foyers situés, par deux, sur les deux axes de la courbe et disposés symétriquement par rapport au centre. Mais il nous sera facile de faire voir que deux de ces foyers seront imaginaires et qu'il n'y aura que deux foyers réels, situés sur un même axe et éloignés à des distances égales du centre de la courbe.

En effet, soient μ et μ' les deux racines de l'équation (19), et appelons x'_1 la valeur de x' correspondante à la racine μ'; on aura

$$x_1'^2 = -\frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC}\,\frac{1}{1 - \mu'^2},$$

et, par conséquent,

$$x'^2 x_1'^2 = \frac{\nu^2}{1 + \mu^2\mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2},$$

où $\nu = -\frac{4(A-C)u_0}{B^2-4AC}$. Mais la condition de la perpendicularité de deux axes nous donne

$$1 + \mu\mu' + (\mu + \mu')\cos\theta = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\mu^2 + \mu'^2 = \frac{1 + 2\sin^2\theta\,\mu\mu' + \mu^2\mu'^2}{\cos^2\theta},$$

et l'on trouvera ensuite

$$1 + \mu^2\mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2 = -(1 + \mu\mu')^2\operatorname{tang}^2\theta.$$

On aura donc

$$x'^2 x_1'^2 = -\nu^2(1 + \mu\mu')^2\operatorname{tang}^2\theta,$$

d'où l'on conclut que, des deux valeurs x'^2 et $x_1'^2$, l'une est positive et l'autre négative. Si les axes de coordonnées étaient rectangulaires, on tirerait la même conclusion de ce que l'on aurait dans ce cas

$$x'^2 x_1'^2 = -\frac{\nu^2}{(\mu + \mu')^2}.$$

On voit par cela que l'on aura deux valeurs réelles égales et de signes contraires pour x' et de même pour y', et que les deux autres valeurs de x' et de y' seront imaginaires. Ainsi, *dans les courbes du second degré ayant un centre, il n'y aura que deux foyers réels se trouvant sur un axe de la courbe et disposés symétriquement par rapport au centre.*

Dans le cas de la parabole, il est très facile de voir que chacune des équations (15) se réduit à une équation du premier degré par rapport aux coordonnées x_1 et y_1.

Ces deux équations, ou l'une d'elles combinée avec l'équation de l'axe (17), nous donneront les coordonnées du foyer. Nous n'effectuerons pas ces calculs, qui sont d'ailleurs développés partout.

9. Il nous sera facile maintenant de manifester les propriétés principales des rayons vecteurs menés de deux foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole à un point quelconque de la courbe.

Considérons d'abord une ellipse. Soient O son centre, F_1 et F_2 ses deux foyers; la droite qui les joint est l'axe focal. Dans ce cas le centre de la courbe se trouve, comme on sait, dans la partie intérieure du plan de la courbe, de même que les deux foyers F_1 et F_2. La directrice correspondante au foyer F_1, étant la polaire de ce point, se trouve tout entière dans la partie extérieure du plan de la courbe, et elle est perpendiculaire à l'axe focal. La directrice correspondante à l'autre foyer aura une situation analogue par rapport à ce foyer, et elle sera symétriquement placée avec la première directrice par rapport au centre de la courbe. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de la courbe; on aura, d'après la formule (15),

$$F_1M = \rho_1 = \lambda_1[X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$

où

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}}.$$

La même formule nous donne, pour l'autre rayon vecteur, l'expression

$$F_2M = \rho_2 = \lambda_2[X_2(x - x_2) + Y_2(y - y_2) + 2u_2],$$

où x_2 et y_2 sont les coordonnées du foyer F_2, et λ_2, X_2, Y_2, u_2 désignent ce que deviennent λ_1, X_1, Y_1, u_1 quand on change, dans ces expressions, x_1 et y_1 en x_2 et y_2.

L'équation de la directrice correspondante au foyer F_1 est

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0.$$

Pour $x = x_1$ et $y = y_1$, le premier membre de cette équation se réduit à $2u_1$; mais, comme un point quelconque M de la courbe est situé, il est évident, du même côté de la directrice que le foyer F_1, nous devrons conclure que l'expression

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1$$

pour tous les points de la courbe aura le même signe que u_1, et, par conséquent, dans l'expression donnée plus haut pour le rayon vecteur ρ_1, le signe de λ_1 doit être le même que le signe de u_1. Des considérations analogues nous amènent à conclure que, dans l'expression du rayon vecteur ρ_2, le facteur λ_2 doit être pris avec le même signe que u_2. D'ailleurs, comme on a

$$\begin{gathered}
x_1 = \alpha + x', \quad y_1 = \beta + y', \\
x_2 = \alpha - x', \quad y_2 = \beta - y', \\
u_1 = f(\alpha + x', \beta + y') = u_0 + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2, \\
u_2 = f(\alpha - x', \beta - y') = u_0 + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2,
\end{gathered}$$

nous aurons $u_1 = u_2$, et les facteurs λ_1 et λ_2, dans les expressions de ρ_1 et de ρ_2, auront le même signe. D'un autre côté, on aura

$$\begin{gathered}
X_2 = -(2Ax' + By') = -X_1, \\
Y_2 = -(Bx' + 2Cy') = -Y_1,
\end{gathered}$$

d'où il suit que $\lambda_1 = \lambda_2$. Par conséquent, en ajoutant les deux expressions de ρ_1 et de ρ_2, on trouvera

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\lambda_1(-X_1x' - Y_1y' + 2u_1).$$

Mais, d'après un calcul immédiat, on a

$$-X_1x' - Y_1y' + 2u_1 = 2u_0,$$

et enfin

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{4u_0}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}} = \text{const.}$$

Cette égalité, exprimant la propriété fondamentale des rayons vecteurs menés de deux foyers d'une ellipse à un point quelconque de la courbe, nous donne aussi la longueur de l'axe focal de l'ellipse.

Passons à l'hyperbole. Dans ce cas, le centre de la courbe est situé, comme on sait, dans la partie du plan extérieure à la courbe, les foyers se trouvant toujours dans la partie intérieure; d'ailleurs, l'axe focal est l'axe transverse de la courbe. Le centre et le foyer se trouvent ici de deux côtés différents de la directrice correspondante au foyer considéré. En effet, si nous prenons l'équation de la directrice correspondante au foyer F_1,

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0;$$

alors la substitution des coordonnées du foyer x_1 et y_1, au lieu de x et de y, dans le premier membre de cette équation, nous donne $2u_1$, tandis que si nous mettons, au lieu de x et de y, les coordonnées du centre α et β, nous verrons que le premier membre de cette équation se réduit à

$$X_1(\alpha - x_1) + Y_1(\beta - y_1) + 2u_1 = 2u_0;$$

mais, dans le cas de l'hyperbole, u_1 et u_0 ont des signes différents.

Les valeurs des rayons vecteurs menés de deux foyers F_1 et F_2, au point $M(x, y)$ de la courbe, seront ici

$$F_1M = \rho_1 = \lambda_1[X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$
$$F_2M = \rho_2 = \lambda_2[X_2(x - x_2) + Y_2(y - y_2) + 2u_2].$$

Si le point M est pris sur la branche de la courbe voisine du foyer F_1, alors il est évident que les deux points

M et F_1 se trouvent d'un même côté de la directrice correspondante au foyer F_1, et par conséquent le facteur λ_1 aura le même signe que u_1. Au contraire, le point M et le foyer F_2 se trouveront évidemment de deux côtés différents de la directrice correspondante au foyer F_1, et, par conséquent, λ_2 et u_2 ont des signes contraires. Mais ici, comme dans le cas de l'ellipse, on aura

$$X_2 = -X_1, \quad Y_2 = -Y_1, \quad u_2 = u_1, \quad \lambda_2 = -\lambda_1.$$

Donc

$$\rho_2 = \lambda_1 [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) - 2u_1).$$

En prenant la différence des deux expressions de ρ_1 et de ρ_2, nous trouverons

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{4u_0}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}} = \text{const.},$$

où le radical aura le signe opposé au signe de u_0.

La dernière égalité, exprimant la propriété fondamentale des rayons vecteurs menés des deux foyers de l'hyperbole à un point quelconque de la courbe, nous donne aussi la longueur de l'axe focal.

10. Pour conclusion, nous donnerons une formule très simple, qui peut servir à calculer l'excentricité de la courbe.

Supposons que l'axe focal coupe la courbe en deux points (sommets) A_1 et A_2, dont le premier est situé entre le foyer F_1 et le point D d'intersection de l'axe focal et de la directrice correspondante au foyer F_1. En posant $A_1F_1 = f$ et $A_1D = d$, nous aurons

$$P = \varepsilon(f + d),$$

où P est le demi-paramètre. La même condition $\rho = \varepsilon\delta$, appliquée au point A_2, nous donnera

$$2a - f = \varepsilon(2a + f),$$

où $2a = A_1A_2$ est la longueur de l'axe focal. Remarquons, d'ailleurs, que l'on a

$$f = \varepsilon d.$$

En éliminant ensuite f et d entre ces trois équations, nous trouverons

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{p}{a}.$$

Mais nous avons vu plus haut que, pour l'ellipse et pour l'hyperbole, on a la même expression de la longueur du demi-axe focal, savoir

$$a = \frac{2u_0}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}}.$$

Par conséquent, en vertu de la formule (16), nous aurons

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{u_1}{u_0}.$$

D'après cette formule, nous pouvons calculer la valeur de l'excentricité ε en fonction des coordonnées x_1 et y_1 d'un foyer F_1.

Pour une ellipse, les valeurs u_1 et u_0 ont le même signe et, par suite, ε est moindre que l'unité; pour une hyperbole, au contraire, ces deux valeurs ont des signes différents et, par conséquent, ε est plus grand que l'unité.

Dans le cas de la parabole, les coordonnées du centre sont infinies et, par suite, on a $u_0 = \infty$ et l'excentricité $\varepsilon = 1$.

Du reste, la valeur de l'excentricité pour une parabole résulte directement de ce que, le second point d'intersection de l'axe focal et de la courbe étant éloigné à l'infini, son conjugué harmonique A_1 doit se trouver au milieu de la distance F_1D; donc $A_1F_1 = A_1D$ ou $f = d$, et, par suite, $\varepsilon = 1$. Pour tous les points de la parabole on aura donc $\rho = \delta$.

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. A. DROZ.

Dans l'*Aperçu historique,* Chasles cite le théorème suivant :

Le plan tangent et la normale en un point P *d'une surface du second degré coupent un des plans diamétraux de la surface suivant une droite et un point tels, que le point est le pôle de la droite par rapport à la conique focale contenue dans le plan.*

La démonstration analytique est bien simple.

Soit $\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 1$ l'équation d'une surface du second degré à centre.

Le plan tangent au point (x', y', z') de la surface aura pour équation

$$\frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} + \frac{zz'}{N} = 1.$$

Ce plan coupe le plan des xy suivant une droite qui aura pour équations

$$(1) \qquad z = 0, \quad \frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} = 1.$$

Équations de la normale en (x', y', z') :

$$\frac{L}{x'}(x - x') = \frac{N}{z'}(z - z'),$$

$$\frac{M}{y'}(y - y') = \frac{N}{z'}(z - z').$$

Cette ligne coupe le plan des xy en un point, dont les coordonnées sont

$$x_0 = \frac{x'(L - N)}{L}, \quad y_0 = \frac{y'(M - N)}{M}, \quad z_0 = 0.$$

Si l'on cherche la polaire de ce point par rapport à la conique focale

$$\frac{x^2}{L - N} + \frac{y^2}{M - N} = 1,$$

on trouve

$$\frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} = 1,$$

équation qui est la même que l'équation (1).

Une surface du second degré S est coupée par un plan P suivant une conique C_2. Construisons en chaque point de C_2 la normale à S. Toutes ces normales forment une surface réglée du quatrième degré S_4.

Chasles fait usage du théorème précité (*Journal de Liouville*) pour prouver que S_4 peut être coupée par une infinité de plans suivant des coniques. On démontre facilement que cette surface est du quatrième degré et qu'elle possède une courbe double du troisième degré. Si par un point Q quelconque on mène toutes les parallèles aux normales de S, ces lignes seront sur un cône du second degré.

Car, par le point Q, menons un plan. Si du point π, pôle de P par rapport à S, on abaisse la perpendiculaire πq, on pourra mener par cette ligne deux plans tangents à la surface en des points de C_2. Les normales en ces points seront parallèles au plan mené par Q. Chacun de ces plans contient donc deux génératrices du cône; il est du second degré. Le plan infini coupe la surface S_4, d'abord suivant la conique qu'elle a en commun avec le cône, et suivant deux droites, les normales de S aux points infinis de C_2. La section étant du quatrième degré, la surface réglée S_4 est du quatrième degré.

Si du point π on abaisse une perpendiculaire sur le plan P, on pourra mener par cette droite deux plans tangents à la surface S en des points de C_2, et les normales en ces points sont dans le plan P.

Donc, il y a sur le plan P trois points par lesquels passent deux des génératrices de S_4. On en déduit qu'il y a sur S_4 une courbe C_3 du troisième degré, par chaque point de laquelle passent deux des normales de S. C_3 est, pour cette raison, une courbe double du troisième degré sur S_4.

Un plan quelconque coupe donc S_4 suivant une courbe du quatrième degré ayant trois points doubles.

Chaque plan passant par une normale coupe la surface suivant une courbe du troisième degré avec un point double.

Chaque plan contenant deux normales coupe encore S_4 suivant une conique.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

(voir 2ᵉ série, t. XIX, p. 174).

RHÉTORIQUE.

PAR M. A. LEINEKUGEL.

Soit AB *une portion de droite de longueur donnée; on prend entre* A *et* B, *sur la droite* AB, *un point* C, *et sur* AC *comme diamètre on décrit une demi-circonférence; par le point* B *on mène une tangente à cette demi-circonférence; soit* D *le point de contact, et soit* E *le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite* AB *par le point* A :

Déterminer le point C *de telle façon que, si l'on fait tourner la figure autour de la droite* AB, *la surface engendrée par l'arc de cercle* AD *et la surface engendrée par la portion de droite* BE *soient dans un rapport égal à un nombre donné* m.

Indiquer les conditions de possibilité. Appliquer, dans le cas particulier où m *est égal à* $\frac{1}{2}$, *et dans ce cas trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions* BD, DE *de la droite* BE.

Soient $AB = l$, $AC = 2x$, et H le pied de la perpendiculaire abaissée du point de tangence D sur la droite AB.

Les surfaces que décrivent l'arc de cercle AD et la portion de droite BE ayant respectivement pour mesure $2\pi x.AH$ et $\pi.BE.AE$, on a, d'après l'énoncé,

$$(1) \qquad 2x.\,AH = m.BE.AE.$$

Soit O le centre du cercle décrit sur AC comme diamètre; le triangle rectangle ODB donne

$$\overline{OD}^2 = OH.\,OB = OH(l - x),$$

d'où

$$OH = \frac{\overline{OD}^2}{l - x} = \frac{x^2}{l - x},$$

et par suite

$$(2) \qquad AH = x + \frac{x^2}{l - x} = \frac{lx}{l - x}.$$

En outre, les triangles rectangles ODB, BAE étant semblables, on a

$$\frac{BE}{BO} = \frac{AE}{OD} = \frac{BA}{BD},$$

ou, parce que $BD = \sqrt{BA.BC} = \sqrt{l(l - 2x)}$,

$$\frac{BE}{l - x} = \frac{AE}{x} = \frac{l}{\sqrt{l(l - 2x)}};$$

il s'ensuit

$$\mathrm{BE} = \frac{l(l-x)}{\sqrt{l(l-2x)}},\quad \mathrm{AE} = \frac{lx}{\sqrt{l(l-2x)}},$$

d'où

$$(3)\qquad \mathrm{BE.AE} = \frac{lx(l-x)}{l-2x}.$$

En remplaçant, dans l'équation (1), AH et BE.AE par les valeurs obtenues (2) et (3), il vient

$$\frac{2lx^2}{l-x} = m\frac{lx(l-x)}{l-2x},$$

et, en réduisant,

$$(4)\qquad x^2(m+4) - 2l(m+1)x + ml^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation, c'est-à-dire de la possibilité du problème proposé, est $m \leq = \frac{1}{2}$.

Dans le cas particulier de $m = \frac{1}{2}$, les deux racines sont égales à $\frac{l}{3}$, et la valeur de AH devient

$$\frac{l\frac{l}{3}}{l-\frac{l}{3}} = \frac{l}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}.$$

Le point H étant alors au milieu de AB, on a

$$\mathrm{HD} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AE},\quad \mathrm{BD} = \frac{1}{2}\,\mathrm{BE};$$

il en résulte

$$\frac{\text{surf BD}}{\text{surf BE}} = \frac{1}{4},$$

et, par conséquent, le *rapport des surfaces engendrées* par les deux portions BD, DE de la droite BE est égal à $\frac{1}{3}$.

Note. La même question a été résolue par M. Lez.

SECONDE.

PAR M. H. LEZ.

PREMIÈRE QUESTION. — *On donne deux droites parallèles* RR′, SS′, *et une droite perpendiculaire à ces parallèles rencontrant* RR′ *en* A *et* SS′ *en* B. *Sur* RR′, *à partir du point* A, *on porte une longueur arbitraire* AA′, *et sur* SS′ *à partir du point* B, *et du même côté par rapport à* AB, *on porte une longueur* BB′ *telle que le produit des longueurs* AA′, BB′ *soit égal au carré de* AB; *on mène les droites* AB′ *et* BA′, *et l'on désigne par* M *leur point de rencontre; on mène par le point* M *une perpendiculaire à* AB, *et l'on désigne par* P *et* Q *les points où elle rencontre les droites* AB, A′B′. *Enfin, on désigne par* C *le point où la droite* A′B′ *rencontre la droite* AB.

1° *Trouver le lieu décrit par le point* M *quand on fait varier la longueur* AA′;

2° *Démontrer que le point* M *est le milieu de* PQ;

3° *Démontrer que la tangente au point* M *à la courbe que décrit ce point passe par le point* C.

1° Si l'on prend sur la droite SS′, à partir du point B, et dans le sens opposé à BB′, la longueur $BD = AA'$, le quadrilatère ADBA′ sera un parallélogramme; et, à cause de la relation $AB^2 = BD.BB'$, le triangle DAB′ sera rectangle en A. Les droites BM, DA étant parallèles, l'angle

BMA est le supplément de l'angle droit DAM; donc l'angle BMA est droit, et, par conséquent, le lieu du point M est la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

2° On sait que la droite menée du point C de rencontre des côtés AB, A'B' non parallèles d'un trapèze au point M d'intersection des diagonales passe par les milieux E, F des bases AA', BB'. La droite PQ, étant parallèle aux bases AA' et BB', sera divisée en deux parties égales par la droite CEF; donc M est le milieu de PQ.

3° Soit O le centre de la circonférence décrite sur AB comme diamètre; les droites MO, MF étant menées du sommet M de l'angle droit des triangles rectangles AMB, BMB' aux milieux O, F des hypoténuses AB, BB', on a

$$\widehat{OMB} = \widehat{OBM} \quad \text{et} \quad \widehat{FMB} = \widehat{FBM};$$

il s'ensuit

$$\widehat{OMB} + \widehat{FMB} = \widehat{OBM} + \widehat{FBM}$$

ou

$$\widehat{OMF} = \widehat{OBF}.$$

Donc l'angle OMF ou OMC est droit, et, par conséquent, la tangente au point M à la circonférence que décrit ce point passe par le point C.

Deuxième question. — *Soit a la longueur du côté d'un triangle équilatéral* ABC : *calculer la distance du point* A *à un point* M *situé sur* AB, *entre* A *et* B, *de façon que, si l'on désigne par* P *et* Q *les pieds des perpendiculaires abaissées du point* M *sur les côtés* AC, BC *du triangle, le rapport de l'aire du quadrilatère* APQB *à l'aire du triangle* ABC *soit égal à un nombre donné m.*

Indiquer les conditions de possibilité; appliquer en *supposant* $m = \frac{15}{32}$, *et, dans ce cas, déterminer par une construction géométrique la position du point* M.

En désignant par x la distance cherchée AM, on voit facilement que, les angles MAP, MBQ étant de 60°, on a

$$AP = \frac{AM}{2} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad BQ = \frac{BM}{2} = \frac{a-x}{2}.$$

Si l'on abaisse des points B et Q des perpendiculaires BH, QR sur AC, la similitude des triangles QCR, BCH donnera

$$\frac{QR}{QC} = \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} QR &= QC\frac{\sqrt{3}}{2} = (BC - BQ)\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \left[a - \left(\frac{a-x}{2}\right)\right]\frac{\sqrt{3}}{2} = (a+x)\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part,

$$PC = AC - AP = a - \frac{x}{2}.$$

Ainsi, l'aire du triangle PQC, ou $\frac{PC, QR}{2}$, a pour valeur

$$\frac{1}{2}\left(a - \frac{x}{2}\right)(a+x)\frac{\sqrt{3}}{4}; \quad \text{ou} \quad (2a - x)(a+x)\frac{\sqrt{3}}{16}.$$

Or, le quadrilatère APQB s'obtient en retranchant du triangle ABC le triangle PQC; donc l'aire

$$APQB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - (2a - x)(a+x)\frac{\sqrt{3}}{16} = (x^2 - ax + 2a^2)\frac{\sqrt{3}}{16},$$

et le rapport $\frac{\text{APQB}}{\text{ABC}}$ a pour expression

$$\frac{x^2 - ax + 2a^2}{4a^2}.$$

Donc, d'après l'énoncé,

$$\frac{x^2 - ax + 2a^2}{4a^2} = m$$

ou

$$(1) \qquad x^2 - ax + 2a^2(1 - 2m) = 0.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{16m - 7}).$$

Pour $m < \frac{7}{16}$, les deux racines de l'équation sont imaginaires ; si $m = \frac{7}{16}$, les deux racines sont égales à $\frac{a}{2}$; le point M est alors le milieu de AB.

Lorsque m est compris entre $\frac{7}{16}$ et $\frac{1}{2}$, les deux racines sont réelles, positives et moindres que a ou AB. Pour $m = \frac{15}{32}$, par exemple, $x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ les valeurs de x ou de AM sont, dans ce cas particulier, égales à la moitié du côté AB du triangle équilatéral, augmenté ou diminué du quart de la diagonale du carré construit sur ce côté.

Si $m = \frac{1}{2}$, on a

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = a.$$

Pour $m > \frac{1}{2}$, l'une des deux racines de l'équation (1) est négative ; l'autre est positive, mais plus grande que le côté a du triangle équilatéral. Ainsi, la question n'admet aucune solution lorsque le nombre donné m est égal à

$\frac{1}{2}$ ou plus grand que $\frac{1}{2}$; elle est, de même, impossible quand m est moindre que $\frac{7}{16}$.

Note. — Solution analogue de M. Leinekugel.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880

(voir 2e série, t. XX, p. 135).

PHILOSOPHIE.

PAR M. MORET-BLANC.

La Terre étant supposée sphérique, on considère le point M *de la surface dont la latitude est égale à la longitude :*

1° *Déterminer le lieu des projections* M *sur le plan de l'équateur;*

2° *Déterminer le lieu des droites* AM, A *étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.*

Soient O le centre de la Terre et B le point où le demi-méridien de M coupe l'équateur.

1° Les arcs MB, AB étant égaux, les points M et A se projettent au même point m sur l'intersection OB des plans de l'équateur et du méridien de M. Le point m est la projection de M sur le plan de l'équateur. L'angle AmO étant droit, le lieu du point m est la circonférence décrite sur AO comme diamètre.

2° Le triangle AmM étant rectangle en m et de plus isoscèle, l'angle MAm de la droite AM et de sa projection Am sur le plan de l'équateur est de 45°. Par suite, la droite AM fait, de même, un angle de 45° avec la perpendiculaire AC, élevée en A au plan de l'équateur. La droite AM appartient donc à la surface d'un cône de révolution ayant A pour sommet et AC pour axe, et dont les génératrices font avec l'axe un angle de 45°. Le lieu de la droite AM est la partie de la surface de ce cône qui est, par rapport au plan tangent à la sphère en A, située du même côté que la sphère.

RHÉTORIQUE.

PAR M. MORET-BLANC.

Aux deux extrémités A *et* B *du diamètre* AB *d'un demi-cercle, on lui mène deux tangentes; on construit ensuite une troisième tangente qui coupe les deux premières aux points* C *et* D. *On demande de déterminer cette troisième tangente de manière que le volume engendré par le trapèze* ABDC *en tournant autour du diamètre* AB, *et la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre, soient entre eux dans le rapport de m à* 1. *Discussion.*

Soient O le centre du demi-cercle, R son rayon et E le point de contact de la tangente CD. Posons

$$AC = x, \quad BD = y.$$

Le trapèze ABDC, en tournant autour de AB, engendre un tronc de cône dont le volume a pour expression

$$\frac{2}{3}\pi R(x^2 + y^2 + xy),$$

et l'on a

$$\frac{2}{3}\pi R(x^2 + y^2 + xy) = \frac{4}{3}\pi m R^3$$

ou

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + xy = 2m\mathrm{R}^2.$$

Les lignes OC, OD étant les bissectrices des angles supplémentaires DCA, CDB, la somme des angles OCD et ODC égale un droit, et, par suite, l'angle COD est droit. D'ailleurs

$$\mathrm{AC} = \mathrm{CE} = x, \quad \mathrm{DE} = y.$$

Le triangle rectangle COD donne

$$(2) \qquad xy = \mathrm{R}^2.$$

En combinant les équations (1) et (2), on a

$$(x+y)^2 = (2m+1)\mathrm{R}^2,$$
$$(x-y)^2 = (2m-3)\mathrm{R}^2,$$

d'où

$$x = \frac{\mathrm{R}\left[\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3}\right]}{2},$$

$$y = \frac{\mathrm{R}\left[\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-3}\right]}{2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$m \geq \frac{3}{2}.$$

Dans le cas du minimum,

$$m = \frac{3}{2}, \quad x = y = \mathrm{R}.$$

Le tronc de cône se réduit au cylindre circonscrit à la sphère.

SECONDE.

PAR UN ABONNÉ.

Sur le côté BC *d'un triangle* ABC, *ou sur son prolongement, on prend un point arbitraire* D, *et l'on fait passer deux circonférences, l'une par les points* A, B, D, *l'autre par les points* A, C, D; *soient* O, O′ *les centres de ces circonférences. On propose :*

1° *De démontrer que le rapport des rayons de ces circonférences est indépendant de la position du point* D *sur le côté* BC;

2° *De déterminer la position que doit occuper le point* D *pour que les deux rayons aient la plus petite longueur possible ;*

3° *De démontrer que le triangle* AOO′ *est semblable au triangle* ABC;

4° *De trouver le lieu décrit par le point* M *qui partage la droite* OO′ *dans le rapport de deux longueurs données* m, n; *on examinera le cas particulier où le point* M *est le pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur* OO′.

La droite OO′ étant perpendiculaire à AD en son milieu d, les angles A$\mathrm{O}d$, ABD ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O, et les angles $\mathrm{AO'}d$, $\mathrm{AC}d$ ont pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O′; donc

$$\widehat{\mathrm{AOO'}} = \widehat{\mathrm{ABC}} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{AO'O}} = \widehat{\mathrm{ACB}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AO'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}},$$

et, par conséquent:

1° Le rapport des rayons AO, AO′ des circonférences

O, O′ est indépendant de la position du point D sur le côté BC.

2° Les angles des triangles rectangles AdO, AdO' étant invariables, il en est de même des rapports

$$\frac{AO}{Ad}, \quad \frac{AO'}{Ad};$$

il s'ensuit que les plus petites valeurs des rayons AO, AO′ correspondent au minimum de Ad ou de AD; le minimum de AD est la perpendiculaire abaissée du point A sur BC. Les centres O, O′ coïncident alors avec les milieux b, c des côtés AB, AC, et les rayons AO, AO′ des circonférences O, O′ ont pour valeurs

$$\frac{AB}{2}, \quad \frac{AC}{2}.$$

3° Le triangle AOO′ est semblable au triangle ABC, puisque les angles AOO′, AO′O sont égaux respectivement aux angles ABC, ACB.

4° Soit m le point qui partage la droite bc dans le rapport donné de OM à MO′; les triangles bAm, OAM seront semblables, et l'on aura

$$\widehat{bAm} = \widehat{OAM} \quad \text{et} \quad \frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}.$$

Il en résulte que les triangles bAO, mAM sont, de même, semblables. En effet

$$\widehat{bAO} = \widehat{mAM},$$

parce que ces angles sont égaux aux angles bAm, OAM, augmentés ou diminués, tous deux, de l'angle OAm. De plus, l'égalité

$$\frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}$$

donne

$$\frac{Ab}{AO} = \frac{Am}{AM};$$

donc les triangles bAO, mAM sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels. Mais le triangle bAO est rectangle en b; donc l'angle AmM est droit. Par conséquent, le lieu géométrique du point M est la perpendiculaire menée à la droite Am, au point m.

Lorsque AM est perpendiculaire sur OO′, la droite bc est perpendiculaire à Am, puisque les triangles bAm, OAM sont semblables, et, dans ce cas, le lieu géométrique de M est la droite bc qui passe par les milieux b, c des côtés AB, AC.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et J. Delacourcelle, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Tarbes.

TROISIÈME.

Par M. MORET-BLANC.

Première question. — *Par les deux extrémités d'une droite* AB, *et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires* AC *et* BD, *telles que l'aire du trapèze* ABCD *ait une valeur constante donnée. Du milieu* E *de la droite* AB, *on abaisse une perpendiculaire* EM *sur la droite* CD. *Trouver le lieu décrit par le pied* M *de cette perpendiculaire quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires* AC *et* BD.

Même problème quand les lignes AC *et* BD, *au lieu d'être perpendiculaires à* AB, *sont parallèles à une droite fixe donnée.*

Soit m^2 l'aire donnée du trapèze ABCD. On a

$$\frac{AC + BD}{2} \times AB = m^2.$$

Soit F le milieu de CD; la ligne EF, parallèle à AC et à BD, sera perpendiculaire à AB et égale à

$$\frac{AC + BD}{2} = \frac{m^2}{AB},$$

troisième proportionnelle à AB et m.

Ayant élevé EF, perpendiculaire sur le milieu de AB et égale à cette longueur, le point F est le milieu de CD dans toutes ses positions. L'angle EMF étant droit, le lieu du point M est la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

Si AC et BD sont parallèles à une droite fixe donnée, soit d leur distance; il faudra prendre $EF = \frac{m^2}{d}$ et parallèle à la droite donnée : le lieu du point M sera encore la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

Deuxième question. — *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles, et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Discussion.*

Soient r le rayon du cercle circonscrit, d et d' les deux diagonales dont aucune évidemment ne doit surpasser $2r$, et θ leur angle.

Décrivons une circonférence avec le rayon donné, et dans cette circonférence inscrivons une corde AC, égale à la diagonale d; abaissons du centre O la perpendiculaire OI sur la corde AC; menons par O une droite qui fasse avec OI l'angle donné θ, et prenons sur cette droite

$$OH = OH' = \sqrt{r^2 - \frac{d'^2}{4}}.$$

La corde BD, menée par H ou par H′ perpendiculairement à HH′, sera la seconde diagonale du quadrilatère; mais, pour que ce quadrilatère soit convexe, il faut que les deux diagonales se rencontrent à l'intérieur du cercle.

Projetons A et C sur HH′, en a et c. Si les deux points H et H′ sont situés entre a et c, il y aura deux quadrilatères convexes satisfaisant à la question ; si un seul des points H, H′ est compris entre a et c, à ce point correspondra un quadrilatère convexe et à l'autre un quadrilatère étoilé. Si les deux points H et H′ sont hors du segment ac, les deux quadrilatères seront étoilés.

Si l'on faisait l'angle θ de l'autre côté de OI, on obtiendrait des solutions symétriques des premières par rapport à OI, et par conséquent des quadrilatères égaux aux précédents.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. L. Doucet, professeur au Lycée Corneille à Rouen.

Monsieur,

Voulez-vous me permettre de vous adresser une nouvelle solution d'un problème déjà traité plusieurs fois dans les *Annales?* Il s'agit de la question comprise sous les nos 970 et 1028, question assez difficile, à mon avis. Je n'ai pas su retrouver dans les *Annales* la première solution. Une lettre de M. Bourguet, t. XIII, p. 576, en fait la critique et signale une erreur. M. Bourguet traite la question à son tour et termine en concluant que le lieu est du huitième ordre. Plus tard, en 1877, M. Poujade, reprenant les résultats de M. Bourguet, annonce qu'on peut décomposer son équation du huitième degré; il y trouve un quadrilatère imaginaire, ayant pour sommets les quatre foyers de l'ellipse donnée, puis l'ensemble de deux coniques, l'une intérieure à cette ellipse (solution à rejeter par conséquent), l'autre extérieure, qui est la vraie solution. M. Poujade clôt sa lettre en donnant le moyen de former une équation du dixième degré contenant, outre ce qui précède, l'ellipse donnée elle-même. Depuis lors, si je ne me trompe, la question n'a pas reparu dans les *Nouvelles Annales*. Dans la solution que je vous envoie, il n'y a ni dixième ni huitième degré; je vais tout droit à la courbe du *second* degré, qui est la réponse unique à la question posée. Je donne en outre, par le même procédé de calcul, le lieu du point de concours des hauteurs du triangle.

La question est fort intéressante. Elle m'a été communiquée par les élèves de Mathématiques spéciales de Rouen, à qui l'avaient envoyée des camarades du lycée Louis le-Grand (classe de M. Pruvost). Je n'ai pas trouvé du premier coup la solution relativement simple que je vous envoie.

On circonscrit à une ellipse donnée un triangle ayant pour hauteurs les droites qui joignent les sommets aux points de contact de la courbe avec les côtés opposés: lieu des sommets du triangle; lieu du point de concours des hauteurs.

Soient

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \mathrm{P} = 0,$$
$$x\cos\beta + y\sin\beta - q = \mathrm{Q} = 0,$$
$$x\cos\gamma + y\sin\gamma - r = \mathrm{R} = 0$$

les équations des polaires des sommets du triangle.

La conique donnée aura une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{P}} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}} = 0,$$

et, si l'on exprime les conditions de l'énoncé, on a immédiatement

$$A = B = C.$$

Nous allons donc identifier l'équation

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = 0$$

avec l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0.$$

On obtient ainsi

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & p(\cos\beta + \cos\gamma) \\ & + q(\cos\gamma + \cos\alpha) + r(\cos\alpha + \cos\beta) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & p(\sin\beta + \sin\gamma) \\ & + q(\sin\gamma + \sin\alpha) + r(\sin\alpha + \sin\beta) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta}{b^2} \\ & = \frac{\sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha + \sin\alpha\sin\beta}{a^2} \\ & = \frac{qr + rp + pq}{-a^2 b^2}. \end{aligned} \right.$$

Désignons par λ la valeur commune de ces trois rapports; cette valeur est facile à déterminer. En effet, les équations (4) donnent

$$(5) \quad \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = -\lambda c^2,$$

$$(6) \quad \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = \lambda(a^2 + b^2).$$

Si l'on ajoute les équations (3) et (5) élevées au carré, en tenant compte de l'équation (6), on a

$$c^4 \lambda^2 - 2(a^2 + b^2)\lambda - 3 = 0,$$

et il faut prendre la racine négative, car la racine positive rendrait l'expression $\lambda(a^2 + b^2)$, c'est-à-dire la somme des trois cosinus du premier membre de l'équation (6), supérieure à 3.

Donc

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 3c^4}}{c^4}.$$

Soient maintenant x_1 et y_1 les coordonnées du sommet M, pôle de la droite $R = 0$. On a évidemment

$$P_1 = Q_1 = -R_1$$

et, si l'on désigne par μ' la valeur de ces trois expressions,

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = p + \mu',$$
$$x_1 \cos\beta + y_1 \sin\beta = q + \mu',$$
$$x_1 \text{cas}\,\gamma + y_1 \sin\gamma = r - \mu'.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par

$$\cos\beta + \cos\gamma, \quad \cos\gamma + \cos\alpha, \quad \cos\alpha + \cos\beta$$

et ajoutons. Nous trouvons ainsi

$$\lambda b^2 x_1 = \mu' \cos\gamma.$$

En multipliant de nouveau par

$$\sin\beta + \sin\gamma, \quad \sin\gamma + \sin\alpha, \quad \sin\alpha + \sin\beta,$$

on trouve de même

$$\lambda a^2 y_1 = \mu' \sin\gamma.$$

Donc

$$\mu'^2 = \lambda^2 (b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2),$$

et comme, d'autre part,

$$\mu'^2 + \lambda (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2) = 0,$$

on a, pour l'équation du lieu de M,

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 + \lambda (a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2) = 0,$$

λ recevant la valeur déterminée plus haut.

Cette conique est extérieure à l'ellipse donnée. En effet, λ étant négatif, on a nécessairement

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 > 0.$$

J'obtiens de la même manière le lieu du point de concours H des hauteurs du triangle. Soient x_0, y_0 les coordonnées de ce point. Il est clair que $P_0 = Q_0 = R_0$, et, si l'on désigne par μ la valeur commune de ces trois expressions, on a immédiatement

$$(\varepsilon) \qquad 3\mu^2 = \lambda(a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2).$$

Multiplions par

$$\cos\beta + \cos\gamma,\ \cos\gamma + \cos\alpha,\ \cos\alpha + \cos\beta$$

les trois équations

$$\begin{aligned} x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha &= p + \mu,\\ x_0\cos\beta + y_0\sin\beta &= q + \mu,\\ x_0\cos\gamma + y_0\sin\gamma &= r + \mu,\end{aligned}$$

et ajoutons. Nous aurons, en tenant compte de (1), (2) et (3),

$$\lambda b^2 x_0 = \mu(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

On aurait de même, en multipliant par $\sin\beta + \sin\gamma, \ldots,$

$$\lambda a^2 y_0 = \mu(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

En élevant au carré ces deux dernières équations, les ajoutant et tenant compte des équations (4) et de la valeur de λ, on a

$$\mu^2 = \frac{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{c^4}.$$

Si l'on substitue dans l'équation (ε), on a le lieu du point H :

$$3(b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2) = c^4\lambda(a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2).$$

Cette conique est intérieure à l'ellipse donnée, puisque, λ étant négatif, on a nécessairement

$$a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 - a^2 b^2 < 0.$$

Lettre de M. A. Legoux, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Monsieur le Rédacteur,

A propos de la remarquable méthode d'intégration de l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde de M. A. Picart, permettez-moi de vous rappeler une autre méthode géométrique que j'ai donnée en 1878 et dont j'ai indiqué l'application au cas particulier actuel (*Étude analytique et géométrique d'une famille de courbes*, p. 18).

Voici en quelques mots l'esprit de cette méthode :

On remarque d'abord que l'équation différentielle

$$-xyp^2 + (y^2 - x^2 - b^2)p + xy = 0,$$

où

$$p = \frac{dy}{dx},$$

peut se mettre sous la forme

$$(py + x)(y - px) + b^2 p = 0.$$

Cela posé, on fait un changement de variables; on prend pour nouvelles variables x' et y', liées aux anciennes par les équations

$$x = p',$$
$$y = p'x' - y',$$
$$p' = \frac{dy'}{dx'}.$$

On voit sans peine que

$$p = x',$$
$$px - y = y'.$$

On sait que cette transformation revient à prendre la courbe transformée par polaires réciproques de la proposée relativement à la parabole

$$x^2 = 2y.$$

Le principe de cette transformation est dû à Monge (*voir* Chasles, *Aperçu historique*, p. 376).

L'équation différentielle proposée devient

$$-p'(x'^2+1)y' + x'y'^2 + b^2x' = 0,$$

que l'on rend linéaire en posant

$$y'^2 = u$$

et dont l'intégrale est

$$u = y'^2 = c(x'^2+1) - b^2:$$

c'est l'équation d'un système de coniques.

L'intégrale générale cherchée est l'équation des polaires réciproques de ces coniques relativement à la parabole

$$x^2 = 2y.$$

On trouve sans peine que cette équation est

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c-b^2} = 1;$$

elle représente des coniques homofocales.

Lettre de M. A. Hilaire, professeur au Lycée de Douai.

Monsieur le Rédacteur,

Voulez-vous me permettre, quoique je ne sois nullement en cause, de répondre à la réclamation de M. Mansion (1881, p. 143)?

Si l'on se reporte à l'article de M. Weill (1880, p. 255), la phrase citée par M. Mansion s'y trouve intercalée entre deux théorèmes; elle se termine en réalité par un point, et non, comme dans la citation, par deux points; elle s'applique donc au premier des deux théorèmes :

Si une conique est inscrite dans un triangle, et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une circonférence ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.

Or cette proposition, très connue, est due à Steiner, et elle a été seulement étendue à l'espace par M. Mention, professeur à Paris, et collaborateur des *Nouvelles Annales* jusqu'en 1867.

Je terminerai par deux indications bibliographiques :

1° On s'explique que M. Mention ait pu être regardé comme l'auteur du théorème de Géométrie plane, parce qu'il l'avait énoncé et démontré, sans en indiquer l'origine, à la fin d'un long article sur l'hyperbole équilatère (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 38).

2° Le théorème analogue de l'espace est ainsi conçu :

Si un ellipsoïde est inscrit à un système de six plans, et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une sphère.

M. Mention n'avait pas fait connaître la position du centre de la sphère par rapport aux six plans donnés : cette détermination a été faite par M. Paul Serret.

On peut consulter là-dessus trois articles de ce dernier auteur, qui ont paru dans l'année 1865 de votre Journal (p. 145, 193 et 433) et qui ont servi de préliminaires à la *Géométrie de direction*, ouvrage publié quatre ans plus tard, en 1869.

Note. — Les questions 1342 et 1357 ont été résolues par M. Pisani; et les questions 1348 et 1353 par M. Artemieff, à Saint-Pétersbourg.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 127

(voir 1re série, t. V, p. 448).

En rendant rationnelle l'équation

$$(a_1+x)^{\frac{1}{2}}+(a_2+x)^{\frac{1}{2}}+\ldots+(a_n+x)^{\frac{1}{2}}=0,$$

on parvient à une équation du degré 2^{n-2}.

Désignons, en général, par α_p l'expression $(a_p+x)^{\frac{1}{2}}$. M. Desboves démontre, dans ses *Questions d'Algèbre*, p. 217, le théorème suivant :

Théorème. — *Étant données n lettres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *on forme* 2^{n-1} *polynômes comme il suit : on écrit, à la suite de* α_1, *successivement* $+\alpha_2$ *et* $-\alpha_2$, *et l'on a ainsi les deux binômes* $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2$; *à la suite de* $\alpha_1+\alpha_2$ *et* $\alpha_1-\alpha_2$ *on écrit successivement* $+\alpha_3$ *et* $-\alpha_3$, *et l'on obtient ainsi quatre polynômes; on écrit à la suite des quatre polynômes successivement* $+\alpha_4$ *et* $-\alpha_4$, *et l'on obtient ainsi huit polynômes, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les lettres aient été employées. Si l'on fait alors le produit des* 2^{n-1} *derniers polynômes, on obtient une fonction symétrique de toutes les lettres élevées à des puissances paires.*

Si donc on multiplie le polynôme

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$$

qui forme le premier membre de l'équation donnée, et qui est un des polynômes énoncés dans le théorème précédent, par les $2^{n-1} - 1$ polynômes restants, on obtiendra une fonction où chaque lettre entrera à une puissance paire. En remplaçant alors α_p^2 par $a_p + x$, qui est du premier degré en x, le degré de chaque terme sera réduit à moitié, et le résultat sera du degré 2^{n-2}.

C'est du reste la méthode indiquée par M. Desboves, Ouvrage cité, p. 319. Ch. B.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 1195

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 144);

PAR M. MORET-BLANC.

Une pile de boulets à base carrée ou à base triangulaire ne contient jamais un nombre de boulets égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier. (E. Lucas.)

On sait que la somme ou la différence de deux cubes inégaux ne peut être égale à un cube, ni au double d'un cube. De même, la somme ou la différence des cinquièmes puissances de deux nombres inégaux ne peut être égale à une cinquième puissance, ni au double d'une cinquième puissance. 1 étant un cube, il en résulte que deux nombres entiers consécutifs ne peuvent être simultanément un cube et le double d'un cube, ou bien une cinquième puissance et le double d'une cinquième puissance, en exceptant 0 et 1.

Cela posé, considérons d'abord la pile à base triangulaire.

Je dis qu'on ne peut avoir en nombres entiers

$$n(n+1)(n+2) = 6m^3,$$

sauf le cas de $n = 1$.

En effet, les trois nombres n, $n+1$, $n+2$, n'ayant pas de facteur commun, sauf 2 si n est pair, devraient être l'un un cube, un autre le double d'un cube, et l'autre le triple d'un cube.

Or, d'après la remarque précédente, $n+1$ ne peut être un cube ou le double d'un cube; reste donc à supposer que $n+1$ soit le triple d'un cube. $n+1$ sera alors de l'une des formes $9k$, $9k+3$, $9k-3$, et l'on aura une des trois combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} n &= 9k-1, & 9k+2, && 9k-4, \\ n+1 &= 9k, & 9k+3, && 9k-3, \\ n+2 &= 9k+1, & 9k+4, && 9k-2. \end{aligned}$$

n et $n+2$ ne pourront être simultanément l'un un cube, l'autre le double d'un cube.

Donc, dans aucun cas, le nombre des boulets de la pile ne sera un cube, sauf le cas de $n=1$.

Il ne sera pas non plus une cinquième puissance.

Il faudrait, en effet, que $n+1$ fût le triple d'une cinquième puissance, et, en remarquant qu'une cinquième puissance est de l'une des formes $25k$, $25k\pm 1$, $25k\pm 7$, on aurait une des combinaisons

$$\begin{aligned} n+1 &= 25k, & 25k+3, && 25k-3, && 25k+4, && 25k-4, \\ n &= 25k-1, & 25k+2, && 25k-4, && 25k+3, && 25k-5, \\ n+2 &= 25k+1, & 25k+4, && 25k-2, && 25k+5, && 25k-3; \end{aligned}$$

n et $n+2$ ne seraient pas simultanément un cube et le double d'un cube.

Donc le nombre des boulets d'une pile à base triangulaire ne peut être un cube ni une cinquième puissance que si $n=1$.

Considérons maintenant une pile à base carrée, et voyons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1)=6m^3.$$

Si $2n+1$ est le triple d'un cube, on tombe dans un cas d'impossibilité déjà signalé.

Si $2n+1$ est un cube, il est de l'une des formes $9k$, $9k+1$, $9k-1$, et l'on a une des combinaisons

$$\begin{aligned} 2n+1 &= 9k, & 9k+1,\ & 9k-1, \\ n &= 9k+4, & 9k,\ & 9k-1, \\ n+1 &= 9k+5, & 9k+1,\ & 9k. \end{aligned}$$

Les deux autres nombres ne seront pas simultanément le triple et le double d'nn cube.

Examinons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1)=6m^5.$$

Si $2n+1$ est le triple d'une cinquième puissance, n et $n+1$ devraient être une cinquième puissance et le double d'une cinquième puissance, ce qui est impossible. Si $2n+1$ est une cinquième puissance, on aura l'une des combinaisons suivantes

$$\begin{aligned} 2n+1 &= 25k, & 25k+1,\ & 25k-1,\ & 25k+7,\ & 25k-7, \\ n &= 25k+12, & 25k,\ & 25k-1,\ & 25k+3,\ & 25k-4, \\ n+1 &= 25k+13, & 25k+1,\ & 25k,\ & 25k+4,\ & 25k-3, \end{aligned}$$

et l'on voit que n et $n+1$ ne seront pas simultanément le double et le triple d'une cinquième puissance.

Donc le nombre des boulets d'une pile à base carrée ne peut être une cinquième puissance ni le double d'une cinquième puissanee, sauf le cas d'un seul boulet.

Question 1328

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant données les équations

$$(1)\qquad 5x^2+5y^2-z^2+60x-24z=0,$$

$$(2)\qquad 25x^2+25y^2+z^2-15xz=0,$$

$$(3)\qquad 75x^2+75y^2+2z^2+5yz-45xz=0,$$

représentant des surfaces rapportées à un même système d'axes rectangulaires, on demande : 1° *de trouver le genre de chaque surface;* 2° *de trouver l'intersection des surfaces* (1) *et* (2); 3° *de trouver les projections sur les plans coordonnés de l'intersection des surfaces* (1) *et* (3). (ERNEST LEBON.)

1° L'équation (1) peut s'écrire

$$5(x+6)^2+5y^2-(z+12)^2=36;$$

elle représente un hyperboloïde à une nappe, de révolution autour d'un axe parallèle à Oz, et ayant son centre au point $x=-6$, $y=0$, $z=-12$; le rayon du cercle de gorge est égal à $\frac{6}{\sqrt{5}}$ et les génératrices font avec l'axe un angle dont la tangente est égale à $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Les équations homogènes (2) et (3) représentent des cônes du second degré ayant leurs sommets à l'origine.

Les trois surfaces passent par l'origine des coordonnées et sont coupées suivant des cercles par des plans parallèles au plan des xy.

2° En éliminant y entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation

$$(z+20)(2z-5x)=0;$$

elle représente le système de deux plans perpendiculaires au plan des xz et passant par l'intersection des deux surfaces. Le premier, parallèle au plan des xy, coupe les deux surfaces suivant un cercle,

$$z = -20, \quad (x+6)^2 + y^2 = 20;$$

le second les coupe suivant deux génératrices dont les projections sur le plan des xz se confondent,

$$z = \frac{5}{2} x,$$

et dont les projections sur le plan des xy ont pour équation

$$4y^2 - 5x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x.$$

3° Si, entre les équations (1) et (3), on élimine successivement y, x et z, on obtient les équations

$$\begin{aligned} &5z^2(5x^2 - z^2 + 60x - 24z) \\ &\quad + (17z^2 + 360z - 45xz - 960x)^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &z^2(17z + 5y + 360)^2 \\ &\quad + 108z(z+20)(17z + 5y + 360) \\ &\quad + 405(z+20)^2(5y^2 - z^2 - 24z) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 + 12x)(45x - 5y + 48)^2 \\ &\quad - 5(17x^2 + 17y^2 + 24x)^2 \\ &\quad - 24(17x^2 + 17y^2 + 24x)(45x - 5y + 48) = 0, \end{aligned}$$

qui représentent les projections de l'intersection des surfaces (1) et (3) sur les plans xOz, yOz et xOy.

Les deux premières ne renferment x et y respectivement qu'au second degré; on peut donc les résoudre par rapport à ces variables. La troisième ne renferme ni terme indépendant, ni terme du premier degré; en la transformant en coordonnées polaires, on aura une équation du second degré en ρ. La discussion et la construction de ces trois courbes ne présente d'autre difficulté que la longueur des calculs, résultant de la grandeur des coefficients; je ne m'y arrêterai pas.

Question 1330

(voir 2^e série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. S. REALIS.

Les nombres x, y, z étant exprimés par les formules

$$x = 2(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\alpha(2\beta + 3\gamma + 4\delta),$$
$$y = 2(-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\beta(2\alpha + 3\gamma + 4\delta),$$
$$z = 3(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 4\gamma(\alpha + \beta + 2\delta),$$

on peut énoncer les propriétés suivantes :

1° *L'expression*

$$x^2 + y^2 + z^2$$

se réduit à une somme de deux carrés.

2° *Pour des valeurs entières convenables de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tout nombre N, qui est égal à la somme de deux carrés entiers et à la somme de trois carrés entiers, peut être représenté par l'expression ci-dessus, dont les termes ont été préalablement débarrassés des facteurs communs inutiles.*

La proposition se relie à celles qui font l'objet d'un précédent article des *Nouvelles Annales* (¹) et se démontre de la même manière.

Les indéterminées x, y, z étant exprimées en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, comme il est dit dans l'énoncé, posons en outre

$$t = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2,$$
$$u = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 2\delta(2\alpha + 2\beta + 3\gamma).$$

(¹) *Développements sur quelques théorèmes d'Arithmétique* (voir 2^e série, t. XVIII, p. 500).

On aura, par identité, la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2,$$

c'est-à-dire une équation indéterminée dont toutes les solutions entières peuvent s'obtenir par les formules ci-dessus, moyennant des valeurs entières convenables attribuées à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. De là la proposition énoncée.

Voici quelques exemples :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 11, \quad \beta = 10, \quad \gamma = 14, \quad \delta = -15;\\ \quad 3^2 + 2^2 + 2^2 = 4^2 + 1^2 = 17;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 10, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 10 \quad \delta = -9;\\ \quad 4^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 = 18;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 14, \quad \beta = 13, \quad \gamma = 16, \quad \delta = -19;\\ \quad 4^2 + 3^2 + 1^2 = 5^2 + 1^2 = 26;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = 2, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 7, \quad \delta = -8;\\ \quad 6^2 + 2^2 + 1^2 = 5^2 + 4^2 = 41;\end{array}\right.$$

. . . .

La question proposée est ainsi résolue, puisque l'on a la solution complète de l'équation indéterminée d'où elle dépend. Quant aux preuves de la généralité absolue de la solution précédente, elles tiennent aux mêmes considérations qui se rapportent aux équations résolues dans l'article mentionné. Il en est de même quant aux moyens de déterminer les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ d'après des valeurs préalablement données de t, u, x, y, z. Nous n'insisterons donc pas ici sur ce sujet.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; Moret-Blanc; Marcello Rocchetti.

NOTE SUR LA GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE PAPPUS;

PAR M. H. RESAL.

L'illustre géomètre d'Alexandrie a énoncé le théorème suivant, dont la démonstration, si elle a été donnée, n'est pas parvenue jusqu'à notre époque :

Si trois mobiles placés aux sommets d'un triangle partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses proportionnelles à ces côtés, leur centre de gravité restera immobile.

Ce théorème, qui est tombé dans l'oubli malgré l'intérêt qu'il présente, est un cas particulier du suivant :

Soient $A_1A_2\ldots A_nA_1$ *un polygone fermé de* n *côtés, plan ou gauche,* m *la masse de chacun des* n *points matériels, partant en même temps des sommets* A_1, A_2, $\ldots$, A_n, *et dans le même sens, avec des vitesses constantes* $V_1, V_2, \ldots, V_n$, *proportionnelles aux côtés* $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$, $\ldots$, $a_n = A_nA_1$, *le centre de gravité des masses* m *reste fixe.*

Rapportons le système à trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz, et soient

x_i, y_i, z_i les coordonnées du sommet A_i;
x, y, z celles du centre de gravité du système des masses m au bout du temps t;
$V_i = ka_i$ la vitesse du mobile m_i qui part du sommet A_i, en désignant par k une constante.

L'ordonnée parallèle à Ox du mobile m_i au bout du temps t étant

$$x_i + k a_i \cos\left(\widehat{a_i, x}\right) \times t,$$

on a, en prenant les moments par rapport au plan $y O z$,

$$x \Sigma m = m \sum_{i=1}^{i=n} \left[x_i + k a_i \cos\left(\widehat{a_i, x}\right) \times t \right]$$

ou

$$x \Sigma m = m \Sigma x_i + k t \Sigma_{i=1}^{i=n} a_i \cos\left(\widehat{a_i, x}\right).$$

Comme le polygone est fermé, le second terme du second membre de cette égalité est nul ; d'ailleurs, $\Sigma m = nm$; par suite,

$$x = \frac{1}{n} \Sigma x_i,$$

et de même

$$y = \frac{1}{n} \Sigma y_i,$$

$$z = \frac{1}{n} \Sigma z_i,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

SUR L'EXPRESSION DU VOLUME DE CERTAINS TÉTRAÈDRES;

Par M. H. FAURE,
Chef d'escadron d'Artillerie.

1. Si l'on désigne par a, b, c, d; a', b', c', d' les sommets de deux tétraèdres, on a la relation suivante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'bcd & a'cda & a'dab & a'abc \\ b'bcd & b'cda & b'dab & b'abc \\ c'bcd & c'cda & c'dab & c'abc \\ d'bcd & d'cda & d'dab & d'abc \end{vmatrix} = (abcd)^3 . a'b'c'd',$$

entre les volumes des divers tétraèdres que l'on peut former en joignant les sommets du premier à ceux du second.

Ce théorème, que j'avais proposé en question, a été démontré dans ce Journal.

II. Supposons qu'il existe entre les volumes de ces tétraèdres les relations

$$\frac{a'bcd}{l} = \frac{a'cda}{m} = \frac{a'dab}{n} = \frac{a'abc}{p},$$
$$\frac{b'bcd}{l'} = \frac{b'cda}{m'} = \frac{b'dab}{n'} = \frac{b'abc}{p'},$$
$$\frac{c'bcd}{l''} = \frac{c'cda}{m''} = \frac{c'dab}{n''} = \frac{c'abc}{p''},$$
$$\frac{d'bcd}{l'''} = \frac{d'cda}{m'''} = \frac{d'dab}{n'''} = \frac{d'abc}{p'''}.$$

De la première nous déduisons

$$\frac{a'bcd}{l} = \frac{a'cda}{m} = \frac{a'dab}{n} = \frac{a'abc}{p} = \frac{abcd}{l+m+n+p}.$$

Les trois autres donnent des résultats analogues, de sorte que, si dans le déterminant Δ nous remplaçons tous les volumes par leurs valeurs en fonction de *abcd* et des coefficients l, m, n, ..., nous trouverons, en représentant par P, P′, P″, P‴ les sommes $l+m+n+p, \ldots$,

$$\begin{vmatrix} l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \\ l'' & m'' & n'' & p'' \\ l''' & m''' & n''' & p''' \end{vmatrix} \frac{abcd}{\mathrm{P}.\mathrm{P}'.\mathrm{P}''.\mathrm{P}'''} = a'b'c'd'.$$

Les quantités l, m, n, p, ... sont susceptibles de signes, car on doit avoir en même temps

$$a'bcd + a'cda + a'dab + a'abc = abcd,$$
$$l + m + n + p = \mathrm{P}.$$

Si les points a', b', c', d' sont sur les faces A, B, C, D, on a, dans l'espace, le théorème correspondant à la question 1353.

III. Supposons que les points a', b', c', d' soient pris respectivement sur les faces A, B, C, D du tétraèdre $abcd$. Nous aurons

$$a'bcd = 0, \qquad a'cda = \frac{a'cd(a, A)}{3},$$
$$a'dab = \frac{a'db(a, A)}{3}, \quad a'abc = \frac{a'bc(a, A)}{3},$$

et des expressions analogues pour les autres éléments du déterminant Δ. Notre premier théorème devient donc celui-ci :

Un tétraèdre $abcd$ étant donné, si l'on prend sur ses faces les points a', b', c', d' et que l'on désigne par A, B, C, D *les aires des faces de ce tétraèdre, on aura*

$$\begin{vmatrix} 0 & a'cd & a'db & a'bc \\ b'cd & 0 & b'da & b'ac \\ c'bd & c'da & 0 & c'ab \\ d'bc & d'ca & d'ab & 0 \end{vmatrix} = \frac{a'b'c'd'}{abcd}\,\mathrm{A.B.C.D.}$$

Si, en particulier, les points a', b', c', d' sont les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre $abcd$ sur ses faces, les triangles qui figurent dans le déterminant sont les projections de trois des faces sur la quatrième, et l'on obtient le résultat indiqué par M. Genty (question 1355).

IV. Joignons un point quelconque o aux sommets a, b, c, d et prenons sur ces droites respectivement les points a', b', c', d'. Ces points formeront un tétraèdre $a'b'c'd'$, homologique au tétraèdre $abcd$. Si l'on désigne par V' le volume de ce tétraèdre, par V_a, V_b, V_c, V_d les volumes des tétraèdres qui ont pour sommet commun le point o, et pour bases les faces A, B, C, D du tétraèdre $abcd$, on a la relation

$$(1)\quad V' = \frac{oa'.ob'.oc'.od'}{oa.ob.oc.od}\left(\frac{oa}{oa'}V_a + \frac{ob}{ob'}V_b + \frac{oc}{oc'}V_c + \frac{od}{od'}V_d\right).$$

En effet, si l'on désigne par V'_a, V'_b, V'_c, V'_d les volumes des tétraèdres ayant pour sommet commun le point o et pour bases les faces du tétraèdre $a'b'c'd'$, on a l'égalité évidente

$$V' = \frac{V'_a}{V_a}V_a + \frac{V'_b}{V_b}V_b + \frac{V'_c}{V_c}V_c + \frac{V'_d}{V_d}V_d.$$

Or, les tétraèdres V_a, V'_a ayant en commun les trois arêtes qui se coupent au point o,

$$\frac{V'_a}{V_a} = \frac{ob'.oc'.od'}{ob.oc.od};$$

de même,

$$\frac{V'_b}{V_b} = \frac{oa'.oc'.od'}{oa.oc.od}, \quad \frac{V'_c}{V_c} = \frac{oa'.ob'.od'}{oa.ob.od}, \quad \frac{V'_d}{V_d} = \frac{oa'.ob'.oc'}{oa.ob.oc}.$$

De là résulte la relation que nous voulions établir.

Si les points a', b', c', d' sont sur les faces A, B, C, D, on aura

$$\frac{oa}{oa'} = 1 - \frac{aa'}{oa'} = 1 - \frac{V}{V_a}, \quad \frac{ob}{ob'} = 1 - \frac{V}{V_b}, \quad \ldots,$$

en appelant V le volume $abcd$; l'égalité (1) devient

$$V' = -\frac{3VV_aV_bV_cV_d}{(V-V_a)(V-V_b)(V-V_c)(V-V_d)}.$$

Dans cette relation, on doit donner aux volumes V_a, V_b, V_c, V_d des signes tels que leur somme soit égale à V.

En particulier, si le point o est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre *abcd*, on aura

$$V' = -\frac{3V.A.B.C.D}{(S-A)(S-B)(S-C)(S-D)},$$

en posant

$$S = A + B + C + D.$$

C'est, à un facteur numérique près (— 3 au lieu de 6), le résultat indiqué par M. Genty (question 1352, Ire Partie).

V. L'expression (1) que nous venons de trouver pour le volume du tétraèdre $a'b'c'd'$, homologique du tétraèdre *abcd*, peut se mettre sous une autre forme. Si par le point o nous menons des plans parallèles aux faces $b'c'd'$, $c'd'a'$, $d'a'b'$, $a'b'c'$, ces plans rencontrent les faces correspondantes *bcd*, *cda*, *dab*, *abc* du tétraèdre *abcd*, suivant quatre droites qui appartiennent à un même plan I, parallèle au plan d'homologie.

Mais, d'après une propriété connue des figures homologiques, si l'on désigne par k la distance du plan I au plan d'homologie, on a

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{(a, \mathrm{I})}{k}, \quad \frac{ob}{ob'} = \frac{(b, \mathrm{I})}{k}, \quad \frac{oc}{oc'} = \frac{(c, \mathrm{I})}{k}, \quad \frac{od}{od'} = \frac{(d, \mathrm{I})}{k}.$$

D'ailleurs,

$$V(o, \mathrm{I}) = V_a(a, \mathrm{I}) + V_b(b, \mathrm{I}) + V_c(c, \mathrm{I}) + V_d(d, \mathrm{I});$$

donc

$$\frac{(o, \mathrm{I})}{k} = \frac{\frac{oa}{oa'}V_a + \frac{ob}{ob'}V_b + \frac{oc}{oc'}V_c + \frac{od}{od'}V_d}{V}.$$

L'expression (1) devient ainsi

$$a'b'c'd' = \frac{k^3(o, \mathrm{I})V}{(a, \mathrm{I})(b, \mathrm{I})(c, \mathrm{I})(d, \mathrm{I})}.$$

VI. Dans le déterminant Δ, remplaçons les volumes par les valeurs

$$\begin{aligned} a'bcd &= \tfrac{1}{3}\mathrm{A}(a', \mathrm{A}),\\ a'cda &= \tfrac{1}{3}\mathrm{B}(a', \mathrm{B}),\\ a'dab &= \tfrac{1}{3}\mathrm{C}(a', \mathrm{C}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

nous obtenons la relation

$$\begin{vmatrix} (a', \mathrm{A}) & (a', \mathrm{B}) & (a', \mathrm{C}) & (a', \mathrm{D}) \\ (b', \mathrm{A}) & (b', \mathrm{B}) & (b', \mathrm{C}) & (b', \mathrm{D}) \\ (c', \mathrm{A}) & (c', \mathrm{B}) & (c', \mathrm{C}) & (c', \mathrm{D}) \\ (d', \mathrm{A}) & (d', \mathrm{B}) & (d', \mathrm{C}) & (d', \mathrm{D}) \end{vmatrix} = \frac{(3\mathrm{V})^3 . 3\mathrm{V}'}{\mathrm{A.B.C.D}},$$

qui se trouve dans mon Mémoire sur les indices (n° 87).

VII. D'un point o on abaisse les perpendiculaires oa', ob', oc', od' sur les faces du tétraèdre $abcd$; si l'on désigne par V′ le volume du tétraèdre $a'b'c'd'$, par V celui du tétraèdre $abcd$, et par A, B, C, D les aires de ses faces,

$$\mathrm{V}' = \frac{3\mathrm{V}^2}{4\mathrm{ABCD}}\, oa'.ob'.oc'.od'\left(\frac{\mathrm{A}}{oa'} + \frac{\mathrm{B}}{ob'} + \frac{\mathrm{C}}{oc'} + \frac{\mathrm{D}}{od'}\right).$$

En effet, le volume V′ est la somme algébrique de quatre tétraèdres ayant pour sommet commun le point o et pour bases les triangles $b'c'd'$, $c'd'a'$, $d'a'b'$, $a'b'c'$.

Or

$$6\, b'c'd' = ob'.oc'.od' \sin b'od' \sin(oc', b'od').$$

Mais

$$\sin b'od' = \sin \mathrm{BD}, \quad \sin(oc', b'od') = \sin(oc, \mathrm{C});$$

par conséquent,

$$6\, b'c'd' = ob'.oc'.od' \sin \mathrm{BD} \sin(oc, \mathrm{C}) = ob'.oc'.od' \frac{(3\mathrm{V})^2}{2\mathrm{BCD}}.$$

On a des expressions analogues pour les valeurs des autres tétraèdres qui composent le volume V'. De là résulte la relation indiquée.

Lorsque, en particulier, le point o est le centre d'une sphère inscrite au tétraèdre V, les distances oa', ob', oc', od' sont égales au rayon r de cette sphère, et l'on trouve

$$V' = \frac{9r^2V^3}{4A.B.C.D}.$$

C'est la seconde des relations indiquées dans la question 1352.

VIII. Cette relation peut aussi se déduire du théorème suivant, que nous avons proposé en question, et qui a été démontré dans les *Nouvelles Annales* :

Lorsque deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface du second degré, le volume de l'un est égal au cube du volume de l'autre, divisé par trente-six fois le produit des quatre tétraèdres qui ont pour bases les faces de ce dernier et pour sommet commun le centre de la surface, multiplié par le carré du produit des demi-axes de cette surface.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. V. JAMET,

Professeur au lycée de Nice.

I. Dans un travail récemment publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* M. Amigues a étudié une classe de surfaces qu'il a désignées sous le nom de *girocyclides*. Ces surfaces, engendrées par des cercles passant par deux points fixes, admettent ces cercles pour lignes de courbure de la première série, et pour lignes de courbure de la seconde série, des courbes sphériques. Elles peuvent, en outre, être considérées comme des enveloppes de sphères passant par deux points fixes, et dont le centre se meut sur une courbe plane dont le plan est perpendiculaire à la ligne qui joint les deux points fixes et passe par son milieu. Ce sont ces surfaces que l'on obtient en transformant les surfaces coniques par rayons vecteurs réciproques.

Parmi ces surfaces, M. Amigues considère en particulier celles du quatrième ordre, et montre qu'on obtient de pareilles surfaces quand on cherche l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur une conique et qui passe par deux points fixes symétriques par rapport au plan de cette conique. Ces surfaces correspondent aux cônes du second ordre. Je me propose, dans ce travail, de déduire des propriétés des cônes du second ordre quelques propriétés des girocyclides du quatrième ordre.

II. Vérifions d'abord qu'à toute girocyclide correspond un cône. Prenons pour axe des z la droite qui joint les deux points fixes (réels ou imaginaires conjugués) par lesquels passent les lignes de courbure de la première série, et pour plan des xy le plan mené perpendiculairement à cette droite par le milieu de la distance des deux points. Soit $2c$ la demi-distance de ces points; c peut être de la forme $\alpha\sqrt{-1}$, mais c^2 est toujours une quantité réelle.

Soient les deux sphères

$$(1)\qquad x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-c^2=0$$

et

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2-2m'x-2n'y-c^2=0;$$

lorsque m, n, m', n' varient d'après une loi donnée, l'intersection de ces deux sphères engendre la girocyclide. Changeons, dans ces équations,

$$x \text{ en } \frac{k^2\xi}{\xi^2+\eta^2+(\zeta-c)^2},$$

$$y \text{ en } \frac{k^2\eta}{\xi^2+\eta^2+(\zeta-c)^2},$$

$$z \text{ en } c+\frac{k^2(\zeta-c)}{\xi^2+\eta^2+(\zeta-c)^2};$$

elles deviennent

$$(3) \qquad k^2-2m\xi-2n\eta+2c(\zeta-c)=0,$$

et

$$(4) \qquad k^2-2m'\xi-2n'\eta+2c(\zeta-c)=0.$$

Si, dans ces équations, on considère ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes, elles représentent deux plans passant par le point $\left(\xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=\frac{2c^2-k^2}{2c}\right)$, et, lorsque m, n, m', n' varient d'après une loi donnée, leur intersection décrit un cône (réel ou imaginaire).

Réciproquement, si dans les équations (3) et (4) on change

$$\xi \text{ en } \frac{k^2x}{x^2+y^2+(z-c)^2},$$

$$\eta \text{ en } \frac{k^2y}{x^2+y^2+(z-c)^2},$$

$$\zeta \text{ en } c+\frac{k^2(z-c)}{x^2+y^2+(z-c)^2},$$

on retombe sur les équations (1) et (2).

Donc, à toute girocyclide correspond un cône, et réciproquement. Les génératrices du cône correspondent aux cercles générateurs de la girocyclide.

Remarquons en outre que, quel que soit k, pour une même détermination de m, n, m', n', toutes les droites représentées par les équations (3) et (4) ont la même direction. Donc tous les cônes transformés sont égaux. En particulier, ils sont égaux au cône tangent à la surface au point singulier dont les coordonnées sont o, o et c, car, pour $k = 0$, les équations (3) et (4) représentent les plans tangents aux sphères (1) et (2) en ce point.

Ils sont, de plus, symétriques du cône tangent au point (o, o, $-c$), par rapport à un plan parallèle au plan des xy.

III. Voyons maintenant à quoi correspondent les lignes de courbure de la deuxième série. D'après un théorème connu, ce sont les transformées des lignes de courbure de la deuxième série du cône, et celles-ci sont les intersections du cône avec des sphères de rayon arbitraire, ayant pour centre le sommet du cône. Il est facile de le vérifier analytiquement.

D'après un théorème démontré par M. Amigues, les lignes de courbure de la deuxième série sont situées sur des sphères dont l'équation générale est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hz + c^2 = 0,$$

h étant un paramètre arbitraire.

Cette équation peut s'écrire

$$x^2 + y^2 + (z-c)^2 + 2(c-h)(z-c) + 2c(c-h) = 0.$$

Si l'on y fait la transformation indiquée, il vient

$$k^4 + 2k^2(c-h)(\zeta - c) + 2c(c-h)[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2] = 0.$$

Si h varie, cette équation représentera une série de sphères dont le centre sera sur l'axe des z, et à une distance de l'origine égale à $\dfrac{2c^2 - k^2}{2c}$; ce sont bien les sphères définies précédemment.

IV. Une girocyclide du quatrième ordre, rapportée, comme l'a fait M. Amigues, au centre et aux axes de la conique que décrit le centre de la sphère enveloppée, a pour équation

$$(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2)^2 = 4A(x-a)^2+4B(y-b)^2$$

ou bien

$$\begin{gathered}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2a(x-a)+2b(y-b)+2c(z-c)]^2 \\ = 4A(x-a)^2+4B(y-b)^2.\end{gathered}$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point (a, b, o), cette équation devient

$$\begin{gathered}[x^2+y^2+(z-c)^2+2ax+2by+2c(z-c)]^2 \\ = 4Ax^2+4By^2,\end{gathered}$$

et, si l'on effectue sur cette dernière équation la transformation indiquée, il vient

$$[k^2+2a\xi+2b\eta+2c(\zeta-c)]^2 = 4A\xi^2+4B\eta^2,$$

équation qui représente un cône du second ordre.

(*A suivre.*)

QUESTION DE LICENCE

(MONTPELLIER. — NOVEMBRE 1879);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

On donne un cylindre droit vertical dont la base est un cercle de centre O *et de rayon* a. *Une courbe tracée sur ce cylindre jouit de la propriété que,* M *désignant un point de cette courbe et* MI *la tangente correspondante, la projection du rayon vecteur* $OM = r$ *sur cette tangente est constante et égale à une ligne* *donnée k. Le point* M *est défini par l'ordonnée verticale z et par l'angle ω que la projection horizontale* OP *de* OM *forme avec le rayon fixe* OA.

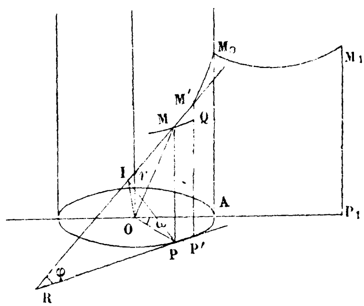
On propose de :

1° *Trouver la relation finie qui existe entre z et ω, ou, si l'on préfère, exprimer ces coordonnées en fonction d'une variable auxiliaire;*

2° *Trouver, en fonction de z, l'expression s de l'arc de la courbe;*

3° *Calculer l'aire cylindrique comprise entre deux génératrices données et les arcs qu'elles interceptent sur la courbe et sur le cercle de base.*

1° Désignons par φ l'angle MRP que fait la tangente à la courbe avec la tangente PR au cercle de base. OI



étant la perpendiculaire abaissée du centre O sur MR, la droite PI sera aussi perpendiculaire sur MR et l'angle MPI sera égal à l'angle φ. On aura donc

$$z = \frac{k}{\sin\varphi}. \tag{1}$$

Considérons maintenant un point M' de la courbe infiniment voisin de M, et un arc de cercle MQ parallèle au cercle de base et rencontrant en Q l'ordonnée M'P'.

Le triangle rectangle infiniment petit MM′Q nous donnera

$$MQ = PP' = a\,d\omega = dz \cot\varphi,$$

ou, en remplaçant $\cot\varphi$ par sa valeur tirée de (1),

$$(2) \qquad a\,d\omega = \frac{1}{k}\sqrt{z^2 - k^2}\,dz,$$

d'où

$$a\omega = \frac{z\sqrt{z^2-k^2}}{2k} - \frac{k}{2}\log\left(z + \sqrt{z^2-k^2}\right) + C.$$

2° Le même triangle rectangle donne

$$ds = \frac{dz}{\sin\varphi},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$ds = \frac{1}{k}\,z\,dz,$$

d'où

$$s = \frac{1}{2k}z^2 + C.$$

3° Coupons le cylindre suivant la génératrice AM_0 et développons-en la surface sur un plan passant par cette génératrice; l'aire AM_0MP que nous voulons calculer se placera en $AM_0M_1P_1$, de telle sorte que $AP_1 = a\omega$ et $M_1P_1 = z$; en la désignant par A, nous aurons

$$\begin{aligned} A = \int_0^{a\omega} a\,z\,d\omega &= \int_{z_0}^{z} \frac{z}{k}\sqrt{z^2-k^2}\,dz \\ &= \frac{1}{3k}\left[(z^2-k^2)^{\frac{3}{2}} - (z_0^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel, qui a également résolu la question de licence (même Tome, p. 55).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1880).

COMPOSITION DU 9 AOUT.

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde, et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan Q.

1° Le sommet du cône se déplaçant dans un plan donné P, trouver le lieu décrit par le pôle du plan Q par rapport à l'ellipsoïde.

2° Ce lieu est une surface du second degré Σ : on demande de déterminer les positions du plan P pour lesquelles le cône asymptote de cette surface Σ a trois génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

3° Le plan P se déplaçant de façon que la surface Σ satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans ces surfaces Σ par un plan fixe R perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.

4° Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan R se déplace parallèlement à lui-même.

COMPOSITION DU 10 AOUT.

Mathématiques élémentaires.

On donne le côté a d'un triangle ABC, la somme l des deux autres côtés, la somme K^2 des carrés des bissectrices, soit des angles intérieurs adjacents au côté a, soit des angles extérieurs adjacents au même côté, et l'on demande de calculer les deux autres côtés b et c.

On examinera le cas particulier où $l = 4a$, et, dans ce cas, on discutera complètement les deux problèmes en laissant a fixe et en faisant varier K^2.

COMPOSITION DU 11 AOUT.

Théorie.

1° Définir les lignes de courbure et établir leur équation différentielle.

2° Former l'équation qui donne les rayons de courbure principaux en un point d'une surface donnée; établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette équation ait deux racines égales.

Application.

Soient u une fonction donnée d'une variable α et u' sa dérivée. Soit $\varphi(\beta)$ une fonction donnée d'une autre variable β. On considère une surface S telle que les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un quelconque de ses points s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} x &= (u + \beta)\cos\alpha - u'\sin\alpha, \\ y &= (u + \beta)\sin\alpha + u'\cos\alpha, \\ z &= \varphi(\beta). \end{aligned}$$

1° Démontrer que les projections, sur le plan xOy, des sections de la surface par des plans parallèles au plan xOy ont même développée.

2° Démontrer que les normales à la surface S aux différents points d'une quelconque de ces sections forment une surface développable, et déterminer l'arête de rebroussement de cette surface.

3° Trouver les lignes de courbure de la surface S et les rayons de courbure principaux en un quelconque de ses points.

Géométrie descriptive.

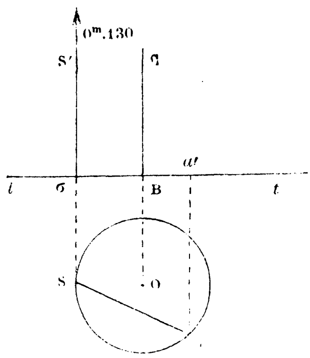
Intersection d'un cône et d'un paraboloïde hyperbolique ayant une génératrice commune.

Données.

Cône. — La base du cône est un cercle situé dans le plan horizontal et ayant pour centre le point O.

Distance du centre O au bord droit du cadre.	$0^m,100$
Distance OB du centre O à la ligne de terre..	0,095
Rayon du cercle..........................	0,080

Le sommet est projeté horizontalement en S, sur le



diamètre du cercle de base parallèle à la ligne de terre, et verticalement en un point S' tel que $S'\sigma = 0^m,130$.

Paraboloïde. — Il a pour plan directeur le plan horizontal, pour directrices :

1° La verticale OBC passant par le centre O du cercle base du cône;

2° La génératrice SA du cône dont la projection horizontale fait avec la ligne de terre un angle de 30°.

On limitera le cône au plan horizontal de projection et à un second plan horizontal situé au-dessus du sommet S, à une distance de ce point égale à $0^m,045$.

On devra construire le point de la section situé sur la génératrice commune SA, le point où la projection verticale de cette section rencontre son asymptote, ainsi que la tangente en ce point.

Pour distinguer les parties vues des parties cachées, on regardera le cône comme solide et on supposera le paraboloïde enlevé.

Les candidats joindront à l'épure, sur une feuille séparée, une explication sommaire de la méthode employée et des constructions effectuées.

Composition sur un sujet de licence.

Première question.

Intégrer les équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{dt} = ax + b''y + b'z,$$

$$\frac{dy}{dt} = b''x + a'y + bz,$$

$$\frac{dz}{dt} = b'x + by + a''z,$$

où a, a', a'', b, b', b'' sont des constantes réelles données, et x, y, z des fonctions inconnues de la variable t.

Deuxième question.

On considère un axe vertical Oz, autour duquel tourne, d'après une loi déterminée, mais inconnue, un tube rectiligne OA, de section infiniment petite, qui rencontre l'axe fixe en O et fait avec lui un angle constant θ; dans l'intérieur du tube peut se mouvoir sans frottement un point pesant M.

1° On demande quelles doivent être, d'une part, la loi de la rotation du tube, de l'autre, les circonstances initiales du mouvement, pour que la distance r du point M au point fixe O soit, à chaque instant t, donnée par la formule

$$r = k(t + \alpha)^2,$$

K et α étant des constantes positives données.

2° Conservant pour le mouvement de rotation du tube la loi précédemment trouvée, ne faisant d'ailleurs aucune hypothèse sur les circonstances initiales, on demande d'étudier le mouvement du point pesant dans le tube.

Calcul.

Étant donnée l'équation

$$z^4 - z + 1 = 0,$$

1° Démontrer qu'elle a toutes ses racines imaginaires;

2° Calculer la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ pour chacune de ces racines. En posant $z = x + yi$, on verra que le problème dépend de la recherche d'une des racines d'une équation du troisième degré; on calculera cette racine à l'aide des Tables trigonométriques avec le degré d'approximation qu'elles comportent.

Mathématiques spéciales. (*Leçons.*)

1° Équation du plan tangent. — Application aux surfaces du second ordre.

2° Exposer quelques-unes des méthodes à l'aide desquelles on reconnait la nature d'une surface du second degré donnée par son équation.

3° Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes. (Première leçon.)

4° Étant donnée une fonction d'une seule variable, reconnaître au moyen de sa dérivée si elle est croissante ou décroissante. — En déterminer les maxima et les minima.

5° Définition de la fonction a^x. — Étude de cette fonction.

6° $\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m devient infini.

7° Théorème de Rolle. — Son usage pour la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

8° Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

9° Résolution *algébrique* de l'équation

$$x^3+px+q=0.$$

Discussion.

10° Plans diamétraux dans les surfaces du second degré.

11° Intersection de deux courbes du second degré. (On ramènera la question à l'étude d'une équation du troisième degré.)

12° Transformation des équations algébriques. (Exemples.)

13° Premières leçons sur les séries.

14° Discussion de l'équation du second degré à deux variables. (Géométrie analytique.)

15° Tangentes et asymptotes en coordonnées polaires.

16° Théorème de Sturm.

17° Conditions pour que l'équation du second degré à trois variables représente une surface de révolution. (Exemples.)

18° Règle des signes de Descartes.

19° Étant donnée l'équation générale d'une ellipse ou d'une hyperbole, déterminer les axes de la courbe en grandeur et en position.

Étant donnée l'équation générale d'une parabole, déterminer son axe en position et la grandeur du paramètre.

20° Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la courbe d'intersection a des branches infinies. (Géométrie descriptive.)

21° Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe. (Géométrie descriptive.)

22° Section plane de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, dans le cas où la courbe est une hyperbole. (Géométrie descriptive.)

Mathématiques élémentaires. (*Leçons.*)

1° Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2° Figures symétriques par rapport à un axe, par rapport à un point, par rapport à un plan.

3° Maximum et minimum de l'expression

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

4° Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Fractions décimales périodiques.

5° Mesure des angles.

6° Volume de la sphère et du segment sphérique.

7° Résolution des équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

Discussion.

8° Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

9° Plus grand commun diviseur, et plus petit multiple de plusieurs nombres entiers.

10° Recherche du rapport de la circonférence au diamètre (méthode des isopérimètres).

11° Angles trièdres. — Trièdres supplémentaires. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse construire un trièdre avec trois faces données, ou avec trois dièdres donnés. (Géométrie élémentaire.)

12° Racine carrée d'un nombre entier à une unité près. — Racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire avec une approximation donnée.

13° Relations entre les angles et les côtés d'un triangle. (Trigonométrie.)

14° Parabole. (Géométrie élémentaire.)

15° Équation bicarrée. — Transformation des expressions de la forme $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ en une somme, ou en une différence de deux radicaux simples.

16° Division des nombres entiers.

17° Division des polynômes.

18° Propriétés élémentaires des nombres premiers. — Décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

19° Rabattements. — Changements de plan. Rotation.

20° Distance d'un point à un plan, à une droite. — Plus courte distance des deux droites. (Geométrie descriptive.)

21° Mesure de la pyramide et du tronc de pyramide à bases parallèles.

22° Étude des variations du trinôme $ax^2 + bx + c$.

23° Tangentes à l'ellipse. — Problèmes qui s'y rapportent.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, SECTION DES SCIENCES (CONCOURS DE 1881).

COMPOSITION DU 27 JUIN.

Mathématiques.

On considère la courbe du troisième ordre

$$27y^2 = 4x^3:$$

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et n pour que la droite

$$y = mx + n$$

soit tangente à cette courbe.

2° On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2axy = B.$$

3° Par un point A pris sur la courbe on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables M, M′. On demande le lieu du milieu du segment MM′. Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points M, M′ sont réels.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES EN 1880.

PREMIÈRE SESSION. — ÉPREUVES ÉCRITES.

I. — *Géométrie analytique.*

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, et sur Ox un point A, sur Oy un point B. On mène par le point A une droite quelconque AR, de coefficient angulaire m.

1° Former l'équation de l'hyperbole H, qui est tangente à l'axe Ox au point O, qui passe par le point B, et pour laquelle la droite AR est une asymptote.

2° On fait varier m, et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en B à l'hyperbole H et de l'asymptote AR.

3° On considère le cercle circonscrit au triangle AOB; ce cercle coupe l'hyperbole H aux points O et B et en deux autres points P et Q. Former l'équation de cette droite PQ; puis, faisant varier m, trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite PQ avec les parallèles menées par le point O, soit à l'asymptote AR, soit à la seconde asymptote de l'hyperbole H.

II. — *Géométrie descriptive.*

Une sphère donnée, dont le rayon est égal à $0^m,090$, touche les deux plans de projection à $0^m,100$ du bord gauche du cadre.

Dans le plan du petit cercle de front, distant de $0^m,120$ du plan vertical de projection, à la droite du centre de ce cercle et à une distance de ce centre égale à la moitié du rayon du même petit cercle, on mène une verticale; sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection, on construit un triangle équilatéral. Ce triangle, en tournant autour de cette verticale, engendre un double cône. — On demande de représenter la sphère donnée, supposée pleine et opaque, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le double cône.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne commune à la sphère et à l'un des cônes, et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Sphère entaillée par un double cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^{m},190$ du petit côté inférieur.

III. — *Triangle.*

Étant donnés dans un triangle ABC,

$$a = 32578^{m},29,$$
$$b = 54805^{m},73,$$
$$C = 112^{\circ}\,35'\,28'',15,$$

calculer A, B, c et l'aire du triangle.

IV. — *Physique et Chimie.*

1. On pèse un ballon préalablement rempli d'air sec, à 0° et sous la pression $H_0 = 754^{mm},66$; soit P son poids. On fait le vide dans ce ballon, ramené à 0°, et, après avoir noté la pression de l'air restant, $h_0 = 7^{mm}$, on le pèse de nouveau; soit p son poids.

Le poids de l'air enlevé par la machine, $P - p$, est de $12^{gr},5727$.

On demande de calculer :

1° Le poids de l'air qui remplirait le ballon à 0° et sous la pression de 760^{mm} ;

2° Le poids de l'acide carbonique qui remplirait le même ballon dans les mêmes conditions de température et de pression (0° et 760^{mm}) ;

3° Le poids de l'acide carbonique qui sortirait du ballon si l'on ouvrait le robinet dont il est muni, après l'avoir plongé dans la vapeur d'eau bouillante, à la température de $99°,94$, la pression extérieure étant alors de $758^{mm},53$.

Densité de l'acide carbonique....	$\delta = 1,52901$
Coefficient de dilatation de l'acide carbonique..............	$\alpha = 0,003719$
Coefficient de dilatation du verre.	$k = 0,0000276$.

2. Propriétés principales et préparation de l'hydrogène protocarboné.

Calculer le volume d'hydrogène protocarboné que l'on peut brûler avec 1800^{gr} d'oxygène.

$$\text{Équivalents} \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} C = 6 \\ H = 1 \\ O = 8 \end{array} \right.$$

Densité de l'hydrogène protocarboné..	$\delta = 0,559$
Poids d'un litre d'air à 0° et sous la pression de 760^{mm}	$1^{gr},293$.

SECONDE SESSION. — ÉPREUVES ÉCRITES.

I. — *Géométrie analytique.*

1° Écrire l'équation générale des paraboles passant par deux points donnés A et B et dont les diamètres ont une direction donnée.

2° Donner l'expression des coordonnées du sommet et du foyer de chacune de ces paraboles.

3° On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite AB : trouver le lieu des points de contact et construire ce lieu.

Notations. — La ligne AB étant prise pour axe des y et une perpendiculaire à cette ligne pour axe des x, on fera $AB = 2a$ et on appellera m le coefficient angulaire de la direction des diamètres des paraboles considérées.

II. — *Géométrie descriptive.*

Par un point (ω, ω') situé dans le premier dièdre, à $0^{m},100$ de chacun des plans de projection et au milieu de la feuille, on conduit une parallèle à la ligne de terre et une verticale.

La parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un tore dont le cercle méridien, tangent à cet axe en (ω, ω'), a $0^{m},045$ de rayon.

La verticale est l'axe d'un autre tore *concentrique* au premier, dont le rayon du cercle méridien, égal à celui de son collier, vaut $0^{m},030$.

On demande de construire les deux projections de l'intersection des surfaces ainsi définies.

Dans la mise à l'encre, on représentera le corps constitué par l'ensemble des deux tores, et l'on indiquera les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection, avec la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection des surfaces.

Titre intérieur : Tores concentriques.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^{m},235$ du petit côté supérieur.

III. — *Triangle.*

Calculer les angles et l'aire d'un triangle dont les trois côtés sont

$$a = 47653^{m},25,$$
$$b = 57682^{m},47,$$
$$c = 35462^{m},84.$$

IV. — *Physique et Chimie.*

1. 1° Un thermomètre à mercure plonge dans un bain d'eau chaude jusqu'au vingtième degré de son échelle : il indique alors 85°. A partir du vingtième degré la tige du thermomètre est entourée d'un manchon dans lequel circule un courant d'eau à 10°. Quelle est la température du bain ?

Coefficient de dilatation apparente du mercure...................... $\delta = 0,000154$

2° La petite branche d'un siphon qui est formé de deux parties cylindriques de même section plonge verticalement dans un vase plein d'eau. La partie AB de cette branche renferme de l'air sous la pression atmosphérique H. La grande branche BC, qui porte un robinet R, est pleine d'eau.

On ouvre le robinet R; l'eau commence à s'écouler de la branche BC, et celle du vase s'élève dans la branche AB. — Quelle doit être la longueur de la grande branche pour que l'équilibre s'établisse, lorsque l'eau est parvenue en B ?

α est l'angle des deux branches du siphon.

Le niveau de l'eau dans le vase est supposé invariable.

2. Propriétés principales et préparation de l'hydrogène phosphoré.

Quel est, à 0° et sous la pression de 760^{mm}, le volume d'hydrogène contenu dans 500^{gr} d'hydrogène phosphoré ?

Équivalents	$\begin{cases} Ph = 32 \\ H = 1 \end{cases}$
Densité de l'hydrogène	$\delta = 0,0692$
Poids d'un litre d'air à 0° et sous la pression 760^{mm}	$= 1^{gr},293$

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da *B. Boncompagni,* socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio ordinario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tomo XIII, 1880.

GENNAIO-FEBBRAIO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. *D. Smeraldo Borghetti Lucchese*, canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore. — *B. Boncompagni.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

MARZO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. *D. Smeraldo Borghetti Lucchese*, canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (continuazione). — *B. Boncompagni.*

APRILE. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. *D. Smeraldo Borghetti Lucchese,* canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (continuazione). — *B. Boncompagni.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

MAGGIO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. *D. Smeraldo Borghetti Lucchese,* canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (continuazione). — *B. Boncompagni.*

GIUGNO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. *D. Smeraldo Borghetti Lucchese,* canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (fine). — *B. Boncompagni.*

Notizie dei Libri relativi alle Matematiche, posseduti dalla Biblioteca Alessandrina, e non citati dal conte *Giovanni Maria Mazzuchelli* nella parte stampata della sua Opera intitolata *Gli scrittori d'Italia*, ecc. — *E. Narducci.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

LUGLIO. — Notice sur les Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon; par *Maurice Steinschneider.* — Supplément au travail intitulé *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche* ; par *C. Henry.*

AGOSTO. — Nuovo documento relativo alla invenzione dei cannocchiali binocoli, con illustrazioni, del prof. *Gilberto Govi.*

I precursori inglesi del Newton. Traduzione dall' inglese del prof. *Antonio Favaro.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

2. AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS. Editor in chief, J.-J. Sylvester. Associate editor in charge, William E. Story. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Volume III, number 3. Cambridge, University press. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

3. GREEK GEOMETRY FROM THALES TO EUCLID, Part II, by *George Johnston Allman,* L L. D. of Trinity College, Dublin; professore of Mathematics, and member of the Senate of the Queen's University in Ireland,

member of the Senate of the royal University of Ireland. — Dublin, printed at the University press, by Ponsonby and Weldrick, 1881.

4. Die Tachymetrie mit besonderer Berucksichtigung des Tachymeters, von Tichy und Starke, fur Terrain und Trace-Studien, bearbeitet von Anton Schell, K. K. Professor. Mit 2 Tafeln und 27 Figuren. — Wien, Druck und Verlag von L.-W. Seidel und Sohn, 1880.

5. Principii fondamentali della Geometria dei tessuti, per *Edoardo Lucas*. — Torino, tip. e lit. Camilla e Bertolero, via Ospedale, 18; 1880.

6. La Météorologie appliquée a la prévision du temps. Leçon faite le 2 mars 1880 à l'École supérieure de Télégraphie, par M. *E. Mascart*, professeur au Collège de France, directeur du Bureau central météorologique; recueillie par M. *Th. Moureaux*, météorologiste au Bureau central. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Augustins; 1881.

7. *Académie des Sciences, des Lettres et des Arts d'Amiens*. — Delambre et Ampère. Discours de réception, suivi de notes et de pièces justificatives, et de plusieurs Lettres inédites de Delambre; par M. *Desboves*, agrégé et docteur ès sciences. — Amiens, librairie Hecquet, 32, rue Delambre; 1881.

Tirages a part.

8. Développements, par rapport au module, des fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances; par M. *Désiré André*, ancien élève de l'École Normale. (*Extrait des*

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure; 1880.

9. Sur les écrits scientifiques de Montesquieu; par M. *Désiré André*. (Extrait du *Correspondant*.)

10. Michel Chasles; par M. *Philippe Gilbert*, professeur à l'Université de Louvain. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, avril 1881.) — Bruxelles, Alfred Vromant, imprimeur-éditeur, 3, rue de la Chapelle; 1881.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1306;

PAR M. GENTY.

On donne une conique C_2 *et trois points* A, B, C. *Par chaque point* P *de* C_2 *passe une conique circonscrite au triangle* ABC *et tangente à* C_2 *en* P, *et chacune de ces coniques coupe la conique fixe en deux autres points* M *et* N.

L'enveloppe de la droite MN *est de la quatrième classe, du sixième ordre; elle n'a pas de point d'inflexion; elle est doublement tangente aux côtés du triangle* ABC; *elle a quatre points doubles, six points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les tangentes à* C_2 *aux six points où les côtés du triangle* ABC *coupent cette conique.* (E. Dewulf.)

Au lieu de chercher l'enveloppe de la droite MN, que nous appellerons Σ_4, nous allons chercher la polaire réciproque S_4 de cette courbe par rapport à la conique donnée, c'est-à-dire le lieu du pôle de la droite MN par rapport à cette conique.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

ou

$$S = 0$$

l'équation de la conique donnée. On sait que cette équation peut aussi se mettre sous la forme

$$(1)\quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2FYZ + 2GZX + 2HXY = 0,$$

en posant

$$\frac{dS}{dx} = X, \quad \frac{dS}{dy} = Y, \quad \frac{dS}{dz} = Z,$$

$$A = bc - f^2, \quad B = ac - g^2, \quad C = ab - h^2;$$

$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch.$$

Cela posé, une conique tangente à C_2 au point (x', y', z') aura pour équation

$$S + (lx + my + nz)(xX' + yY' + zZ') = 0,$$

X', Y', Z' étant ce que deviennent X, Y, Z quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point de contact.

Pour que cette conique soit circonscrite au triangle ABC, il faudra qu'on ait

$$a + lX' = 0; \quad b + mY' = 0; \quad c + nZ' = 0.$$

La droite MN a donc pour équation

$$\frac{ax}{X'} + \frac{by}{Y'} + \frac{cz}{Z'} = 0.$$

Si (x'', y'', z'') est le pôle de cette droite par rapport à C_2, on aura

$$(2)\qquad X'' : Y'' : Z'' = \frac{a}{X'} : \frac{b}{Y'} : \frac{c}{Z'}.$$

On a d'ailleurs, puisque le point (x', y', z') est sur C_2,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &AX'^2 + BY'^2 + CZ'^2 \\ &\quad + 2FY'Z' + 2GZ'X' + 2HX'Y' = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant X', Y', Z' entre les équations qui précèdent, et supprimant les accents de X'', Y'', Z'', il vient

$$(4)\qquad \frac{Aa^2}{X^2} + \frac{Bb^2}{Y^2} + \frac{Cc^2}{Z^2} + \frac{2Fbc}{YZ} + \frac{2Gac}{ZX} + \frac{2Hab}{XY} = 0.$$

Cette forme de l'équation montre que la courbe S_4 est du quatrième ordre, et qu'elle a pour points doubles les sommets du triangle polaire du triangle donné par rapport à C_2. Elle est, par suite, de la sixième classe; elle a six points d'inflexion, quatre tangentes doubles et pas de point de rebroussement.

Les propositions corrélatives fournissent la solution de la question 1306, moins toutefois la dernière partie relative aux tangentes de rebroussement, qui nous paraît inexacte. En effet, la courbe S_4 rencontre C_2 en huit points, qui sont les points de contact des coniques doublement tangentes à C_2 menées par les points A, B et C. Les tangentes en ces huit points sont évidemment des tangentes à Σ_4. Or cette courbe, étant de la quatrième classe, ne peut avoir plus de huit tangentes communes avec une conique : il en résulte que les droites indiquées comme étant les tangentes de rebroussement de l'enveloppe ne peuvent pas être des tangentes à cette courbe.

On peut encore traiter la question de la manière suivante.

Le nombre des droites MN qui passent par un point donné (x_1, y_1, z_1) (c'est-à-dire la classe de la courbe Σ_4) est égal à celui des points correspondants P. Or ceux-ci sont donnés par les équations

$$S = 0,$$

$$\frac{ax_1}{X} + \frac{by_1}{Y} + \frac{cz_1}{Z} = 0,$$

dont la seconde représente une conique Γ_2 circonscrite au triangle $A_1B_1C_1$, polaire du triangle donné par rapport à C_2. Les coniques Γ_2 et C_2 se coupent en quatre points : donc la courbe Σ_4 est de la quatrième classe.

Réciproquement, une conique circonscrite au triangle $A_1B_1C_1$ et qui a pour équation

$$\frac{l}{X} + \frac{m}{Y} + \frac{n}{Z} = 0$$

coupe C_2 en quatre points P, qui sont tels que les droites correspondantes LM se rencontrent en un même point ayant pour coordonnées

$$\frac{l}{a}, \quad \frac{m}{b} \quad \text{et} \quad \frac{n}{c}.$$

Si le point (x_1, y_1, z_1) est sur Σ_4, deux des tangentes menées par ce point se réunissent en une seule; il en est de même, par suite, de deux des points d'intersection de C_2 avec la conique correspondante Γ_2 : donc ces deux courbes sont tangentes. Et réciproquement, si ces deux courbes sont tangentes, le point correspondant (x_1, y_1, z_1) est situé sur Σ_4. Or, la condition qui exprime que les deux coniques C_2 et Γ_2 sont tangentes peut s'écrire de la manière suivante :

$$(5) \qquad (\theta\theta' - 9\Delta\Delta')^2 = 4(\theta^2 - 3\Delta\theta')(\theta'^2 - 3\Delta'\theta).$$

$\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ étant les invariants des deux coniques (Salmon, *Sections coniques*, n° 372). Telle est, par suite, l'équation de la courbe Σ_4. On reconnaît sans peine que cette équation est du sixième ordre par rapport aux coefficients des deux courbes, et, par suite, par rapport à x_1, y_1 et z_1.

La courbe Σ_4 a quatre points doubles qui correspondent aux coniques Γ_2 doublement tangentes à C_2, et six points de rebroussement qui correspondent aux coniques Γ_2 qui ont avec C_2 un contact du second ordre.

Question 1331

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une conique (S) *et un point fixe* A *sur cette conique, une droite* (D) *et un point fixe a sur cette droite.*

Une conique osculatrice à (S) *au point* A *et passant au point a coupe de nouveau la conique* (S) *et la droite* (D) *en des points b et c : démontrer que la droite bc coupe* (S) *en un point fixe f.* (Genty.)

Soit m un des points où la droite (D) coupe la conique (S). Deux coniques osculatrices en un point A peuvent être considérées comme ayant en A trois points communs infiniment voisins. Cela posé, la conique osculatrice à S au point A et passant par le point a est complètement déterminée par un cinquième point b ou c; par conséquent, à un point b ne correspond qu'un point c et réciproquement; les points b et c forment donc sur la conique (S) et sur la droite (D) deux divisions homographiques ayant deux points homologues coïncidents en m, et qui sont déterminées par trois couples de points homologues. En effet, les faisceaux $Ab, Ab', \ldots$ et $Ac, Ac', \ldots$ sont homographiques et déterminés par trois couples de rayons homologues $A_m A_m$; Ab, Ac; Ab', Ac': ils forment sur la conique et sur la droite les deux divisions homographiques considérées.

Cela posé, tirons bc et $b'c'$ qui se coupent en f; le faisceau $(fm, fb, fb', fb'', \ldots)$ détermine sur la conique (S) et sur la droite (D) deux divisions homographiques, qui sont précisément les deux divisions considérées, puisqu'elles sont déterminées par les trois mêmes couples de points : donc les droites $b''c''$, $b'''c'''$, ... vont concourir au point f; en d'autres termes, toutes les droites bc passent par un même point f.

Les deux faisceaux $(Ab, Ab', Ab'', \ldots)$ et $(fc, fc', fc'', \ldots)$ sont homographiques; les rayons homologues se coupent sur une conique passant par A et par f et qui n'est autre que la conique (S) : donc le point f est sur la conique (S). C. Q. F. D.

Note. — Au moyen de la Géométrie analytique, la même question a été résolue par MM. Lez; Leinekugel; Arnaud, élève au lycée de Nice.

Question 1338

(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 528);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

Démontrer que les solutions entières et positives de l'équation $x^2 + 1 = 2y^2$, dont les deux premières sont $x = 1$, $y = 1$ et $x = 7$, $y = 5$, se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de x ou de y de six fois la dernière pour obtenir la suivante. (LIONNET.)

Il est bien connu que les solutions entières et positives de l'équation $x^2 + 1 = 2y^2$ sont données par les termes des fractions réduites d'ordre pair, la première étant $\frac{1}{0}$, de la fraction continue périodique dont le premier quotient incomplet est l'unité suivie de la période 2.

En désignant par

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{a_3}{b_3}$$

cinq réduites consécutives dont la première $\frac{a_1}{b_1}$ est d'ordre pair, on aura

$$(1) \qquad a_3 = 2m_2 + a_2, \quad b_3 = 2n_2 + b_2,$$

$$(2) \qquad m_2 = 2a_2 + m_1, \quad n_2 = 2b_2 + n_1,$$

$$(3) \qquad a_2 = 2m_1 + a_1, \quad b_2 = 2n_1 + b_1.$$

En multipliant les équations (2) par 2, les ajoutant aux équations (1), et de leurs sommes retranchant les équations (3), on a

$$a_3 = 6a_2 - a_1, \quad b_3 = 6b_2 - b_1.$$

D'après cela $\frac{1}{1}$, $\frac{7}{5}$ donnent

$$x = 6.7 - 1 = 41, \quad y = 6.5 - 1 = 29;$$

$\frac{7}{5}$, $\frac{41}{29}$ donnent

$$x = 6.41 - 7 = 239, \quad y = 6.29 - 5 = 169.$$

Etc.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; J. Lissençon; A. Leinekugel; Rochetti, qui a résolu également la question 1339.

Question 1350

(voir 2e série, t. XIX, p. 480).

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver un nombre positif ayant la triple propriété d'être, ainsi que sa moitié, égal au produit de deux entiers consécutifs, le plus petit des facteurs de cette moitié étant lui-même égal au produit de deux entiers consécutifs. (LIONNET.)

Soit x le plus petit des deux nombres entiers consécutifs dont le produit x^2+x est le plus petit facteur de la moitié du nombre demandé : cette moitié est

$$(x^2+x)(x^2+x+1)=x^4+2x^3+2x^2+x,$$

et le nombre demandé sera exprimé par

$$2x^4+4x^3+4x^2+2x.$$

Il faut que ce nombre soit le produit de deux nombres entiers consécutifs

$$2x^4+4x^3+4x^2+2x=y^2+y,$$

d'où, en multipliant par 4 et ajoutant 1,

$$8x^4+16x^3+16x^2+8x+1=(2y+1)^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution $x=1$, d'où $y=3$, ce qui donne le nombre

$$3\times 4=12,$$

dont la moitié $6=2\times 3$, le facteur $2=1\times 2$.

Le procédé d'Euler pour déduire d'autres solutions de celle-là ne donne que des nombres fractionnaires ou la solution illusoire $x=0$.

On trouve une infinité de nombres satisfaisant aux deux premières conditions. J'ai vérifié que, jusqu'à 10^{25}, 12 est le seul de ces nombres dont le plus petit facteur de sa moitié soit le produit de deux nombres entiers consécutifs.

Question 1354

voir 2e série, t. XIX, p. 565);

PAR M. É. PECQUERY,
Élève au lycée du Havre.

L'équation

$$(1) \qquad x^4 - (k - b + c)x^2 + (b - 2c)ax - ck = 0,$$

dans laquelle a, b, c, k sont des entiers positifs, et satisfaisant aux conditions

$$a^2 > k > (a-1)^2,$$
$$(a-1)b \geqq (a^2 - k - 1)c,$$

ou bien aux conditions

$$(a+1)^2 > k > a^2,$$
$$(a+1)b \geqq (k - a^2 + 1)c,$$

ne peut avoir trois racines entières. Si deux racines sont imaginaires, l'une au moins des racines réelles est incommensurable.

La même proposition subsiste à l'égard de l'équation

$$(2) \qquad x^4 - (k - b - c)x^2 + (b + 2c)ax + ck = 0,$$

dans laquelle les entiers a, b, c, k, tous plus grands que 0, satisfont à l'un quelconque des quatre systèmes de *conditions qui suivent, savoir :*

1° $\qquad a^2 > c, \quad a^2 > k \geqq (a-1)^2,$

2° $\qquad c > a^2 > k, \quad (a+1)b \geqq (a^2 - k - 1)c,$

3° $\qquad (a+1)^2 \geqq k > a^2 > c,$

4° $\qquad c > a^2, \quad k > a^2, \quad (a-1)b \geqq (k - a^2 + 1)c.$

Dans chacun de ces cas, l'équation (2) *a deux racines réelles, dont l'une, au moins, est incommensurable.*

(S. Réalis.)

La somme des racines de l'équation (1) étant nulle, si trois de ses racines sont entières, la quatrième le sera aussi.

Inversement, si l'une des racines n'est pas entière, les trois autres ne pourront être toutes trois entières.

Il suffit donc de démontrer que l'équation (1), satisfaisant à l'un des deux premiers systèmes de conditions, admet toujours une racine non entière.

De plus, le coefficient de la plus haute puissance de x étant l'unité, cette racine non entière sera incommensurable.

Substituons à x dans l'équation les trois valeurs successives $-(a-1)$, $-a$, $-(a+1)$ et désignons par A, B, C les valeurs que prend le premier membre, on aura, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}
A &= (a-1)^2[(a-1)^2 - k] - b(a-1) + c(a^2 - k - 1),\\
B &= (a^2 - k)(a^2 + c),\\
C &= (a+1)^2[(a+1)^2 - k] + b(a+1) - c(k - a^2 + 1).
\end{aligned}$$

Si l'on tient compte du premier système de conditions, on voit que A et B sont de signes contraires ; si l'on tient compte du second, on voit de même que B et C sont de signes contraires. Donc, dans ces deux cas, l'équation (1) admet toujours une racine non entière comprise entre $-(a-1)$ et $-a$ dans le premier cas, et entre $-a$ et $-(a+1)$ dans le second.

Ce qui précède comprend le cas où deux des racines sont imaginaires; la racine réelle incommensurable trouvée subsiste toujours.

Considérons maintenant l'équation (2), qui n'est autre que l'équation (1) dans laquelle on a changé le signe de c. Si l'on y fait les mêmes substitutions que dans (1), les polynômes A, B, C deviennent

$$\begin{aligned}
A &= (a-1)^2[(a-1)^2-k]-b(a-1)-c(a^2-k-1),\\
B &= (a^2-k)(a^2-c),\\
C &= (a+1)^2[(a+1)^2-k]+b(a+1)+c(k-a^2+1).
\end{aligned}$$

En tenant compte successivement des quatre systèmes de conditions, les polynômes A, B, C, considérés seulement deux à deux, prennent les signes indiqués par le Tableau suivant :

	1°	2°	3°	4°
A	—			—
B	+	—	—	+
C		+	+	

On voit donc que, dans chaque cas, il y a une racine comprise entre deux entiers consécutifs, c'est-à-dire une racine non entière.

Donc la proposition énoncée pour l'équation (1) subsiste pour l'équation (2).

Question 1358

(Voir même Tome, p. 96);

PAR M. H. DU MONTEL,
Élève du lycée Saint-Louis.

Les droites rectangulaires OX, OY ([1]) *sont les axes d'une ellipse,* M *un point de la courbe;* N *le point où la normale en* M *rencontre l'axe* OX; MQ *la perpendiculaire abaissée du point* M *sur* OY; MNP *un triangle dont les côtés* MP, NP *sont respectivement égaux à* MQ, NO : *si l'on prend sur la bissectrice de l'angle* MPN, *et de chaque côté du point* P, *des longueurs* PD, PD′ *égales entre elles et telles que* $PD^2 = MP.PN$, *la circonférence passant par* D *et* D′ *et ayant son centre sur* OY *coupera l'axe* OX *aux deux foyers de l'ellipse.*

(A. BOILLEAU.)

Soient F, F′ les foyers de l'ellipse, et C le point où la normale MN, prolongée, rencontre l'axe OY.

On a

$$\frac{CN}{CM} = \frac{ON}{QM}, \quad \text{ou} \quad \frac{CN}{CM} = \frac{PN}{PM},$$

puisque ON = PN et QM = PM. Il s'ensuit que le point C appartient à la bissectrice de l'angle extérieur en P du triangle MPN, c'est-à-dire à la perpendiculaire à la droite DD′ élevée au milieu P de cette droite. Donc le point C est le centre du cercle que l'on considère.

Cherchons la valeur du rayon CD de ce cercle.

Le triangle rectangle CPD donne

$$CD^2 = CP^2 + PD^2 = CP^2 + MP.PN.$$

Mais, d'après une propriété connue, relative aux bissec-

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

trices des angles d'un triangle, on a

$$MP.PN = CM.CN - CP^2,$$

d'où

$$CD^2 = CM.CN.$$

Considérons actuellement la circonférence circonscrite au triangle FMF' : elle coupe la perpendiculaire OY, élevée au milieu de FF', au point où la normale MN, qui est bissectrice de l'angle FMF', rencontre la droite OY. Donc le point C appartient à cette circonférence; il en résulte que l'angle $NFC = NMF' = NMF$, et la similitude des triangles CFN, CFM donne

$$CF^2 = CM.CN = CD^2, \quad \text{d'où} \quad CF = CD.$$

Cette dernière égalité démontre le théorème énoncé.

Note. — Au moyen des calculs de la Géométrie analytique, la même question a été résolue par MM. Pisani; Lez; Moret-Blanc; Josse (Ferdinand), élève en Mathématiques spéciales au lycée de Nancy (classe de M. Lacour); Élie Perrin, élève à la Faculté de Paris.

M. Pisani fait observer que le théorème énoncé existe de même pour l'hyperbole.

QUESTIONS.

1364. Les équations réciproques, dont les transformées, en posant $t = x + \frac{1}{x}$, sont également réciproques, sont de la forme

$$F[(x+1)^4, (x-1)^4](x^2+x+1)^n . (x^2-x+1)^{n'} = 0,$$

$F[(x+1)^4, (x-1)^4]$ désignant une fonction entière et homogène de $(x+1)^4$ et $(x-1)^4$.

On suppose que l'équation primitive n'admet pas pour racine 1 ou -1. (Pellet.)

1365. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} - \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre $-a$ et $+a$. (Escary.)

1366. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à a.

(Escary.)

1367. 1° Si une équation $f(x) = 0$ est ordonnée et de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \psi(x) = 0,$$

φ et ψ n'ayant que des permanences et α, β, γ étant des nombres positifs tels que $\beta^2 = \alpha\gamma$, l'équation n'a pas de racines réelles positives.

2° Si quatre coefficients consécutifs d'une équation sont $b+c$, b, c, $b-c$, de sorte que

$$f(x) = \ldots (b+c)x^{p+1} + bx^p + cx^{p-1} + (b-c)x^{p-2} + \ldots = 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

3° Si quatre coefficients consécutifs sont a, b, a, b, de telle sorte que

$$f(x) = \ldots ax^{p+1} + bx^p + ax^{p-1} + bx^{p-2} + \ldots = 0,$$

l'équation a, au moins, deux racines imaginaires.

On propose de généraliser cette proposition et de faire voir que, si trois coefficients consécutifs a, b, c se reproduisent trois fois périodiquement, de telle sorte que l'on trouve dans l'équation a, b, c; a, b, c; a, b, c, comme étant 9 coefficients consécutifs, l'équation a, au moins, quatre racines imaginaires, et ainsi de suite.

En supposant que les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_p$ se reproduisent p fois périodiquement, dire combien l'équation a, au moins, de racines imaginaires.

On distinguera les cas de p pair et de p impair.

(G. DE LONGCHAMPS.)

1368. Soient $OA = OB = OC$ trois longueurs égales portées sur trois axes rectangulaires; A_1, B_1, C_1 les projections orthogonales des points A, B, C sur un plan quelconque passant par le point O.

Si l'on pose

$$OA_1 = a;\quad OB_1 = b;\quad OC_1 = c;$$

$$\widehat{B_1OC_1} = \alpha;\quad \widehat{C_1OA_1} = \beta;\quad \widehat{A_1OB_1} = \gamma;$$

on aura

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b^2}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{c^2}{\sin\gamma\cos\gamma} = l^2;$$

$$AA_1 = \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$

$$BB_1 = \frac{b}{\cos\beta}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$

$$CC_1 = \frac{c}{\cos\gamma}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$

$$OA = OB = OC = l\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Discuter ces formules. (GENTY.)

1369. Par le centre d'un ellipsoïde on mène trois plans rectangulaires quelconques A, B, C; si l'on nomme α, β, γ les angles que forment ces plans avec un plan diamétral fixe P; a, b les axes de la section de la surface par le plan P; a_1, b_1, c_1 les demi-diamètres de cette section dirigés suivant les droites (A, P) (B, P), (C, P), on aura

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_1^2}+\frac{\sin^2\beta}{b_1^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c_1^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

(GENTY.)

1370. Une ellipse et une hyperbole ont mêmes axes AA_1, BB_1; par l'un des sommets réels A passe une sécante AMM'; et les tangentes en M et en M' se rencontrent en T : on demande de construire les deux courbes, connaissant les points A, M, T. (LAISANT.)

1371. Soient A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 trois diamètres quelconques de trois circonférences ayant O pour centre radical; M un point quelconque du plan; OB_1D_1, OB_2D_2, OB_3D_3 trois triangles symétriquement semblables à OMA_1, OMA_2, OMA_3 respectivement : démontrer que les trois points D_1, D_2, D_3 sont en ligne droite.

(LAISANT.)

1372. On donne à un plan P un mouvement infiniment petit sur lui-même; son centre instantané de rotation O, et son cercle des centres C sont déterminés. Désignons par t la tangente en O à C.

Considérons une figure F dans P; le lieu géométrique φ des centres de courbure des trajectoires des points de F, ainsi que les figures F' et φ', symétriques, respectivement, par rapport à t, des figures F et φ.

La figure F' est le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points de la figure φ'.

(DEWULF.)

1373. Si d'un point O d'une circonférence on abaisse les perpendiculaires OM, ON à deux côtés d'un triangle inscrit, la projection du troisième côté sur MN est égale à MN. (ERNEST CESARO.)

1374. On donne le plan et les trois angles d'un triangle ABC dont un sommet A est fixe ; trouver le lieu géométrique des points de l'espace d'où les trois côtés du triangle soient vus sous des angles droits.

On suppose que les trois angles donnés sont aigus.

1375. D'un point S, extérieur à un cercle O, on mène à ce cercle la tangente SA, et au centre la sécante SO, qui coupe la circonférence en B et C. Le point de contact A de la tangente sépare la demi-circonférence ABC en deux arcs AMB, ANC, qui forment les troisièmes côtés de deux triangles mixtilignes SAMB et SANC. Si l'on fait tourner la figure autour de SO, ces deux triangles mixtilignes engendrent des volumes, qui sont respectivement équivalents aux deux cônes ayant pour rayons de base les deux segments SB, SC de la sécante et pour hauteur commune la projection OD du rayon de contact OA sur cette sécante : c'est-à-dire que

$$\text{vol. SAMB} = \tfrac{1}{3}\pi\,\overline{SB}^2.OD, \quad \text{et} \quad \text{vol. SANC} = \tfrac{1}{3}\pi\,\overline{SC}^2.OD.$$

(G. DOSTOR.)

RECTIFICATIONS.

Page 66, ligne 1 en remontant, *ajoutez* $-(1+m^2)$ devant le signe $=$.

Page 66, ligne 5 en remontant, *ajoutez* -1 devant le signe $=$.

Page 71, ligne 12 en remontant, *au lieu de* $(SA - 4B)$ *lisez* $(5A - 4B)$.

Page 156, ligne 7 en remontant, *au lieu de* $2s = 20$ *lisez* $2s = 120$.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Nice (¹).

V. Dans tout ce qui va suivre, nous nous appuierons constamment sur le théorème suivant :

Étant données deux courbes qui se coupent, leurs transformées par rayons vecteurs réciproques se coupent sous le même angle.

Comme nous conviendrons d'admettre ce théorème, alors même que nous raisonnerons sur des courbes imaginaires, ou bien encore que nous considérerons le pôle de transformation comme imaginaire, il est bon d'en donner une démonstration analytique. Alors, quand nous énoncerons le théorème, nous ne ferons qu'énoncer le résultat du calcul suivant :

Soit une courbe quelconque. Je peux toujours considérer les trois coordonnées d'un de ses points comme des fonctions de la distance de ce point à un point fixe. Soient a, b, c les coordonnées de ce point fixe, x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe. Nous pouvons toujours poser

$$x = a + \varphi(r),$$
$$y = b + \chi(r),$$
$$z = c + \psi(r),$$

r désignant la distance des deux points (a, b, c) et (x, y, z). Soit une seconde courbe dont les équations

(¹) *Voir* même Tome, p. 344.

sont

$$x = a + \varphi_1(r),$$
$$y = b + \chi_1(r),$$
$$z = c + \psi_1(r).$$

Je suppose que ces deux courbes aient un point commun (x, y, z). Soit V l'angle qu'elles font entre elles en ce point; cet angle satisfait à la relation

$$\cos V = \frac{\varphi'\varphi'_1 + \chi'\chi'_1 + \psi'\psi'_1}{\sqrt{(\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2)(\varphi'^2_1 + \chi'^2_1 + \psi'^2_1)}}.$$

Les deux courbes transformées par rapport au point (a, b, c) sont représentées, la première par les équations

$$\xi = a + \frac{k^4}{r^2}\varphi(r),$$
$$\eta = b + \frac{k^4}{r^2}\chi(r),$$
$$\zeta = c + \frac{k^4}{r^2}\psi(r),$$

et la seconde par

$$\xi = a + \frac{k^4}{r^2}\varphi_1(r),$$
$$\eta = b + \frac{k^4}{r^2}\chi_1(r),$$
$$\zeta = c + \frac{k^4}{r^2}\psi_1(r).$$

Ces deux courbes ont un point commun qui est le transformé du point x, y, z et font entre elles, en ce point, un angle V' donné par la formule

$$\cos V' = \frac{\left(\frac{\varphi'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi\right)\left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi_1\right) + \left(\frac{\chi'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\chi\right)\left(\frac{\chi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\chi_1\right) + \dots}{\sqrt{\left(\frac{\varphi'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi\right)^2 + \dots}\sqrt{\left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\varphi_1\right)^2 + \dots}}$$

ou, en développant,

$$\cos V' = \frac{\frac{1}{r^4}(\varphi'\varphi_1' + \ldots) - \frac{2}{r^5}\frac{d}{dr}(\varphi\varphi_1 + \ldots) + \frac{4}{r^6}(\varphi\varphi_1' + \ldots)}{\sqrt{\frac{1}{r^4}(\varphi'^2+\chi'^2+\psi'^2) - \frac{4}{r^5}(\varphi\varphi'+\chi\chi'+\psi\psi') + \frac{4}{r^6}(\varphi^2+\chi^2+\psi^2)}\sqrt{\ldots}}.$$

Mais si, dans les fonctions φ, χ, ψ, φ_1, χ_1, ψ_1, on remplace r par la valeur qui correspond au point commun aux deux courbes, on trouve

$$\varphi = \varphi_1, \quad \chi = \chi_1, \quad \psi = \psi_1$$

et

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = \varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2 = \varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1 = r^2,$$

d'où

$$-\frac{2}{r^5}\frac{d}{dr}(\varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1) + \frac{4}{r^6}(\varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1) = 0,$$

$$-\frac{4}{r^5}(\varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi') + \frac{4}{r^6}(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2)$$
$$= -\frac{2}{r^5}\frac{d}{dr}(r^2) + \frac{4}{r^4} = 0.$$

De même,

$$-\frac{4}{r^5}(\varphi_1\varphi_1' + \chi_1\chi_1' + \psi_1\psi_1') + \frac{4}{r^6}(\varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2) = 0.$$

La formule précédente se réduit donc à

$$\cos V' = \frac{\varphi'\varphi_1' + \chi'\chi_1' + \psi'\psi_1'}{\sqrt{(\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2)(\varphi_1'^2 + \chi_1'^2 + \psi_1'^2)}},$$

ce qui démontre le théorème.

Le calcul précédent ne suppose en rien que les quantités qui y figurent soient réelles : nous conviendrons donc de dire que le théorème est vrai, lorsque nous raisonnerons sur des points imaginaires.

Nous admettrons également, et dans tous les cas, les théorèmes suivants, dont la démonstration analytique ne présente pas de difficulté :

A tout plan correspond une sphère passant par le centre de transformation et dont le centre est sur la perpendiculaire menée par le centre de transformation sur ce plan, et réciproquement.

A une sphère quelconque correspond une sphère.

A toute droite correspond une circonférence passant par le centre de transformation, et réciproquement.

A une circonférence quelconque correspond une circonférence.

VI. On peut en déduire immédiatement les propriétés suivantes :

Toutes les sphères passant par l'un des points singuliers d'une girocyclide, et dont le centre se meut sur une droite passant par ce point, coupent la girocyclide suivant des courbes qui font le même angle avec un des cercles générateurs.

Car tous les plans perpendiculaires à la droite fixe coupent le cône transformé suivant des courbes qui font le même angle avec une des génératrices.

Dans toute girocyclide du quatrième ordre, il y a six séries de sections cycliques, différentes des lignes de courbure. Deux sections cycliques d'une même série ne sont pas sur une même sphère, mais ces séries se correspondent deux à deux, de telle sorte que deux sections appartenant à deux séries correspondantes sont sur une même sphère.

Deux sections cycliques appartenant à deux séries correspondantes coupent une même ligne de courbure circulaire sous des angles dont le produit est constant.

Toutes ces propriétés résultent des propriétés des sections cycliques des cônes du second ordre. Néanmoins, il est bon de mettre en évidence, par un procédé plus direct, l'existence des sections cycliques. Considérons, en effet, la girocyclide définie par l'équation

$$\begin{aligned}&[x^2+y^2+(z-c)^2+2ax+2by+2c(z-c)]^2\\&\quad=4Ax^2+4By^2\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&[x^2+y^2+(z-c)^2]^2+4[x^2+y^2+(z-c)^2][ax+by+c(z-c)]\\&\qquad+4[ax+by+c(z-c)]^2=4Ax^2+4By^2.\end{aligned}$$

Considérons le cône

$$[ax+by+c(z-c)]^2-Ax^2-By^2=0.$$

On sait qu'il existe trois valeurs de λ telles qu'on ait identiquement

$$\begin{aligned}&[ax+by+c(z-c)]^2-Ax^2-By^2\\&\quad=[Mx+Ny+P(z-c)][M'x+N'y+P'(z-c)]\\&\qquad-\lambda[x^2+y^2+(z-c)^2].\end{aligned}$$

Ces valeurs sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix}a^2-A+\lambda & ab & ac\\ ab & b^2-B+\lambda & bc\\ ac & bc & c^2+\lambda\end{vmatrix}=0;$$

lorsque c est réel, elles sont toutes les trois réelles, et l'une d'elles seulement donne, pour M, N, P, M', N', P', des valeurs réelles.

Dans tous les cas, l'équation de la girocyclide s'écrit

$$\begin{aligned}&[x^2+y^2+(z-c)^2]^2+4[x^2+y^2+(z-c)^2][ax+by+c(z-c)]\\&\quad+4[Mx+Ny+P(z-c)][M'x+N'y+P'(z-c)]\\&\qquad\qquad-4\lambda[x^2+y^2+(z-c)^2]=0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&[x^2+y^2+(z-c)^2]\{x^2+y^2+(z-c)^2+4[ax+by+c(z-c)-\lambda]\}\\&\quad=-4[Mx+Ny+P(z-c)][M'x+N'y+P'(z-c)].\end{aligned}$$

Cette dernière équation est le résultat de l'élimination de μ entre les deux équations suivantes

$$(5)\quad x^2+y^2+(z-c)^2=-4\mu[\mathrm{M}x+\mathrm{N}y+\mathrm{P}(z-c)]$$

et

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+(z-c)^2+4[ax+by+c(z-c)-\lambda]\\ &\quad=\frac{1}{\mu}[\mathrm{M}'x+\mathrm{N}'y+\mathrm{P}'(z-c)],\end{aligned}\right.$$

et ces deux dernières équations représentent un cercle dont la position dans l'espace varie en même temps que la valeur de μ. On obtient, en faisant varier μ, une première série de sections cycliques : l'équation (5) montre que les sphères qui passent par une de ces sections et par le point singulier $(0, 0, c)$ ont leurs centres sur une droite fixe passant par ce point et perpendiculaire à l'un des plans cycliques du cône transformé. On obtiendrait une seconde série en faisant varier ν dans les deux équations suivantes

$$x^2+y^2+(z-c)^2=-4\nu[\mathrm{M}'x+\mathrm{N}'y+\mathrm{P}'(z-c)]$$

et

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+(z-c)^2+4[ax+by+c(z-c)-\lambda]\\ &\quad=\frac{1}{\nu}[\mathrm{M}x+\mathrm{N}y+\mathrm{P}(z-c)].\end{aligned}$$

Cherchons maintenant l'enveloppe des plans cycliques d'une même série. Le plan de la courbe représentée par les équations (5) et (6) a lui-même pour équation

$$\begin{aligned} &4[ax+by+c(z-c)-\lambda]\\ &\quad=4\mu[\mathrm{M}x+\mathrm{N}y+\mathrm{P}(z-c)]+\frac{1}{\mu}[\mathrm{M}'x+\mathrm{N}'y+\mathrm{P}'(z-c)],\end{aligned}$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} ax+by+c(z-c)-\lambda&=\mathrm{H},\\ \mathrm{M}x+\mathrm{N}y+\mathrm{P}(z-c)&=\mathrm{K},\\ \mathrm{M}'x+\mathrm{N}'y+\mathrm{P}'(z-c)&=\mathrm{L}.\end{aligned}$$

cette équation devient

$$4K\mu^2 - 4H\mu + L = 0.$$

L'enveloppe de ce plan a pour équation

$$H^2 - KL = 0,$$

c'est donc un cône du deuxième ordre.

(*A suivre.*)

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ED. DEWULF,
Lieutenant-Colonel du Génie.

I. *Notations.* — 1. Nous employons les notations suivantes :

$$(1, 2, 3, 4)\,[5, 6, 7, 8, \ldots]$$

représente un faisceau de coniques, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4 et dont les courbes sont déterminées par les points 5, 6, 7, 8, ...;

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)\,[9, 10, 11 \ldots]$$

représente un faisceau de cubiques, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et dont les courbes sont déterminées par les points 9, 10, 11, ...;

$$(1^2, 2, 3, 4, 5, 6)\,[7, 8, 9, \ldots]$$

représente un faisceau de cubiques, dont la base est formée par le point double 1 et les points simples 2, 3, 4, 5, 6, et dont les courbes sont déterminées par les points 7, 8, 9, ...; et ainsi de suite.

Cette Notation est empruntée au Mémoire de M. l'amiral de Jonquières, intitulé : *Essai sur la génération* *des courbes géométriques* (t. XVI des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*).

2. $[x-y]^n$ représente une transformation birationnelle de l'ordre n entre les points x et y; la théorie générale de ces transformations, exposée d'après les Mémoires de M. Cremona, se trouve dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (année 1872, p. 206 et suiv.)

3. Si l'on a sur une droite une série de couples de points formant une involution i, et si l'on joint ces couples de points à point O d'un cercle M, chaque couple de points conjugués détermine une corde de M, toutes ces cordes concourent en un point p (Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 490). Nous disons que ce point p représente l'involution i, par rapport au cercle M et à un de ses points O.

II. *Étudier la relation qui existe entre les systèmes de points x et y qui rendent projectifs le faisceau de coniques* $(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7]$ *et le faisceau de droites* $y[4', 5', 6', 7']$.

1. A un point déterminé x correspondent tous les points d'une conique C_2^x circonscrite au quadrilatère $4'5'6'7'$ et capable du rapport anharmonique des tangentes au point 1 des coniques

$$1.2.3.x.4, \quad 1.2.3.x.5, \quad 1.2.3.x.6, \quad 1.2.3.x.7.$$

Pour déterminer les points x qui correspondent à un point donné y, nous désignons par i'_4, i'_5, i'_6, i'_7 les involutions déterminées sur une droite quelconque l par les quatre faisceaux de coniques $(1,2,3,4)$, $(1,2,3,5)$, $(1,2,3,6)$, $(1,2,3,7)$, et par p_4, p_5, p_6, p_7, les quatre points qui représentent respectivement ces involutions par rapport à un cercle M et à un de ses points O. Décrivons sur $p_4p_5p_6p_7$ une conique C_2^p capable du rapport anharmonique du faisceau $y[4',5',6',7']$, et soit p un point quelconque de cette conique. Chaque point p détermine quatre cordes pp_4, pp_5, pp_6, pp_7 de M, et ces cordes, projetées de O sur l, déterminent sur cette droite quatre couples de points en involution $s_4t_4, s_5t_5, s_6t_6, s_7t_7$. Les coniques $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$, $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5)$, $(1, 2, 3, 6, s_6, t_6)$, $(1, 2, 3, 7, s_7, t_7)$ se coupent en un même point x. Donc, à un point p correspond un seul point x, et pour le déterminer il suffit de deux des coniques ci-dessus, $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$ et $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5,)$ par exemple.

Supposons maintenant que le point p parcoure la conique C_2^p; les droites pp_4, pp_5 engendrent deux faisceaux projectifs, dont les rayons correspondants déterminent sur l deux involutions projectives $s_4t'_4, s'_4t'_4, s''_4t''_4, \ldots,$ $s_5t_5, s'_5t'_5, s''_5t''_5, \ldots,$ et les coniques $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$, $(1, 2, 3, 4, s'_4, t'_4)$, $(1, 2, 3, 5\, s_5, t_5)$, $(1, 2, 3, 5, s'_5, t'_5), \ldots$ forment deux faisceaux projectifs dont les courbes correspondantes engendrent une courbe du quatrième ordre C_4, ayant trois points doubles en 1, 2, 3 et passant par les points simples 4, 5 et aussi par les points simples 6 et 7. Quand le point p parcourt la conique C_2^p, le point x décrit la courbe C_4; et, comme à tous les points y d'une conique circonscrite à $4'5'6'7'$ correspondent tous les points p de C_2^p, on peut dire qu'*à tous les points y d'une conique circonscrite à $4'5'6'7'$ correspondent tous les points x d'une courbe C_4, ayant des points doubles en* 1, 2, 3 *et passant par les points simples* 4, 5, 6, 7.

2. Les coniques $(4', 5', 6', 7')$ et les quartiques C_4 se correspondent une à une et forment deux faisceaux projectifs; le lieu géométrique C_6 des intersections des courbes correspondantes de ces faisceaux est aussi *le lieu géométrique des points x qui rendent projectifs les deux faisceaux*

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7] \quad \text{et} \quad x[4', 5', 6', 7'].$$

Cette sextique a des points doubles aux points 1, 2, 3 et passe aux points simples $4, 5, 6, 7, 4', 5, 6', 7'$.

3. Supposons que les points $4', 5', 6', 7'$ se confondent respectivement avec $4, 5, 6, 7$; la courbe C_6 est le lieu des points x qui rendent projectifs les deux faisceaux $(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7]$ et $x[4, 5, 6, 7]$.

A chaque point x de cette courbe correspond une cubique du réseau, dont la base est formée par les points $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, et cette courbe a un point double en x; en d'autres termes, le lieu géométrique des points x est le lieu géométrique des points doubles des cubiques du réseau $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Ce lieu géométrique ne doit pas changer si, au lieu de prendre les trois points 1, 2, 3, on prend trois quelconques des sept points donnés pour former la base du faisceau générateur de coniques. Nous avons donc démontré le théorème suivante :

Le lieu géométrique des points doubles des courbes du réseau de cubiques $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, *c'est-à-dire la jacobienne de ce réseau, est une courbe du sixième ordre qui a un point double en chacun des sept points* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

On peut voir directement que cette jacobienne a des points doubles en chacun des sept points donnés; on peut, en effet, construire une cubique ayant un point double en un des sept points donnés et passant par les six autres.

On peut encore déterminer directement vingt et un couples de points de cette jacobienne, car le réseau de cubiques (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) renferme les vingt et une courbes composées, formées de la conique déterminée par cinq des sept points donnés et par la droite qui joint les deux points restants, et les points d'intersection de cette conique et de cette droite appartiennent à la jacobienne. Ces quarante-deux points peuvent être imaginaires par couples et se construisent au moyen de la règle et du compas.

Ajoutons encore qu'on peut tracer directement les tangentes à la jacobienne en chacun de ces points doubles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Pour le faire voir, il suffit de démontrer que ces tangentes sont celles des sept cubiques qui ont respectivement chacun de ces sept points pour point double.

Cela résulte du théorème général suivant, démontré géométriquement par M. Cremona dans son *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (96, *d*, p. 75) :

Étant donné un réseau de courbes, passant par un même point O, *la hessienne du réseau passe deux fois par le point* O, *et ses deux tangentes en ce point sont celles de la courbe du réseau pour laquelle* O *est un point double.*

On sait que, dans le cas où l'ordre des courbes qui constituent le réseau est le même pour toutes ces courbes, la hessienne se confond avec la jacobienne, et c'est ce qui a lieu dans la question dont nous nous occupons.

Nommons 8, 9, 10, 11, 12, 13 six quelconques des quarante-deux points dont il a été question plus haut. La jacobienne du réseau pourra être engendrée par les deux faisceaux projectifs de cubiques

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, z)\ [9, 10, 11, 12, 13]$$
$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)\ [9, 10, 11, 12, 13].$$

Le point z sera déterminé par l'une des deux méthodes indiquées par M. de Jonquières dans son *Essai sur la génération,* etc., § 43. Les cubiques correspondantes de ces faisceaux ont toutes sept points communs connus à l'avance ; les deux autres points d'intersection de ces couples de courbes pourront donc être construits au moyen de la règle et du compas, en employant les méthodes développées par M. Chasles aux §§ VI et X de sa *Note sur les courbes du troisième ordre,* insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* 1855 (décembre, p. 1190 et suiv.)

Il résulte de tout ce qui précède que la jacobienne d'un réseau de courbes du troisième ordre déterminé par sept points peut être tracée au moyen de la règle et du compas.

4. Le tracé de la jacobienne d'un réseau de cubiques nous conduit immédiatement à la détermination des points doubles d'un faisceau (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) de cubiques. Considérons, en effet, les deux réseaux de cubiques (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) et (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8). Les jacobiennes de ces deux réseaux sont une courbe C_6 du sixième ordre, ayant des points doubles en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et une autre courbe C'_6, ayant des points doubles en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Ces deux courbes ont, en commun, les points doubles 1, 2, 3, 4, 5, 6, et y ont, en général, des tangentes différentes; elles se coupent donc en

$$36 - 4 \times 6 = 12$$

autres points. Donc, *les courbes d'un faisceau de cubiques* $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ *ont douze points doubles qui peuvent se construire au moyen de la règle et du compas.*

III. *Étudier la relation qui existe entre les systèmes de points qui rendent projectifs les deux faisceaux*

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad y[4', 5', 6', 7', 8'].$$

1. A un point x donné correspond un seul point y que l'on détermine en décrivant sur $4'5'6'7'$ une conique capable du rapport anharmonique des coniques

$$(1, 2, 3, x), \ [4, 5, 6, 7],$$

puis, sur $4'5'6'8'$ une seconde conique capable du rapport anharmonique des coniques

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 8].$$

Ces coniques ont en commun les points $4'$, $5'$, $6'$ et se coupent en un quatrième point qui est le point y cherché.

Supposons que l'on donne un point y, et soit x un point correspondant à y, que nous allons déterminer en le supposant d'abord connu, pour établir notre raisonnement. Chacune des coniques

$$(1, 2, 3, x, 4), \ (1, 2, 3, x, 5), \ (1, 2, 3, x, 6),$$
$$(1, 2, 3, x, 7), \ (1, 2, 3, x, 8)$$

marque sur une droite quelconque l un couple de points et ces cinq couples de points sont en involution, puisqu'ils sont déterminés par des coniques du faisceau $(1, 2, 3, x)$; de plus, cette involution est projective au faisceau

$$y[4', 5', 6', 7', 8'];$$

par hypothèse, chacun de ces couples de points appartient respectivement aux cinq involutions i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, déterminées sur l par les cinq faisceaux

$$(1, 2, 3)[4, 5, 6, 7, 8].$$

Pour trouver le point x, il faut donc déterminer, dans chacune des involutions i_4, i_5, i_6, i_7, i_8 un couple de points tel que les cinq couples forment une involution projective au faisceau $y[4', 5', 6', 7', 8']$.

Soient p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 les cinq points représentatifs des cinq involutions par rapport à un cercle M et à un de ses points O. Si l'on admet que l'on connaisse un point p tel que les deux faisceaux $p[p_4, p_5, p_6, p_7, p_8]$ et $y[4', 5', 6', 7' 8']$ soient projectifs, les cinq rayons pp_i $(i = 4, 5, 6, 7, 8)$ déterminent sur M cinq cordes qui, projetées du point O sur l, donnent les cinq couples de points cherchés.

Or, nous savons que les points p et y forment une transformation birationnelle $[p - y]^5$ du cinquième ordre, dont les points fondamentaux pour la figure (p) sont $p_4^2, p_5^2, p_6^2, p_7^2, p_8^2$, et p_0^2, p_0 étant le point *adjoint* au groupe $(p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ ou le point qui correspond à tous ceux de la conique $(4', 5', 6', 7', 8')$, et pour la figure (y) les points $4'^2$, $5'^2$, $6'^2$, $7'^2$, $8'^2$ et o'^2, o' étant le point adjoint au groupe $(4', 5', 6', 7', 8')$ [1].

Nous savons aussi que les points p et x forment une transformation birationnelle $[p - x]^2$ du second ordre, dont les points fondamentaux sont pour la figure (x) les points 1, 2, 3, et pour la figure (p) les points $e_{2,3}$, $e_{1,3}$, $e_{1,2}$, projections du point O sur M des points

---

(1) Rudolph Sturm, *Das Problem der Projectivität* (*Mathematische Annalen*, t. I), ou Dewulf et Schoute, *Construire une courbe unicursale du quatrième ordre, etc.* (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1879; 2e semestre).

d'intersection des droites 2 - 3, 1 - 3, 1 - 2 avec la transversale l (1).

Donc à un point x correspond un seul point y.

Quand le point x décrit une droite quelconque, le point p correspondant de $[p-x]^2$ décrit une conique C passant par les points $e_{2,3}, e_{1,3}, e_{1,2}$, et ne passant généralement par aucun des points fondamentaux de la figure (3) dans $[p-y]^5$. Par suite, à la conique C, considérée comme appartenant à la figure (p) dans $[p-y]^5$, correspond, dans la figure (y) de cette même transformation, une courbe C_{10} du dixième ordre, ayant des points quadruples en $o'^4, 4'^4, 5'^4, 6'^4, 7'^4, 8'^4$, et des points simples aux points $l'_{2,3}\ l'_{1,3}, l'_{1,2}$ qui correspondent aux points e de la figure (p) dans la transformation $[p-y]^5$.

Il résulte de là que *les points x et y qui satisfont à la question forment une tranformation birationnelle du dixième ordre dont les points fondamentaux sont : pour la figure (y), $o'^4, 4'^4, 5'^4, 6'^4, 7'^4, 8'^4, e'_{2,3}, e'_{1,3}, e'_{1,2}$, et pour la figure ($x$), les points quintuples $1^5, 2^5, 3^5$ et les points doubles $p'^2_0, p'^2_4, p'^2_5, p'^2_6, p^2_7, p'^2_8$, qui, dans la figure ($x$), correspondent aux points $p_0, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ de la figure (p) de cette dernière transformation.*

2. La transformation du dixième ordre $[x-y]^{10}$ a douze points doubles. Donc :

Il y a douze points x qui rendent projectifs les faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad x[4', 5', 6', 7', 8'].$$

3. Supposons maintenant que les points $4', 5', 6', 7', 8'$ se confondent respectivement avec les points $4, 5, 6, 7, 8$.

(1) Dewulf et Schoute, *loc. cit.* (*Bulletin*, 1879).

Les deux faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad y[4, 5, 6, 7, 8],$$

quand on prend pour x et y des points correspondants de la transformation $[x - y]^{10}$, engendrent toutes les cubiques du faisceau de ces courbes déterminé par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Cette transformation $[x - y]^{10}$ ayant douze points doubles, il existe douze points x qui rendent projectifs les deux faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad x[4, 5, 6, 7, 8].$$

Chacun de ces douze points détermine une cubique du faisceau (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) et est un point double de ce faisceau. Donc :

Dans un faisceau de cubiques, il y a douze courbes qui ont un point double.

4. Pour construire ces douze points, remarquons qu'à un faisceau de droites passant par $e_{1,2}$ de la figure (p) de $[p - x]^2$ correspond, dans la figure (x) de cette transformation, un faisceau de droites passant par le point 3, et dans la transformation $[p - y]^5$ un faisceau de courbes du cinquième ordre C_5, ayant toutes des points doubles aux points 0, 4, 5, 6, 7, 8. Ces deux faisceaux de droites $e_{1,2}$ et de quintiques sont projectifs et engendrent une courbe C_6 du sixième ordre, qui a des points doubles aux points $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$ et qui renferme les points cherchés.

De même un faisceau de droites passant par $e_{1,3}$ conduit à une courbe C'_6 ayant des points doubles en $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$ et renfermant les points cherchés.

Ces courbes C_6 et C'_6 ont en commun les points doubles $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$, qui sont étrangers à la question; leurs $6 \times 6 - 4 \times 6 = 12$ autres points d'intersection sont donc les douze points cherchés.

On peut tracer les courbes C_6 et C'_6 comme nous l'avons indiqué ailleurs ([1]).

La construction des points doubles des courbes d'un faisceau de cubiques offre de l'intérêt, parce que les courbes déterminées par ces douze points servent de limite ou de transition entre des groupes de courbes du faisceau qui ont des formes différentes.

Janvier 1880.

QUESTION.

Combien existe-t-il de courbes rationnelles (unicursales) du quatrième ordre qui ont deux points doubles en a_1 et a_2 et qui passent par les sept points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

PAR M. ED. DEWULF,
Lieutenant-Colonel du Génie.

Les propriétés de la jacobienne d'un réseau de courbes permettent de résoudre très simplement ce problème.

On sait que la jacobienne d'un réseau de courbes de l'ordre n est de l'ordre $3(n-1)$ et qu'un point multiple de l'ordre i, commun à toutes les courbes du réseau, est de l'ordre $3i-1$ pour la jacobienne.

Laissons de côté le point 7; les quartiques qui ont un point double en chacun des points a_1 et a_2 et qui passent par les points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6 forment un ré-

---

([1]) *Construction d'une courbe unicursale du quatrième ordre, etc.* (*Bulletin des Sciences mathématiques;* 1879, 2e semestre).

seau dont la jacobienne, de l'ordre 9, a un point quintuple en chacun des points a_1 et a_2, et des points doubles aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6. Mais parmi les courbes de ce réseau se trouvent les quartiques composées d'une des cubiques passant par les points a_1, a_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et de la droite $a_1 a_2$. Ces quartiques composées ont un point double dont le lieu géométrique est la droite $a_1 a_2$. Donc la jacobienne du réseau se décompose en la droite $a_1 a_2$ et une courbe du huitième ordre Γ_8 ayant des points quadruples en a_1 et a_2 et des points doubles en 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Laissons maintenant de côté le point 6. Les quartiques qui ont des points doubles aux deux points a_1 et a_2 et qui passent par les points simples 1, 2, 3, 4, 5, 7 forment un réseau dont la jacobienne se compose de la droite $a_1 a_2$ et d'une courbe Γ'_8 ayant deux points quadruples en a_1 et a_2 et des points doubles en 1, 2, 3, 4, 5, 7.

Les courbes composées des deux réseaux sont étrangères à notre question; on aura donc le nombre des points doubles des courbes du faisceau $(a_1^2\, a_2^2\, 1, 2, 3, 4, 6, 7)$ en prenant les points d'intersection de Γ_8 et de Γ'_8 autres que a_1, a_2, 1, 2, 3, 4, 5. Ce nombre est

$$8 \times 8 - 2 \times 4 \times 4 - 5 \times 2 \times 2 = 12.$$

Nous avons obtenu ce même résultat par une voie plus longue, mais plus directe, dans un travail inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. III, septembre 1879.

Janvier 1880.

NOTE SUR LA QUESTION 393 [1];

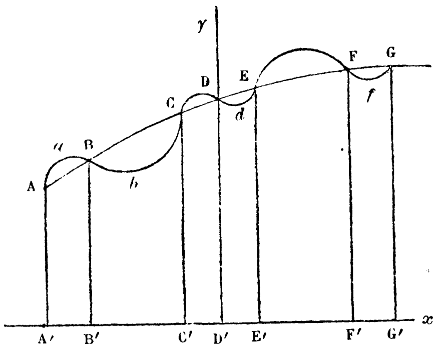
PAR M. E. CATALAN.

Rappelons d'abord la première partie de l'énoncé :

THÉORÈME. — *Étant donnée une parabole* ABCDE, *du troisième ordre, représentée par*

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

on fait passer, par les extrémités A, C, E *de trois or-*



données équidistantes, la parabole du second ordre, dont l'équation aurait la forme

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Ces courbes déterminent deux segments curvilignes ABCA, CDEC, *équivalents entre eux.*

(1) *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVII, p. 5, 205 et 207. On peut consulter, sur le même sujet : *Association française pour l'avancement des Sciences*, sessions de 1879 et 1880; *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (1880, Collignon); *Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XLIII; etc.

Cette proposition peut être ainsi modifiée et généralisée.

Soit ABC ... EFG *une parabole, d'ordre impair, représentée par*

$$Y = Ax^{2n+1} + Bx^{2n} + \ldots + Gx + H;$$

et soit AaBb ... FfG *la parabole, d'ordre pair, déterminée par les* $2n+1$ *points* A, B, ..., F, G *ayant, deux à deux, leurs abscisses égales et de signes contraires* (¹).

Cela posé, les trapèzes paraboliques A′AB ... FGG′, A′AaBb ... FfGG′ *sont équivalents.*

Appelons $a, b, \ldots, h$ les abscisses des points F, G, ...; et posons

$$f(x) = Ax(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)\ldots(x^2 - h^2).$$

Il est visible que l'équation de la seconde parabole est

$$y = Y - f(x) \quad (^2).$$

Soient P, p les aires des deux trapèzes. On a

$$P = \int_{-a}^{+a} Y\,dx, \quad p = \int_{-a}^{+a} y\,dx;$$

puis

$$P - p = \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

D'après la forme de $f(x)$, les éléments de la dernière intégrale sont, deux à deux, égaux et de signes contraires; donc *cette intégrale est nulle* (³), et

$$P = p.$$

(¹) Le point D, situé sur l'ordonnée moyenne, fait exception.

(²) En outre, *toutes les paraboles d'ordre* $2n+1$, *passant aux points* A′, B′, ..., E′, F′, sont représentées par

$$y = f(x).$$

(³) Elle représente l'aire *commune* de toutes les paraboles dont il est question dans la Note précédente.

Corollaire I. — *Les segments curvilignes correspondants,* AaB, FfG, BbC, EeF, ... *sont équivalents deux à deux.*

Corollaire II. — *Les trapèzes paraboliques* B′BFF′, B′BbCc ... eFF′, ... *sont équivalents deux à deux.*

Remarque sur les courbes paraboliques. — La parabole d'ordre n, déterminée par $n+1$ points (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) a pour équation, comme l'on sait,

$$y = f(x)\left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \frac{y_1}{(x-x_1)f'(x_1)} + \ldots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)}\right],$$

en supposant

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \quad (^1).$$

Cela posé :

Toutes les paraboles d'ordre $n+1$, *passant en ces* $n+1$ *points, sont représentées par*

$$y = f(x)\left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \ldots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)} + \mathrm{A}\right].$$

2° *Toutes les paraboles d'ordre* $n+2$, *passant en ces mêmes points, sont représentées par*

$$y = f(x)\left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \ldots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)} + \mathrm{A}x + \mathrm{B}\right].$$

Liège, 21 mai 1881.

---

(1) D'après la *formule d'interpolation de Lagrange*, ou plutôt, par la *théorie de la décomposition des fractions rationnelles*.

NOTE SUR UN SYSTÈME DE COURBES ORTHOGONALES ET HOMOFOCALES;

PAR M. A. LEGOUX,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Les courbes qui font le sujet de cette Note sont représentées par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} = 1,$$

où λ est un paramètre variable, f une fonction de x et de y, a et b des constantes.

Ces courbes jouissent des propriétés suivantes :

1° Il en passe deux par un point quelconque du plan.

2° Elles ont une enveloppe qui est identique à celle des coniques représentées par l'équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} = 1.$$

Cette enveloppe se compose donc d'un système de quatre droites imaginaires passant par les points circulaires de l'infini.

Il résulte de là que, quelle que soit la fonction f, toutes les courbes représentées par l'équation (1) ont des foyers qui coïncident avec les foyers des coniques représentées par l'équation (2).

3° Les courbes représentées par l'équation (1) ne sont pas orthogonales en général. Il faut pour cela que la fonction f satisfasse à une équation aux dérivées partielles, qu'on obtient sans peine en exprimant la condition d'orthogonalité, et qui est la suivante

$$(ab + bx^2 + ay^2)(p^2 + q^2) = 2f(bpx + aqy),$$

où p et q représentent $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$.

Si l'on fait $a = 0$ dans l'équation (1), cette équation devient

$$(3) \qquad x(p^2 + q^2) = 2fp.$$

En appliquant les formules connues pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, on trouve

$$p = \alpha x, \quad q = \sqrt{2\alpha f - \alpha^2 x^2},$$

α représentant une constante arbitraire. Substituant dans $df = p\,dx + q\,dy$, on a

$$df = \alpha x\,dx + \sqrt{2\alpha f - \alpha^2 x^2}\,dy,$$

d'où

$$dy = \frac{df - \alpha x\,dx}{\sqrt{\alpha}\sqrt{2f - \alpha x^2}},$$

d'où enfin

$$(4) \qquad 2f = \alpha[x^2 + (y + \beta)^2],$$

β étant une autre constante. C'est une intégrale complète de l'équation (3). Si l'on remplace f par cette valeur dans l'équation (1), on obtient des quartiques bicirculaires; mais, si l'on remplace f par l'intégrale générale, à cause de la fonction arbitraire qui entre dans cette intégrale, on aura une infinité de systèmes orthogonaux.

On sait que l'on obtient l'intégrale générale en éliminant α et β entre l'équation (4) et les deux suivantes,

$$\beta = \varpi(\alpha),$$
$$\frac{df}{d\alpha} + \frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

où ϖ est une fonction arbitraire.

Si l'on pose, par exemple, $\beta = \alpha^m$, on en déduira

$$2f = \left[\frac{-(m+1)y + \sqrt{(m+1)^2 y^2 - (2m+1)(x^2+y^2)}}{2m+1}\right]^{\frac{1}{m}}$$
$$\times \left\{ x^2 + \left[\frac{my + \sqrt{(m+1)^2 y^2 - (2m+1)(x^2+y^2)}}{2m+1}\right]^2 \right\}.$$

Pour $m = 1$, on a

$$27f = -y(y^2 + 9x^2) \pm (y^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En mettant à la place de f dans l'équation (1) cette dernière valeur, on trouve un système de courbes orthogonales du douzième ordre, qui ont pour points quadruples les points circulaires de l'infini.

DÉMONSTRATION DE PROPOSITIONS ÉNONCÉES

(voir 2e série, t. XVII, p. 178);

PAR M. S. RÉALIS.

1° Si l'équation

$$x^3 + Px + Q = 0$$

admet la racine a, son premier membre est le produit de deux facteurs tels que $x - a$, $x^2 + ax + m$, où m est nécessairement entier si P, Q, a sont entiers.

On a donc

$$P = -a^2 + m, \quad Q = -am,$$

et par suite

$$P^2 - 4Qa = (a^2 + m)^2,$$
$$\begin{aligned}(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) &= (a^4 - 4ma^2 - m^2)^2 \\ &= [5(a^2 - 4m)^2 - (2a^2 - 9m)^2]^2 \\ &= [(a^2 - 2m)^2 - 5m^2]^2,\end{aligned}$$

b et c étant les deux autres racines de l'équation.

2° Si les trois racines a, b, c sont entières, l'une d'elles est nécessairement un nombre pair (à cause de $a+b+c=0$). On peut donc poser

$$a=2\alpha,\quad b=-\alpha+\beta,\quad c=-\alpha-\beta,$$

α et β étant entiers.

On aura donc

$$P=-(3\alpha^2+\beta^2),\quad Q=-2\alpha(\alpha^2-\beta^2),$$

et par suite

$$\begin{aligned}
P^2-4Qa&=(5\alpha^2-\beta^2)^2=[(5\alpha-2\beta)^2-5(2\alpha-\beta)^2]^2,\\
P^2-4Qb&=(\alpha^2+4\alpha\beta-\beta^2)^2\\
&=[5\alpha^2-(2\alpha-\beta)^2]^2=[(\alpha+2\beta)^2-5\beta^2]^2,\\
P^2-4Qc&=(\alpha^2-4\alpha\beta-\beta^2)^2\\
&=[5\alpha^2-(2\alpha+\beta)^2]^2=[(\alpha-2\beta)^2-5\beta^2]^2.
\end{aligned}$$

En outre,

$$(P^2-4Qb)(P^2-4Qc)=[(\alpha^2-\beta^2)^2-16\alpha^2\beta^2]^2.$$

3° Deux racines b, c étant exprimées par des nombres complexes entiers, la troisième racine a ne peut être qu'un nombre pair.

On peut donc poser

$$a=2\alpha,\quad b=-\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad c=-\alpha-\beta\sqrt{-1},$$

d'où

$$P=-(3\alpha^2-\beta^2),\quad Q=-2\alpha(\alpha^2+\beta^2),$$

et par suite

$$\begin{aligned}
P^2-4Qa&=(5\alpha^2+\beta^2)^2,\\
(P^2-4Qb)(P^2-4Qc)&=[5(2\alpha\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2]^2\\
&=[5(\alpha^2+\beta^2)^2-(2\alpha^2-2\beta^2)^2]^2\\
&=[(\alpha^2+9\beta^2)^2-5(4\beta^2)^2]^2\\
&=[(\alpha^2+\beta^2)^2+16(\alpha\beta)^2]^2.
\end{aligned}$$

4° Nous avons d'abord, par identité,

$$(P^2 - 4Qa)(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = (P^3 + 8Q^2)^2.$$

Si P et Q sont entiers, et que la quantité

$$-(4P^3 + 27Q^2)$$

soit égale à un carré R^2, il est visible que

$$\begin{aligned} \pm(P^3 + 8Q^2) &= \frac{\pm 5Q^2 \mp R^2}{4} \\ &= \frac{\pm(5Q + 2R)^2 \pm 5(2Q + R)^2}{4}, \end{aligned}$$

formules où l'on choisira les signes supérieurs, ou les signes inférieurs, de manière que chaque membre soit positif. On peut prouver d'ailleurs qu'un nombre entier compris dans la forme $\frac{5u^2 - v^2}{4}$ est compris aussi dans la forme $5u^2 - v^2$; de même pour un entier compris dans la forme $\frac{u^2 - 5v^2}{4}$ (*voir* la *Théorie des nombres* de Legendre, t. I, p. 205. Du reste, la preuve dont il s'agit peut aussi se tirer de formules directes, sans rien emprunter à la théorie des nombres).

Si c'est la quantité $4P^3 + 27Q^2$ qui est égale à un carré R^2, auquel cas Q et R sont nécessairement des nombres pairs, on a

$$P^3 + 8Q^2 = \frac{5Q^2 + R^2}{4},$$

où le second membre est évidemment un nombre de la forme $5u^2 + v^2$.

L'identité qui justifie et complète la proposition énoncée à la fin de la *Remarque* consiste dans la formule

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = kz^2,$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}
z &= 3\alpha^2 + \beta^2,\\
k &= A^2 + (A + B + C)^2 + C^2,\\
z_1 &= A(2\alpha)^2 + B\,2\alpha(\alpha - \beta) + C(\alpha - \beta)^2,\\
z_2 &= A(-\alpha + \beta)^2 + B(-\alpha + \beta)(\alpha + \beta) + C(\alpha + \beta)^2,\\
z_3 &= A(\alpha + \beta)^2 + B(\alpha + \beta)2\alpha + C(2\alpha)^2.
\end{aligned}$$

Cette formule peut s'écrire

$$\left(\frac{z_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{z}\right)^2 = k.$$

De la sorte, le second membre est indépendant de α et β, et peut représenter tout nombre égal à la somme de trois carrés entiers, tandis que le premier membre peut représenter, d'une infinité de manières, une somme de trois carrés rationnels.

NOTE SUR DES FORMULES DE JOACHIMSTHAL;

PAR M. A. DROZ.

Dans le *Journal de Crelle* (*Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie*, t. XL), Joachimsthal a donné deux formules pour la surface du triangle dont on connaît les équations des trois côtés, et pour le volume du tétraèdre si l'on connaît de même les équations des quatre plans.

Mon intention dans cette Note est de donner une démonstration très simple de ces deux formules.

Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Je représente par $\alpha_{\varphi\psi}$ le coefficient de $a_{\varphi\psi}$ dans le déterminant Δ.

On sait que

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n3} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1}$$

(Binet et Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique*).

Expression de la surface S *du triangle compris entre les trois droites*

$$(1) \qquad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$

$$(2) \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$

$$(3) \qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

Si x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 sont les coordonnées des points d'intersection des droites (23), (31), (12), on aura

$$x_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}}, \quad y_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}},$$

$$x_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{23}}, \quad y_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{23}},$$

$$x_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}, \quad y_3 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}.$$

Mais

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha_{13}\alpha_{23}\alpha_{33}} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

$$(\mathrm{I}) \qquad 2S = \frac{\Delta^2}{\alpha_{13}\alpha_{23}\alpha_{33}}.$$

Expression du volume V *du tétraèdre compris entre* *les quatre plans*

$$(1)\qquad a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0,$$
$$(2)\qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0,$$
$$(3)\qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0,$$
$$(5)\qquad a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 les coordonnées des points d'intersection des plans (234), (341), (412), (123); on aura

$$x_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{14}},\quad y_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{14}},\quad z_1 = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{14}},$$
$$x_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{24}},\quad y_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{24}},\quad z_2 = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{24}},$$
$$x_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{34}},\quad y_3 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{34}},\quad z_3 = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{34}},$$
$$x_4 = \frac{\alpha_{41}}{\alpha_{44}},\quad y_4 = \frac{\alpha_{42}}{\alpha_{44}},\quad z_4 = \frac{\alpha_{43}}{\alpha_{44}}.$$

Mais

$$6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{\alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{34}\alpha_{44}} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$(\text{II})\qquad 6V = \frac{\Delta^3}{\alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{34}\alpha_{44}}.$$

NOTE SUR LES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ EST DE RÉVOLUTION;

PAR M. GENTY.

Soient

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

l'équation d'une surface S du second degré à centre, rapportée à ses trois plans principaux,

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

celle de sa polaire réciproque S_1 par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

L'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha x & \beta y & \gamma z \\ \frac{x}{\alpha} & \frac{y}{\beta} & \frac{z}{\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que les plans polaires d'un point quelconque (x, y, z) par rapport à la sphère et aux deux quadriques sont parallèles à une même droite, représente les trois plans principaux des surfaces S et S_1; en effet, cette équation développée devient

$$(1) \qquad \frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est évidemment un covariant, puisqu'il exprime une propriété géométrique des trois surfaces complètement indépendante du choix des axes. Si donc

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

sont les équations des quadriques S et S_1 rapportées maintenant à trois axes rectangulaires quelconques passant par leur centre, l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = 0$$

représentera les trois plans principaux de ces deux quadriques.

Mais si la surface S est de révolution, deux des trois quantités α, β, γ qui entrent dans l'équation (1) sont égales et le premier membre de cette équation est identiquement nul.

On obtiendra donc les conditions qui expriment que la surface S est de révolution en écrivant que le premier membre de l'équation (2) est identiquement nul.

Soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

l'équation développée de la surface S; celle de la surface S_1 sera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = \Delta,$$

en posant

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$
$$A = bc - f^2, \quad B = ca - g^2, \quad G = ab - h^2,$$
$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch,$$

et l'équation (2) prendra la forme

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ ax + hy + gz & hx + by + fz & gx + fy + cz \\ Ax + Hy + Gz & Hx + By + Fz & Gx + Fy + Cz \end{vmatrix} = 0.$$

En identifiant à zéro le premier membre de cette équation, on obtient de suite les conditions cherchées sous la forme

$$\frac{b-c}{B-C} = \frac{c-a}{C-A} = \frac{a-b}{A-B} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \frac{h}{H}.$$

On reconnaît sans peine que l'ensemble de ces équations ne représente que deux conditions réellement distinctes.

En remplaçant F, G et H par leurs valeurs dans les équations

$$\frac{F}{f} = \frac{G}{g} = \frac{H}{h},$$

on a

$$\frac{gh-af}{f} = \frac{hf-bg}{g} = \frac{fg-ch}{h}$$

ou bien

$$a - \frac{gh}{f} = b - \frac{hf}{g} = c - \frac{fg}{h};$$

c'est la forme habituelle des équations de condition.

QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

En un point M *de la chaînette définie en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$(1) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène la tangente que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre T *avec* OX, *puis on fait tourner la figure autour de* OX.

Exprimer la différence des aires décrites par l'arc de chaînette AM, A *étant le sommet de la courbe et* *par la tangente* MT : 1° *en fonction de l'abscisse de* M, 2° *en fonction de l'abscisse de* T.

Soient x, y les coordonnées du point M. La tangente MT engendrera la surface latérale d'un cône : $\pi y \times \mathrm{MT}$. Calculons d'abord MT. L'équation (1) donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right); \tag{2}$$

par suite, l'équation de la tangente au point M est

$$\mathrm{Y} - y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)(\mathrm{X} - x).$$

En y faisant $\mathrm{Y} = 0$, on aura l'abscisse du point T

$$\mathrm{X} = x - a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} = x - \frac{2y}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}. \tag{3}$$

On a donc

$$\mathrm{MT}^2 = y^2 + \frac{4y^2}{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2} = \frac{y^2\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2},$$

d'où

$$\mathrm{MT} = y\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} = \frac{2}{a}\,\frac{y^2}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}};$$

par suite, la surface engendrée par MT a pour expression

$$\text{surf. MT} = \frac{2\pi y^3}{a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)}.$$

D'autre part,

$$\text{surf. AM} = 2\pi \int_0^x y\, ds,$$

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{y\,dx}{a},$$

$$\text{surf. AM} = 2\pi \int_0^x \frac{y^2}{a}\, dx = \frac{\pi a}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi a}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) dx,$$

$$\text{surf. AM} = \frac{\pi a}{2}\left(\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} + 2x\right)$$

$$= \frac{\pi a y}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + \pi a x.$$

Donc

$$\text{surf. AM} - \text{surf. MT} = \pi a x - \frac{\pi a y}{2}\left[\frac{4y^2}{a^2\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)}\right]\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$= \pi a\left[x - \frac{2y}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}\right] = \pi a X.$$

DÉCOMPOSITION DES NOMBRES $f^{12} - 9g^{12}$ ET DU DOUBLE DE CES NOMBRES EN DEUX CUBES RATIONNELS;

PAR M. C. HENRY.

On doit à M. Édouard Lucas ces deux identités [1]

$$(1)\quad \begin{cases} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 \\ \qquad + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 = 2^2.3^2 LM(L^2 + 3M^2)^2, \end{cases}$$

$$(2)\qquad (L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L(L^2 + 3M^2),$$

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 91.

d'où l'on tire aisément, par des substitutions convenables, ce théorème ([1]) :

Le quadruple et le carré de $4p^6 + 27q^6$ est décomposable en deux cubes rationnels.

De l'identité (2) on peut déduire également cette autre proposition :

THÉORÈME. — *Les nombres de la forme $f^{12} - 9g^{12}$ et leur double sont décomposables en deux cubes rationnels.*

En effet, si dans l'identité (2) on remplace

$$\begin{array}{ll} \mathrm{L} & \text{par} \quad f^6(f^{12} - 9g^{12}), \\ \mathrm{M} & \text{par} \quad 3g^6(f^{12} - g^{12}), \end{array}$$

on a facilement

$$\mathrm{L}^2 + 3\mathrm{M}^2 = (f^{12} + 3g^{12})^3,$$

et, en posant

$$\mathrm{A} = f^{12} - 9g^{12},$$

il vient

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{\mathrm{A}f^6 + 3g^6(f^{12} - g^{12})}{f^2(f^{12} + 3g^{12})}\right]^3 \\ \quad + \left[\dfrac{\mathrm{A}f^6 - 3g^6(f^{12} - g^{12})}{f^2(f^{12} + 3g^{12})}\right]^3 = \mathrm{A}. \end{array} \right.$$

Si, dans la même identité (2), on fait

$$\mathrm{L} = 4f^3g^3(f^6 - 9g^6),$$
$$\mathrm{M} = f^{12} - 18f^6g^6 + 9g^{12},$$

on a

$$(4) \quad \left[\frac{\mathrm{L} + \mathrm{M}}{2fg(f^6 + 3g^6)}\right]^3 + \left[\frac{\mathrm{L} - \mathrm{M}}{2fg(f^6 + 3g^6)}\right]^3 = \mathrm{A}.$$

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 430.

Donc les nombres de la forme $f'^2 - 9g'^2$ et leur double sont des sommes de deux cubes rationnels.

Les nombres f et g sont évidemment supposés inégaux.

QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Un corps solide se meut autour d'un point fixe : trouver à chaque instant le lieu des points du corps pour lesquels l'accélération est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation.

Désignant par u, v, w les projections de la vitesse du point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, on a

$$u = q\zeta - r\eta,$$
$$v = r\xi - p\zeta,$$
$$w = p\eta - q\xi.$$

En différentiant ces équations, en considérant ξ, η, ζ comme constantes, on aura les projections de l'accélération suivant les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$:

$$\frac{du}{dt} = \zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt},$$
$$\frac{dv}{dt} = \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt},$$
$$\frac{dw}{dt} = \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt}.$$

L'accélération fait avec les axes mobiles des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$.

D'autre part, l'axe instantané de rotation, qui a pour équations

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r},$$

fait avec les mêmes axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à p, q, r. Ces deux directions devant être rectangulaires, on a l'équation

$$p\left(\zeta \frac{dq}{dt} - \eta \frac{dr}{dt}\right)$$
$$+ q\left(\xi \frac{dr}{dt} - \zeta \frac{dp}{dt}\right) + r\left(\eta \frac{dp}{dt} - \xi \frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

ou

$$\left(q \frac{dr}{dt} - r \frac{dq}{dt}\right)\xi$$
$$+ \left(r \frac{dp}{dt} - p \frac{dr}{dt}\right)\eta + \left(p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt}\right)\zeta = 0,$$

ou encore

$$q^2 d\frac{r}{q}\xi + r^2 d\frac{p}{r}\eta + p^2 d\frac{q}{p}\zeta = 0.$$

Cette équation, qui représente un plan passant par l'origine, jointe à l'équation de la surface, détermine le lieu cherché.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1881).

Composition mathématique (trois heures).

Première question. — On donne un cône de révolution, dont la génératrice SA fait avec l'axe Sz un angle β, et une ellipse dont les demi-axes sont a et b :

1° Démontrer que l'ellipse peut toujours être obtenue en coupant le cône par un plan convenablement déterminé;

2° Si AB est la trace du plan sécant sur le plan méridien ASB qui lui est perpendiculaire, démontrer la relation $SA.SB = \frac{b^2}{\sin^2\beta}$;

3° Calculer en fonction des données a, b, β, par des formules logarithmiques, l'angle SAB, la portion SA de la génératrice, ainsi que l'aire du triangle SAB.

On appliquera ces formules aux nombres suivants :

$$a = 43^{m},906,\quad b = 25^{m},4346,\quad \beta = 5^{\circ}\,12'\,8'',48.$$

Seconde question. — Résoudre l'équation

$$\sqrt{mx+a}+\sqrt{x+b}=c,$$

les lettres a, b, c, m désignant des nombres donnés dont le dernier est supérieur ou au moins égal à 1.

Condition de réalité des racines. — Limites de c.

Épure (deux heures et demie).

On donne un plan $P\alpha P'$ incliné de 40° sur le plan horizontal, et dont la trace horizontale fait avec la ligne de terre un angle de 36°. Un cercle, situé sur ce plan, dans le premier dièdre, est tangent aux deux traces αP et $\alpha P'$, et a pour diamètre $0^{m},054$. Ce cercle est la base d'un cône droit, situé au-dessus du plan $P\alpha P'$, et dont la hauteur égale $0^{m},108$. On demande :

1° De construire les projections de ce cône;

2° De trouver les points de rencontre de ce cône avec la parallèle à la ligne de terre menée par le milieu de la hauteur;

3° De mener le plan tangent au cône par le point de rencontre situé à droite.

CORRESPONDANCE.

Lettre adressée à M. Brisse.

Monsieur et cher collègue,

Voici, au sujet de la question 1357, posée par M. Barbarin, dans ce Tome, page 48, et résolue par M. Aignan, page 282, quelques remarques que vous jugerez peut-être dignes d'intérêt.

La propriété qui définit le lieu géométrique est projective, et, puisque tout triangle peut être considéré comme la projection d'un triangle équilatéral, il suffit de considérer le cas où le triangle est équilatéral.

Prenant ce triangle comme triangle de référence, on trouve comme équation du lieu

$$(1) \qquad xyz = k(x+y)(y+z)(z+x).$$

Cette équation permet de reconnaître sans peine toutes les propriétés indiquées par M. Aignan. J'ajouterai la suivante : pour $k = -1$, la cubique se décompose en une droite à l'infini et une circonférence circonscrite au triangle de référence.

Il en résulte ces deux théorèmes de Géométrie, dont la démonstration directe est sans difficulté :

Théorème. — *On joint les sommets d'un triangle équilatéral à un point O de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments : le lieu du point O pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des côtés du triangle est la circonférence circonscrite au triangle.*

THÉORÈME. — *Par les sommets d'un triangle quelconque, on mène trois parallèles qui interceptent sur les côtés du triangle six segments : le produit de trois segments non consécutifs est toujours égal au produit des côtés du triangle.*

Les cubiques (1) sont des courbes à trois axes de symétrie. L'équation générale des cubiques à trois axes de symétrie est, en prenant un triangle de référence dont les côtés soient perpendiculaires aux axes de symétrie,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &m(x+y+z)^3 \\ &\quad + n(x+y+z)(xy+yz+zx) + pxyz = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut toujours disposer du triangle de référence de manière à faire disparaître un des termes de cette équation. Si l'on fait disparaître le premier, on retombe sur l'équation (1). Donc les cubiques (1) comprennent toutes les cubiques à trois axes de symétrie. Si l'on fait disparaître le second terme, l'équation (2) devient

$$(3)\qquad xyz = k(x+y+z)^3.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Les cubiques à trois axes de symétrie sont telles que le produit des distances d'un de leurs points aux trois côtés d'un triangle équilatéral est constant.*

Remarquons, en terminant, que l'équation (3) ne contient pas de cubique décomposable : elle ne se déduit de l'équation (2) que si p n'est pas nul, et de l'équation (1) que si k n'est pas égal à -1.

LUCIEN LÉVY,
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1335
(voir 2ᵉ série, t. XVIII, p. 479);

PAR M. MARCELLO ROCCHETTI.

Démontrer :

1° *Que les solutions entières et positives de l'équation* $24x^2 + 1 = y^2$, *dont les deux premières sont* $x = 0$ *et* $y = 1$; $x = 1$ *et* $y = 5$, *se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de* x *ou de* y *de dix fois la dernière pour obtenir la suivante ;*

2° *Que les solutions entières et positives de l'équation* $2x^2 + 1 = 3y^2$, *dont les deux premières sont* $x = 1$ *et* $y = 1$; $x = 11$ *et* $y = 9$, *s'obtiennent comme celles de l'équation précédente* (1°);

3° *Que toute valeur du nombre* $X = 3x^2 + 2$ (2°) *ayant la double propriété d'être égale à la somme des carrés de trois entiers consécutifs et à celle des carrés de deux entiers consécutifs est de la forme* $360n + 5$.

(LIONNET.)

1° Si (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., (α_n, β_n) sont les n premières solutions de l'équation $24x^2 + 1 = y^2$, déduites chacune des deux précédentes de la manière indiquée, la loi énoncée sera vraie, en général, si l'on démontre que

$$24\alpha_{n+1}^2 + 1 = \beta_{n+1}^2, \tag{1}$$

où

$$\alpha_{n+1} = 10\alpha_n - \alpha_{n-1} \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = 10\beta_n - \beta_{n-1}. \tag{2}$$

Substituons les valeurs (2) dans l'équation (1); celle-ci est vérifiée si

$$24\alpha_n\alpha_{n-1} = \beta_n\beta_{n-1} - 5,$$

relation qui devient

$$24\alpha_2\alpha_1 = \beta_2\beta_1 - 5.$$

Mais cette dernière équation est satisfaite en faisant

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 5;$$

donc, etc.

2° On doit démontrer semblablement que

$$2\alpha_n\alpha_{n-1} = 3\beta_n\beta_{n-1} - 5,$$

relation qui devient

$$2\alpha_2\alpha_1 = 3\beta_2\beta_1 - 5.$$

Mais cette équation est satisfaite en faisant

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 11, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 9;$$

donc, etc.

Remarque. — Pour les valeurs de

$$x = 1, \ 11, \ 109, \ 1079, \ \ldots,$$

x^2 est de la forme $120n+1$, et, par conséquent, $3x^2+2$ est de la forme $360n+5$.

3° L'équation

$$2z^2 + 2z + 1 = 3x^2 + 1$$

donne

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{6x^2+3}}{2}.$$

On aura pour z des valeurs entières et positives quand $+\sqrt{6x^2+3}$ sera un nombre entier nécessairement divisible par 3. Donc toute valeur de x entière et positive qui vérifie la relation $2x^2+1=3y^2$, où y est un nombre entier, donne une valeur de z entière et positive.

Mais les solutions indiquées ont été déterminées (2°); elles sont

Pour x..............	1, 11, 109, 1079, ...,
Pour y..............	1, 9, 89, 881, ...;

donc nous avons

Pour $z=\dfrac{3y-1}{2}$......	1, 13, 133, 1321, ...

Exemple :

Pour $x=1$......	$N=0+1^2+2^2=1^2+2^2$,
Pour $x=11$.....	$N=10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$,
Pour $x=109$....	$N=108^2+109^2+110^2=133^2+134^2$,

....

Note. — La même question a été résolue par MM. F. Pisani; J. Lissençon; Moret-Blanc; A. Leinekugel.

Question 1345

(voir 2e série, t. XIX, p. 432);

PAR M. N. GOFFART.

Démontrer que toute droite passant par le sommet commun aux trois coniques représentées par les équations

$$y^2-2px=0,$$
$$2px^2+\alpha(y^2-2px)=0,$$
$$2px^2-\alpha(y^2-2px)=0$$

les coupe en trois autres points qui forment avec le sommet une proportion harmonique, quelle que soit la valeur de α. (ÉD. GUILLET.)

Soit une droite quelconque $y = mx$, passant au sommet. Elle coupe respectivement les trois coniques aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), et l'on a, par conséquent,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{m^2}{2p},$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{m^2}{p},$$

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-\alpha} + \frac{m^2}{p}.$$

Donc

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{x_1},$$

relation indépendante de α et qui démontre la proposition.

Note. — La même question a été résolue par MM. H. Lez; Moret-Blanc; F. Pisani; J. Boudènes et J. Perret, élèves du lycée de Grenoble; A. Droz, au Gymnase cantonal de Porrentruy (Berne); E. Pecquery, élève du lycée du Havre; H. Herzog, du lycée de Rouen.

Question 1347

(voir 2e série, t. XIX, p. 432);

PAR M. N. GOFFART.

Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés on obtienne un faisceau en involution se compose de quinze cubiques du troisième ordre qui passent toutes par les six points donnés. (DEWULF.)

Soient

A et A', B et B', C et C'

les points donnés, et leurs coordonnées respectives

$$x_1, y_1 \text{ et } x'_1, y'_1, \quad x_2, y_2 \text{ et } x'_2, y'_2, \quad x_3, y_3 \text{ et } x'_3, y'_3.$$

Soit M (x,y) le point mobile; prenons pour axe des x une droite OX quelconque, coupant les droites MA, MA′, MB, ..., aux points

$$a \text{ et } a', \quad b \text{ et } b', \quad c \text{ et } c',$$

dont les distances respectives à l'origine sont

$$\alpha \text{ et } \alpha', \quad \beta \text{ et } \beta', \quad \gamma \text{ et } \gamma'.$$

Nous exprimerons que le faisceau est en involution en écrivant l'équation symétrique

$$ab'.bc'.ca' + a'b.b'c.c'a = 0$$

ou

$$(\alpha - \beta')(\beta - \gamma')(\gamma - \alpha') + (\alpha' - \beta)(\beta' - \gamma)(\gamma' - \alpha) = 0.$$

Exprimons en fonction des coordonnées toutes ces différences. Remarquons que la droite MAa, par exemple, a pour équation

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_1 - \alpha}{y_1},$$

d'où

$$\alpha = \frac{x_1 y - x y_1}{y - y_1}.$$

Par analogie, on a

$$\alpha = \frac{x_1 y - x y_1}{y - y_1}, \quad \alpha' = \frac{x'_1 y - x y'_1}{y - y'_1},$$
$$\beta = \frac{x_2 y - x y_2}{y - y_2}, \quad \beta' = \frac{x'_2 y - x y'_2}{y - y'_2},$$
$$\gamma = \frac{x_3 y - x y_3}{y - y_3}, \quad \gamma' = \frac{x'_3 y - x y'_3}{y - y'_3}.$$

Formons maintenant les différences qui composent le produit; nous aurons, par exemple,

$$\alpha - \beta' = \frac{y[(x_1 y - x y_1) - (x'_2 y - x y'_2) + (x'_2 y_1 - x_1 y'_2)]}{(y - y_1)(y - y'_2)}$$

ou encore

$$\alpha - \beta' = \frac{y \begin{vmatrix} 1 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{(y - y_1)(y - y'_2)}.$$

On formerait de même les autres différences, et l'on aurait, après substitution et réduction,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x'_1 & y'_1 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x'_1 & y'_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x'_3 & y'_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de cette courbe est, comme on le voit, du troisième degré, et l'on remarque que, si l'on substitue à x et y les coordonnées de l'un des points donnés, x_1, y_1 par exemple, un déterminant facteur s'annule dans chaque produit, ce qui revient à dire que la courbe passe par les six points donnés.

L'ordre des lettres $a, a', b, \ldots$ étant posé comme tout à l'heure, on peut admettre que les droites MA, MA', ... soient prises dans un ordre différent pour produire la suite $a, a', b, \ldots$. Dès lors, on produira autant de courbes analogues à la précédente qu'on pourra former de faisceaux, tels que M(ABCC'), produisant l'involution $(aa'bb'cc')$, c'est-à-dire autant de courbes que de combinaisons de six objets quatre à quatre, soit $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$.

Note. — La même question a été résolue par MM. F. Dumont, chargé de cours au lycée de Tournon, et Moret-Blanc.

Question 1349

(voir 2e série, t. XIX, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver un nombre positif ayant la double propriété d'être égal au produit de trois entiers consécutifs et à celui de deux entiers consécutifs. (LIONNET.)

Il faut résoudre en nombres entiers et positifs l'équation indéterminée

$$(1)\qquad \begin{cases} y(y+1)(y+2) = x(x+1), \\ \text{ou} \\ y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x. \end{cases}$$

En multipliant les deux membres par 4, et ajoutant 1, on a

$$(2)\qquad 4y^3 + 12y^2 + 8y + 1 = (2x+1)^2.$$

La question se réduit donc à trouver un nombre entier y, tel que $4y^3 + 12y^2 + 8y + 1$ soit un carré parfait. Posons

$$(3)\qquad 4y^3 + 12y^2 + 8y + 1 = (my - 1)^2,$$

d'où

$$4y^2 + (12 - m^2)y + (2m + 8) = 0;$$

$$y = \frac{m^2 - 12 \pm \sqrt{m^4 - 24m^2 - 32m + 16}}{8}.$$

Il faut que $m^4 - 24m^2 - 32m + 16$ soit le carré d'un multiple de 4; on peut donc poser $m = 2n$, et, en divisant par 16 l'expression qui doit être un carré, on a

$$n^4 - 6n^2 - 4n + 1,$$

qui doit être un carré.

On voit immédiatement que cette condition est satisfaite par $n = 3$, d'où $m = 6$ et $y = \frac{24 \pm 16}{8}$, ce qui donne les deux solutions $y = 1$ et $y = 5$, ou

$$1.2.3 = 2.3 = 6,$$
$$5.6.7 = 14.15 = 210.$$

Les nombres 6 et 210 jouissent donc de la propriété énoncée (¹).

(¹) *Note du Rédacteur.* — D'après les équations (2) et (3) on a

$$2x + 1 = my - 1,$$
$$x + 1 = \frac{m}{2} y;$$

donc, si m est effectivement un nombre pair $2n$, $x + 1 = ny$, c'est-à-dire que $x + 1$ est multiple de y. En admettant *a priori* cette hypothèse, un calcul très simple fait connaître les solutions de la question proposée.

En remplaçant $x + 1$ par ny, l'équation (1) devient

$$y^2 - (n^2 - 3)y + n + 2 = 0.$$

Le nombre entier n ne peut être moindre que 3, car, pour $n = 1$ et $n = 2$, les racines de l'équation précédente sont imaginaires.

Le nombre n ne peut surpasser 3. En effet, si l'on remplace successivement y par $n^2 - 3$ et $n^2 - 4$, le premier membre de l'équation

$$y^2 - (n^2 - 3)y + n + 2 = 0$$

prend les valeurs

$$n + 2 \quad \text{et} \quad -n^2 + n + 6 = (3 - n)(n + 2);$$

la première est évidemment positive, et l'autre est négative quand n surpasse 3. Dans ce cas, l'équation a une racine comprise entre les deux entiers consécutifs $n - 4$, $n - 3$; l'autre racine est comprise entre 0 et 1, comme il est facile de le voir, en ayant égard à ce que la somme des deux racines est $n^2 - 3$. Par conséquent, aucune des deux racines n'est égale à un nombre entier.

Il faut donc que $n = 3$; il en résulte

$$y^2 - 6y + 5 = 0, \quad y = 1 \quad \text{et} \quad y = 5,$$

d'où

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = 14.$$

Ce sont les deux solutions trouvées par M. Moret-Blanc.

(G.)

SUR UN THÉORÈME DE PAPPUS;

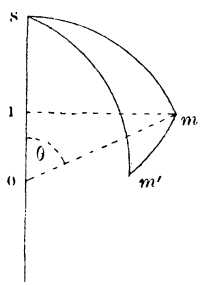
Par M. H. RESAL.

L'énoncé de ce théorème, qui est peu ou point connu, a été traduit de la manière suivante :

Si du sommet d'un hémisphère on décrit une spirale par un point partant de ce sommet et marchant uniformément sur le quart de cercle qu'il parcourra pendant que le quart de cercle fera une révolution entière autour de l'hémisphère, la portion de la surface sphérique comprise entre cette spirale et la base sera égale au carré du diamètre.

Soient

R le rayon de l'hémisphère;
S son sommet;
O son centre;
m une position quelconque du mobile;



m' une position qui en est infiniment voisine;
I la projection de m sur OS;
θ l'angle mOS;
φ l'angle dont le quart de cercle a tourné.

Comme on a $\varphi = 2\pi$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on voit que

$$\theta = \frac{\varphi}{4}.$$

On reconnaît facilement que

$$SI = R\left(1 - \cos\frac{\varphi}{4}\right),$$

$$\text{aire}\, S mm' = 2\pi R . SI \times \frac{d\varphi}{2\pi} = R^2\left(1 - \cos\frac{\varphi}{4}\right) d\varphi.$$

En intégrant cette expression entre les limites o et 2π, on trouve pour l'aire comprise entre le sommet S et la spirale

$$R^2(2\pi - 4).$$

Par conséquent, l'aire comprise entre la courbe et la base est $4R^2$, ce qui est conforme à l'énoncé.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. V. JAMET,

Professeur au lycée de Nice (1).

VII. Voyons maintenant comment se transforment, dans un cône du second ordre, les lignes et les plans qui jouent un certain rôle dans l'étude de cette surface, par exemple les focales et les plans cycliques.

Toute droite passant par le sommet du cône transformé se transforme en une circonférence passant par les deux points singuliers de la girocyclide. En particulier, comme les focales du cône font avec chacune de

(1) *Voir* même Tome, p. 385.

ses génératrices des angles dont la somme est constante, elles se transforment en deux circonférences, faisant avec chacune des circonférences génératrices de la girocyclide deux angles dont la somme est constante : ce qui revient à dire que chacune des génératrices du cône tangent fait avec les tangentes à ces deux circonférences deux angles dont la somme est constante. Ainsi, aux génératrices du cône transformé correspondent deux circonférences passant par les points singuliers de la surface, et dont les tangentes en ces points sont les focales des cônes tangents. Nous les appellerons les *circonférences focales de la girocyclide*.

Les plans cycliques du cône transformé, c'est-à-dire les plans menés par le sommet de ce cône parallèlement aux plans de ses sections circulaires, se transforment en des sphères passant par les deux points singuliers de la surface. Le centre d'une de ces sphères se trouve sur la perpendiculaire abaissée de l'un des points singuliers sur le plan cyclique correspondant du cône transformé. Nous en conclurons que les plans tangents à ces sphères aux points singuliers sont les plans cycliques des cônes tangents. Nous appellerons ces sphères les *sphères cycliques de la surface*.

VIII. Chasles, dans un important Mémoire sur les cônes du second ordre, a démontré les deux théorèmes suivants, corrélatifs l'un de l'autre :

1° *Tout plan passant par le sommet d'un cône du second ordre coupe le cône et les deux plans cycliques suivant quatre droites, telles que les deux premières sont également inclinées sur les deux autres.*

2° *Si l'on mène deux plans tangents à un cône du second ordre, et que par leur intersection et les deux* *focales on fasse passer deux plans, ces deux plans sont également inclinés sur les deux plans tangents.*

Nous en déduirons les deux théorèmes suivants :

1° *Toute sphère passant par les deux points singuliers d'une girocyclide du quatrième ordre coupe cette girocyclide et les deux sphères cycliques suivant quatre circonférences, telles que les deux premières font des angles égaux avec les deux autres.*

2° *Si, dans une girocyclide du quatrième ordre, on considère deux sphères enveloppées, et que par leur intersection et les deux circonférences focales on fasse passer des sphères, ces deux sphères coupent les deux sphères enveloppées sous des angles égaux.*

IX. Proposons-nous de chercher ce qui caractérise les girocyclides qui correspondent à des cônes de révolution. Comme tous les cônes transformés d'une girocyclide sont égaux au cône tangent en un des points singuliers, et que d'ailleurs les cônes tangents aux deux points singuliers sont symétriques par rapport à un plan, il s'ensuit que, pour que la girocyclide corresponde à un cône de révolution, il faut et il suffit que le cône tangent en un des points singuliers soit de révolution. S'il s'agit, par exemple, de la girocyclide représentée par l'équation

$$\begin{aligned}&[x^2+y^2+(z-c)^2\\&\quad+2ax+2by+2c(z-c)]^2=4Ax^2+4By^2,\end{aligned}$$

on sait que le cône tangent au point $(0, 0, c)$ a pour équation

$$[ax+by+c(z-c)]^2=Ax^2+By^2,$$

ou, en ordonnant,

$$\begin{aligned}&(a^2-A)x^2+(b^2-B)y^2+c^2(z-c)^2\\&\quad+2bcy(z-c)+2acx(z-c)+2abxy=0.\end{aligned}$$

Si l'on suppose que a et b soient différents de o, c'est-à-dire que la ligne qui joint les deux points singuliers ne soit pas dans l'un des plans menés par les axes de la conique, lieu des centres des sphères enveloppées, perpendiculairement au plan de cette conique, on trouve que, pour que le cône tangent soit de révolution, il faut que l'on ait

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0.$$

Mais, dans ce cas, la girocyclide se réduit à une sphère.

Si, au contraire, on suppose $a = 0$, les coefficients de deux des rectangles, dans l'équation du cône, sont nuls, et la condition pour qu'il soit de révolution est

$$(c^2 + A)(b^2 - B + A) = b^2 c^2,$$

ou bien

$$A b^2 + (A - B) c^2 + A(A - B) = 0,$$

ou encore

$$\frac{b^2}{A - B} + \frac{c^2}{A} + 1 = 0.$$

Ainsi, les points singuliers doivent être sur l'une des coniques, lieu des sommets des cônes de révolution qui ont pour base le lieu des centres des sphères enveloppées : on obtient ainsi les surfaces que M. Amigues appelle des *digirocyclides*.

Dans le Mémoire que j'ai cité plus haut, Chasles a encore démontré les deux théorèmes corrélatifs suivants :

1° *Deux plans tangents à un cône coupent les deux plans cycliques menés par un même axe de symétrie suivant quatre droites qui sont situées sur un même cône de révolution.*

2° *Les quatre plans menés par les deux focales d'un* *cône du second ordre et deux génératrices de ce cône sont tangents à un même cône de révolution.*

Il en résulte les deux propositions suivantes :

1° *Deux des sphères enveloppées d'une girocyclide du quatrième ordre coupent les deux sphères cycliques suivant quatre circonférences qui sont des lignes de courbure d'une même digirocyclide.*

2° *Les quatre sphères menées par les deux circonférences focales d'une girocyclide du quatrième ordre et deux de ses lignes de courbure circulaires sont inscrites dans une même digirocyclide.*

X. Si l'on considère le cercle transformé d'une droite quelconque de l'espace, et qu'on joigne le centre de transformation à quatre points A, B, C, D pris sur cette droite, les quatre rayons vecteurs déterminent sur la circonférence quatre points dont le rapport anharmonique est égal au rapport (ABCD). Cela permet de déduire des propriétés des pôles et des plans polaires dans les cônes du second ordre les propositions suivantes :

1° Si par un point P de l'espace et par un des points singuliers d'une girocyclide du quatrième ordre on fait passer une circonférence quelconque, elle coupe la girocyclide en deux points, tels que le conjugué harmonique du point P par rapport à ces deux points se meut sur une sphère qui passe par les deux points singuliers.

Nous appellerons cette sphère la *sphère polaire du point* P.

2° Si un point se meut sur une circonférence passant par les deux points singuliers, sa sphère polaire est fixe. Nous l'appellerons la *sphère conjuguée de la circonférence.*

3° Si l'on considère une circonférence passant par les deux points singuliers, il existe, sur la sphère conjuguée, une infinité de systèmes de deux circonférences qui passent aussi par les deux points singuliers et forment avec la première un système de trois circonférences conjuguées, c'est-à-dire telles que la sphère qui passe par deux quelconques d'entre elles est la sphère conjuguée de la troisième.

4° Dans toute girocyclide du quatrième ordre, il existe trois circonférences conjuguées rectangulaires. Nous les appellerons les *circonférences principales*. Les sphères passant par deux quelconques d'entre elles seront les sphères principales. Une sphère principale contient deux circonférences focales; toute sphère cyclique passe par une circonférence principale.

XI. Nous appellerons *girocyclides homofocales* deux girocyclides ayant même système de circonférences focales. Elles ont en même temps un même système de circonférences principales, et chacune de celles-ci fait des angles égaux avec deux des circonférences focales.

Des propriétés des cônes homofocaux nous déduirons les propriétés suivantes :

Par un point de l'espace on peut faire passer deux girocyclides du quatrième ordre, ayant pour focales deux circonférences données sur une même sphère; ces girocyclides se coupent à angle droit.

Si l'on imagine une circonférence C passant par le point donné et par les deux points communs aux deux focales, ces deux girocyclides couperont à angle droit les deux sphères qui passent elles-mêmes par les points communs aux deux focales et font des angles égaux avec les deux sphères menées par chacune des deux focales et la circonférence C.

Il faut encore remarquer que tous les cônes qui touchent une série de girocyclides homofocales en un de leurs points singuliers communs sont eux-mêmes homofocaux.

XII. Dans toute girocyclide du quatrième ordre, les lignes de courbure de la seconde série ont pour transformées des coniques sphériques. Comme, dans l'étude de ces courbes, les grands cercles des sphères sur lesquelles elles sont tracées jouent un rôle important, je vais chercher à caractériser les courbes transformées de ces grands cercles.

Si, comme nous l'avons fait précédemment, nous prenons pour axe des z la ligne qui joint les deux points singuliers de la girocyclide et pour origine le milieu de leur distance, l'équation qui représentera l'une quelconque des sphères sur lesquelles se trouvent les lignes de courbure de seconde espèce sera, d'après un théorème démontré par M. Amigues,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z + c^2 = 0, \tag{7}$$

c désignant, comme précédemment, la demi-distance des deux points singuliers.

La sphère correspondant au plan d'un des grands cercles de la sphère transformée aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - c^2 = 0. \tag{8}$$

Le plan radical de ces deux sphères a pour équation

$$hx + ky - \lambda z + c^2 = 0.$$

Ce plan passe par le point dont les coordonnées sont $x = 0, y = 0, z = \frac{c^2}{\lambda}$; pour une valeur donnée de λ, ce point est fixe et réel : c'est le conjugué harmonique du centre de la sphère (7) par rapport aux points singuliers de la girocyclide. Ainsi, les plans des circonférences qui correspondent aux grands cercles d'une sphère ayant pour centre le sommet du cône transformé passent par un point fixe.

Ce point jouit d'une propriété remarquable : c'est le sommet d'un cône du second ordre ayant pour directrice la ligne de courbure déterminée par la sphère (7). En effet, soit l'équation de la girocyclide

$$(9)\quad (x^2+y^2+z^2+2ax+2by-c^2)^2=4Ax^2+4By^2;$$

si, dans cette équation, on remplace $x^2+y^2+z^2$ par sa valeur tirée de l'équation (7), il vient

$$(10)\qquad (ax+by+\lambda z-c^2)^2=Ax^2+By^2,$$

de sorte que par l'intersection des surfaces (7) et (9) on peut faire passer le cône représenté par l'équation (10); son sommet est bien au point précédemment défini, et sa base est l'intersection du cône tangent en un quelconque des points singuliers avec le plan des xy. En outre, si l'on considère le cône tangent au point $(0, 0, c)$, par exemple, on voit facilement que la seconde courbe plane suivant laquelle ce cône coupe le cône représenté par l'équation (10) est située dans le plan représenté par l'équation

$$2ax+2by+(c+\lambda)z-2c^2=0.$$

Ce plan passe par une droite fixe située dans le plan des xy et dont l'équation est

$$ax+by-c^2=0;$$

c'est la corde des contacts des droites menées par l'origine, parallèlement aux asymptotes de la conique lieu des centres des sphères enveloppées, avec la conique

$$(ax+by-c^2)^2=Ax^2+By^2,$$

qui est la base commune au cône tangent et au cône (10).

En résumé : Les plans des cercles transformés des grands cercles des sphères concentriques au cône transformé passent par un point qui est le même pour une même sphère. Nous appellerons ces cercles les *cycles de la sphère* (7).

2° Toute ligne de courbure de la seconde espèce est sur un cône du second ordre dont le sommet est le point commun aux plans des cycles correspondants.

XIII. Les circonférences focales de la girocyclide coupent la sphère (7) en deux points que nous nommerons les *foyers de la ligne de courbure correspondante.*

Des propriétés angulaires des coniques sphériques, on déduit les propriétés suivantes :

Si par un point P, pris sur la sphère (7), on mène deux arcs de cycle tangents à la ligne de courbure correspondante, et qu'on joigne ce point aux foyers par des arcs de cycle, ces deux derniers arcs sont également inclinés sur les deux premiers.

En particulier, les deux arcs de cycle *vecteurs* d'un point de la ligne de courbure sont également inclinés sur l'arc de cycle tangent èn ce point.

Si l'on joint l'un des foyers aux points de contact par des arcs de cycle, ces deux arcs sont également inclinés sur celui qui joint ce foyer au point P.

Si l'on imagine deux cycles tangents fixes et un arc de cycle tangent mobile, et qu'on joigne les points d'intersection de cet arc avec les deux arcs fixes à l'un des foyers par des arcs de cycle, ceux-ci forment entre eux un angle constant.

La sphère conjuguée d'une des circonférences focales coupe la sphère (7) suivant un cycle que nous appellerons le *cycle directeur de la conique,* et qui jouit des propriétés suivantes :

Si d'un point P, pris sur le cycle directeur d'une ligne de courbure de seconde espèce, on lui mène des cycles tangents, le cycle qui joint les points de contact passe par les foyers et est perpendiculaire à celui qui joint ce foyer au point P.

XIV. Enfin, ce qui précède permet d'écrire, dans le cas où la surface qu'on étudie est une digirocyclide, l'équation qui représente les plans des deux lignes de courbure circulaires suivant lesquelles la sphère (7) coupe la surface.

En effet, dans ce cas, l'équation (10) s'écrit

$$(by + \lambda z - c^2)^2 = Ax^2 + By^2.$$

Par l'intersection de cette surface avec la sphère (7), on peut faire passer la surface représentée par l'équation suivante :

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &(by + \lambda z - c^2)^2 \\ &\quad + (A - B)y^2 + Az^2 - 2A\lambda z + Ac^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

et l'on reconnaît aisément : 1° que le discriminant de cette équation devient nul quand on tient compte de la relation

$$b^2c^2 = (c^2 + A)(b^2 - B + A);$$

2° que, dans ce cas, les deux plans représentés par l'équation (11) coupent le plan des xy suivant une même droite, dont la position ne dépend pas de λ.

Comme la sphère (7) coupe le plan des xy suivant le cercle fixe (réel ou imaginaire) $x^2 + y^2 + c^2 = 0$, on en conclut que les lignes de courbure de la seconde série sont circulaires et passent par deux points fixes. Cela concorde avec les résultats trouvés par M. Amigues.

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE ET LES COURBES UNICURSALES;

Par M. E. PELLET.

1. Soient m le degré d'une courbe algébrique (A), non décomposable en courbes de degré inférieur, p_i le nombre de ses points multiples d'ordre i; $p_i = 0$ si i est supérieur à $m - 1$. K étant le nombre des points multiples, on a

$$K = \sum_{i=2}^{i=m-1} p_i.$$

Posons en outre

$$M = \sum_{i=2}^{i=m-1} i p_i.$$

Soit n un nombre entier tel que $\frac{n(n+3)}{2} \geqq K$; les K points multiples et $\frac{n(n+3)}{2} - K$ autres points pris sur la courbe définissent une courbe de degré n, qui a avec (A)

$$\frac{n(n+3)}{2} - K + M$$

points communs; comme (A) est indécomposable, on a

$$mn \geqq \frac{n(n+3)}{2} + M - K,$$

d'où

$$\frac{n(2m - n - 3)}{2} \geqq M - K.$$

2. *Maxima des nombres* M, K *et* p_i. — L'expression

$$\frac{n(2m-n-3)}{2}$$

acquiert sa valeur maximum pour

$$n=\frac{2m-3}{2},$$

et cette valeur maximum est

$$\frac{(2m-3)^2}{8}=\frac{4(m-1)(m-2)+1}{8}.$$

M — K étant entier, son maximum est $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$;
comme M est au moins égal à 2 K, on voit que

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} \geqq \mathrm{K}.$$

On a

$$\frac{n(2m-n-3)}{2}+\mathrm{K} \geqq \mathrm{M}.$$

Remplaçant chacun des termes du premier membre par sa valeur maximum, il vient

$$(m-1)(m-2) \geqq \mathrm{M}.$$

Pour avoir le maximum de p_i, observons que

$$\mathrm{M}-\mathrm{K}=\sum_{i=2}^{i=m-1}(i-1)p_i.$$

Donc

$$\frac{n(2m-n-3)}{2} \geqq (i-1)p_i.$$

Dans le premier membre, n est un nombre entier tel que

$$\frac{n(n+3)}{2} \geqq p_i$$

ou

$$\frac{n(n+3)}{2} \geqq \frac{n(2m-n-3)}{2(i-1)},$$

d'où l'on tire

$$n \geqq \frac{2m-3i}{i}.$$

Ainsi, il faudra remplacer n par le plus petit nombre entier supérieur à $\frac{2m-3i}{i}$.

Soit $i = 2$; $\frac{2m}{i} - 3$ est alors égal à $m - 3$; il faut donner à n la valeur $m - 2$, ce qui donne pour maximum du nombre des points doubles $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Si i était supérieur à $\frac{m}{2}$, p_i serait au plus égal à 1.

3. Nous allons en outre établir une relation entre M et K, qui nous sera utile. Soit n un nombre tel que $\frac{n(n+3)}{2} < \mathrm{K}$; posons, pour abréger, $\frac{n(n+3)}{2} = \mu$. Par μ des points multiples on peut faire passer une courbe de degré n; si l'on désigne par $i, i_1, \ldots, i_{\mu-1}$ les degrés de multiplicité de ces points, on a

$$mn \geqq i + i_1 + \ldots + i_{\mu-1},$$

et le nombre des inégalités qu'on obtient ainsi est égal au nombre de combinaisons de K objets μ à μ, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{K}(\mathrm{K}-1)\ldots(\mathrm{K}-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}.$$

La somme des seconds membres de ces inégalités contient le même nombre de fois chacun des nombres $i, i_1, \ldots, i_{k-1}$, et ce nombre est égal à celui des combinaisons complètes de $k-1$ objets pris $\mu-1$ à $\mu-1$, soit

$$\frac{(K-1)\dots(K-\mu+1)}{1.2\dots(\mu-1)}.$$

Ainsi

$$\frac{K(K-1)\dots(K-\mu+1)}{1.2\dots\mu}\,mn \geqq \frac{(K-1\dots(K-\mu+1)}{1.2\dots(\mu-1)}\,M,$$

ou, en simplifiant et remplaçant μ par $\frac{n(n+3)}{2}$,

$$\frac{2mK}{n+3} \geqq M.$$

Dans cette inégalité, n est un nombre tel que $\frac{n(n+3)}{2} < K$, et l'on constate aisément qu'elle a encore lieu si $\frac{n(n+3)}{2} = K$.

4. Supposons actuellement que n soit un nombre entier tel que $\frac{n(n+3)}{2} > K$; les K points multiples de la courbe (A) et $\frac{n(n+3)}{2} - K - 1$ autres points pris sur cette courbe déterminent un faisceau de courbes de degré n, dont l'équation générale contient un paramètre variable au premier degré, et qui ont chacune avec (A)

$$\frac{n(n+3)}{2} - K + M - 1$$

points communs, savoir : les K points multiples qui comptent pour M et les $\frac{n(n+3)}{2} - K - 1$ points simples choisis sur la courbe. Chaque courbe du faisceau rencontre donc (A) en

$$mn - \frac{n(n+3)}{2} + K - M + 1$$
$$= \frac{n(2m-n-3)}{2} + K - M + 1$$

points seulement, variables avec le paramètre qui définit la courbe. Si ce nombre se réduit à l'unité, les points de la courbe (A) se déterminent individuellement, et elle appartient au genre de courbes appelées *unicursales* par M. Cayley. Ainsi, n étant le plus petit nombre tel que $\frac{n(n+3)}{2} > K$, la courbe (A) est unicursale si l'on a

$$(1)\qquad \frac{n(2m-n-3)}{2} + K - M = 0.$$

Ce caractère est plus simple que celui donné par M. Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 1354). Lorsqu'on aura reconnu qu'une courbe satisfait à la condition exprimée par l'équation (1), on pourra exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction rationnelle d'une variable par la méthode exposée par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 252.

5. On reconnaît aisément que les courbes d'ordre m qui ont un point multiple d'ordre $m-1$ satisfont à l'équation (1). Il en est de même de celles qui ont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles. Il faut alors prendre n égal à $m-2$; $M = (m-1)(m-2)$, et l'équation (1) est satisfaite. Mais on peut chercher, pour une valeur donnée de K, quelles sont les courbes satisfaisant à l'équation (1). On ne peut en trouver si

$$K = \frac{n_1(n_1+3)}{2},$$

n_1 étant entier. En effet, il faut faire $n = n_1 + 1$, et l'équation (1) devient

$$\frac{(n_1+1)(2m-n_1-4)}{2} + \frac{n_1(n_1+3)}{2} - M = 0$$

ou

$$mn_1 + m - 2 - n_1 - M = 0.$$

Or, d'après le n° 3, $M \leqq mn_1$ et n_1 est inférieur à $m-2$.

Les plus petites valeurs qu'on peut donner à K après 1 sont donc 3 et 4. Alors il faut prendre $n = 2$, et l'équation (1) devient

$$2m - 2 - M = 0,$$

dans le cas où $K = 3$. Comme M est au plus égal à $\frac{6m}{4}$ d'après le n° 3, il sera impossible de satisfaire à cette équation si

$$2m - 2 > \frac{6m}{4} \quad \text{ou} \quad m > 4.$$

Pour $K = 4$, l'équation (1) devient

$$2m - 1 - M = 0,$$

et l'on reconnaît qu'elle est satisfaite si $m = 2\mu + 1$, en supposant que la courbe ait trois points multiples de degré μ, et un point multiple de degré $\mu + 1$; et si $m = 2\mu$, en supposant qu'elle ait trois points multiples de degré μ, et un de degré $\mu - 1$.

6. Soient a, b, c, d les quatre points multiples donnés : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des droites ab, bc, cd, da. Posons, pour abréger,

$$\mathfrak{s} = \alpha\gamma,\quad \mathfrak{s}_1 = \beta\delta.$$

L'équation

$$A\mathfrak{s}^\mu + B\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}^{\mu-1} \ldots + K\mathfrak{s}_1^{\mu-1}\mathfrak{s} + L\mathfrak{s}_1^\mu = 0,$$

où A, B..., K, L sont des binômes du premier degré et homogènes en α et δ, de la forme $m\alpha + n\delta$, m et n étant des constantes, représente une courbe de degré $2\mu + 1$, pour laquelle a est un point multiple de degré $\mu + 1$ et b, c, d des points multiples de degré μ. Elle renferme $2\mu + 1$ constantes arbitraires.

Soit $\varepsilon = 0$ l'équation de la droite bd; l'équation

$$A\,\mathcal{S}^{\mu-1} + B\,\mathcal{S}_1\,\mathcal{S}^{\mu-2} + \ldots + K\,\mathcal{S}_1^{\mu-2}\,\mathcal{S} + L\,\mathcal{S}_1^{\mu-1} = 0,$$

où A, B, ..., K, L sont des trinômes de la forme

$$m\alpha\varepsilon + n\varepsilon\delta + p\delta\alpha,$$

m, n et p étant des constantes, représente une courbe de degré 2μ, pour laquelle a, b, d sont des points multiples de degré μ, et c un point multiple de degré $\mu - 1$. Elle contient $3\mu - 1$ constantes arbitraires.

Pour exprimer les coordonnées d'un point de ces courbes en fonction rationnelle d'une variable θ, on cherchera, conformément au n° 5, leur intersection avec la conique

$$\mathcal{S} - \theta\,\mathcal{S}_1 = 0.$$

Pour les courbes du second genre, par exemple, le point d'intersection variable avec θ sera sur la conique

$$A\,\theta^{\mu-1} + B\,\theta^{\mu-2} + \ldots + K\,\theta + L = 0,$$

dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\mathcal{A}}{\alpha} + \frac{\mathcal{B}}{\varepsilon} + \frac{\mathcal{C}}{\delta} = 0,$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des polynômes du degré $\mu - 1$ en θ.

Or, γ et β peuvent s'exprimer en fonction homogène de α, δ, ε; substituant dans l'équation

$$\mathcal{S} - \theta\,\mathcal{S}_1 = 0,$$

celle-ci pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\mathcal{A}'}{\alpha} + \frac{\mathcal{B}'}{\varepsilon} + \frac{\mathcal{C}'}{\delta} = 0,$$

$\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ étant du premier degré en θ. Les équations (1) et (2) déterminent les rapports

$$\frac{\delta}{\varepsilon}, \frac{\alpha}{\varepsilon},$$

par exemple, en fonction rationnelle de θ. On aurait un calcul semblable pour les courbes du premier genre.

7. Dans le cas général, la courbe auxiliaire de degré n, considérée au n° 4, qui passe par les K points multiples de la courbe (A) et

$$\frac{n(n+3)}{2} - \mathrm{K} - 1$$

autres points choisis sur cette courbe, et dont l'équation contient un paramètre arbitraire θ au premier degré, coupe la courbe (A) en

$$\frac{n(2m-n-3)}{2} + \mathrm{K} - \mathrm{M} + 1 = \mathrm{V}$$

points, variables avec le paramètre θ. Les coordonnées de ces V points peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de θ et des racines d'une équation de degré ν, dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de θ. Dans le cas particulier où $\nu = 2$, c'est-à-dire où

$$(2) \qquad \frac{n(2m-n-3)}{2} + \mathrm{K} - \mathrm{M} - 1 = 0,$$

les coordonnées d'un point de la courbe (A) s'expriment rationnellement en fonction de θ et de la racine carrée d'un polynôme en θ. L'équation (2) est vérifiée lorsque la courbe (A) possède $\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 2$ points doubles, deux de moins que le nombre maximum. En effet, dans ce cas, il faut prendre $n = m - 3$; $M = (m-1)(m-2) - 4$, et l'équation (2) est vérifiée.

Pour $K = 4$, elle est vérifiée en supposant, si $m = 2\mu + 1$, que la courbe ait quatre points multiples de degré μ, et, si $m = 2\mu$, en supposant qu'elle ait deux points multiples de degré μ et deux autres de degré $\mu - 1$.

8. En conservant les mêmes notations qu'au n° 6, l'équation générale des courbes du premier genre est

$$A S^{\mu} + B S_1 S^{\mu-1} + \ldots + K S_1^{\mu-1} S + 4 S_1^{\mu} = 0,$$

A, B, ..., K, étant des polynômes du premier degré et homogènes en α, β, γ; elle contient $3\mu + 2$ constantes arbitraires.

L'équation générale des courbes du second genre est

$$A S^{\mu-1} + B S_1 S^{\mu-2} + \ldots + K S_1^{\mu-2} S + L S_1^{\mu-1} = 0,$$

A, B, ..., L étant des polynômes du second degré, de la forme

$$m\alpha^2 + n\alpha\varepsilon + p\varepsilon\delta + q\delta\alpha = 0,$$

en supposant que a et b soient les deux points multiples de degré μ; m, n, p, q sont des constantes arbitraires. Si l'on considère une courbe du premier genre, elle coupe la conique

$$S - \theta S_1 = 0$$

en deux points seulement variables avec θ; ces points sont situés sur la droite

$$A\theta^{\mu} + B\theta^{\mu-1} + \ldots + K\theta + L = 0.$$

Leurs coordonnées s'expriment donc rationnellement en fonction de θ et de la racine carrée d'un polynôme entier en θ.

Une courbe du second genre coupe la conique

$$\mathcal{S} - \theta\mathcal{S}_1 = 0$$

en deux points également variables avec θ. Ces points sont situés sur la conique

$$A\theta^{\mu-1} + B\theta^{\mu-2} + \ldots + K\theta + L = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$M\alpha^2 + N\alpha\varepsilon + P\varepsilon\delta + Q\delta\alpha = 0,$$

M, N, P, Q étant des polynômes du degré $\mu - 1$ en θ.

Or $\mathcal{S} - \theta\mathcal{S}_1$ peut se mettre sous la forme (n° 6)

$$\mathcal{A}\varepsilon\delta + \mathcal{B}'\delta\alpha + \mathcal{C}'\alpha\varepsilon = 0.$$

Les deux coniques représentées par les équations précédentes se coupent évidemment en deux points variables avec θ, qui sont situés sur la droite

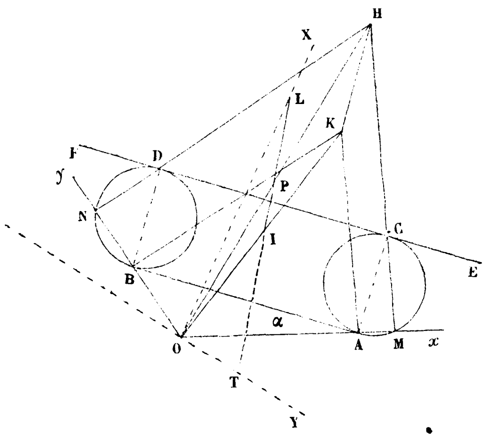
$$M\mathcal{A}'\alpha + (N\mathcal{A}' - \mathcal{C}'P)\varepsilon + (Q\mathcal{A}' - \mathcal{B}'P)\delta = 0.$$

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. CATALAN;

Par M. P. BARBARIN,
Professeur au lycée de Nice.

Une cycloïde reste constamment tangente à deux droites fixes Ox, Oy : *trouver le lieu du centre du cercle qui passe par le point* O *et les deux points de contact* M, N.

Soit, dans une de ses positions, EF la base de la cycloïde et soient M, N les deux points de contact. Considérons les deux positions du cercle générateur qui donnent ces points M, N.



Les deux cercles ainsi tracés touchent la droite EF en C, D et coupent Ox, Oy en A, B.

La droite AB est égale et parallèle à CD.

L'angle $\widehat{CAx}$ a pour mesure

$$\text{arc}\,\frac{MC}{2}=\frac{CE}{2}$$

dans le cercle générateur.

L'angle $\widehat{DBO}$ a pour mesure

$$\text{arc}\,\frac{NBD}{2}=\frac{DE}{2}.$$

La différence de ces deux angles, c'est-à-dire le supplément de xOy, a donc pour mesure dans le cercle générateur un arc égal à $\frac{CD}{2}=\frac{AB}{2}$.

Donc, AB est une longueur constante et, si l'on désigne par θ l'angle xOy, on a

$$AB = 2a(\pi - \theta),$$

a étant le rayon du cercle générateur.

Cela posé, menons MH et AK perpendiculaires à Ox, NH et BK perpendiculaires à Oy.

Tirons les droites OH, OK et prenons leurs milieux P, I.

P est le centre du cercle circonscrit au triangle OMN; c'est le point dont nous cherchons le lieu; I est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB; comme on sait, ce point I décrit un cercle de centre O et de rayon $R = \dfrac{a(\pi - \theta)}{\sin\theta}$.

Tirons HK, qui est égal et parallèle à $AC = 2a$, PI parallèle à HK et égal à sa moitié, par conséquent à a.

Si nous désignons par α l'angle variable $\widehat{OAB}$, nous aurons facilement

$$\widehat{KOx} = \frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha),$$

$$\widehat{PIK} = \widehat{CAM} - \widehat{KOx} = \frac{\pi}{2} - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) = \theta - 2\alpha.$$

Soit OX la bissectrice de l'angle yOx; menons la perpendiculaire OY; la droite IP prolongée coupe OX au point L. Or,

$$\widehat{LOK} = \widehat{LOx} - \widehat{xOK}$$

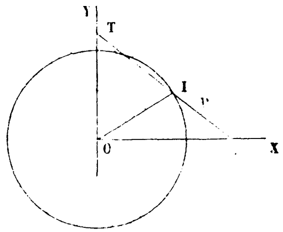
ou

$$\widehat{LOK} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) = \frac{\theta}{2} - \alpha = \frac{1}{2}\,\widehat{LIK};$$

donc le triangle OIL est isoscèle et $IL = OI = R$. Il en résulte que PI prolongée coupe OY en un point T, tel que

$$TI = IL = R.$$

Donc le lieu du point P est celui d'un point d'une droite de longueur constante $TL = 2R$, glissant entre



deux droites rectangulaires OX, OY, qui sont les bissectrices de l'angle des droites données Ox, Oy. Ce lieu est une ellipse dont les axes $R + a$ et $R - a$ sont dirigés, respectivement, suivant OX et OY.

NOTE SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DU COLONEL PEAUCELLIER;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

Je me propose de déterminer les rapports des vitesses des divers mouvements à considérer dans cet appareil, à savoir : rotations de OA et OC autour de O; rotation de O'D autour de O'; translation de B.

Le point A décrivant la circonférence de rayon OA, et le point B une perpendiculaire à la droite OO', j'ai le centre instantané de rotation I de la droite AB en tirant la droite BI parallèle à OO' et prenant son point de rencontre avec OA. Donc, si $v(A)$ et $v(B)$ sont les vitesses des points A et B à l'instant considéré, on a

$$(1) \qquad \frac{v(B)}{v(A)} = \frac{BI}{AI} = \frac{OK}{OA}.$$

Or, Ω étant la vitesse angulaire autour du point O au même instant,

$$v(A) = \Omega . OA.$$

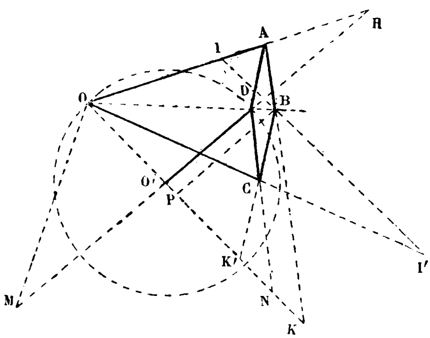
Par suite,

$$\frac{v(B)}{\Omega . OA} = \frac{OK}{OA}$$

ou

$$(2) \qquad \frac{v(B)}{\Omega} = OK.$$

Maintenant, le point D décrivant la circonférence de rayon O′D, j'ai le centre instantané de rotation H de la



droite AD en prenant le point de rencontre des droites OA et O′D. On a

$$(3) \qquad \frac{v(A)}{v(D)} = \frac{HA}{HD}.$$

Multiplions (1) et (3) membre à membre; il vient

$$\frac{v(B)}{v(D)} = \frac{HA . OK}{HD . OA}.$$

Tirons OM parallèlement à AD :

$$\frac{HA}{HD} = \frac{OA}{DM}.$$

Or, les triangles ODM et ODN étant égaux,

$$DM = ON.$$

Donc

$$\frac{HA}{HD} = \frac{OA}{ON}$$

et

$$\frac{v(B)}{v(D)} = \frac{OA.OK}{ON.OA} = \frac{OK}{ON}.$$

Mais, si ω est la vitesse autour de O′ à l'instant considéré,

$$v(D) = \omega.O'D,$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{v(B)}{\omega.O'D} = \frac{OK}{ON},$$

ou

$$\frac{v(B)}{\omega} = \frac{OK.O'D}{ON}.$$

Tirons BP parallèlement à O′D :

$$BP = \frac{OK.O'D}{ON}.$$

Par suite,

$$(4) \qquad \frac{v(B)}{\omega} = BP.$$

Occupons-nous maintenant de la vitesse angulaire Ω' de OC autour de O, prise toujours au même instant.

Le point de rencontre I′ de BI et de OC donne le centre instantané de rotation de la droite BC. Donc

$$\frac{v(B)}{v(C)} = \frac{BI'}{CI'} = \frac{OK'}{OC}$$

ou

$$\frac{v(B)}{\Omega'.OC} = \frac{OK'}{OC},$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{v(\mathrm{B})}{\Omega'} = \mathrm{OK}'.$$

Réunissant les égalités (2), (4) et (5), nous voyons que

$$v(\mathrm{B}) = \omega.\mathrm{BP} = \Omega.\mathrm{OK} = \Omega'.\mathrm{OK}'.$$

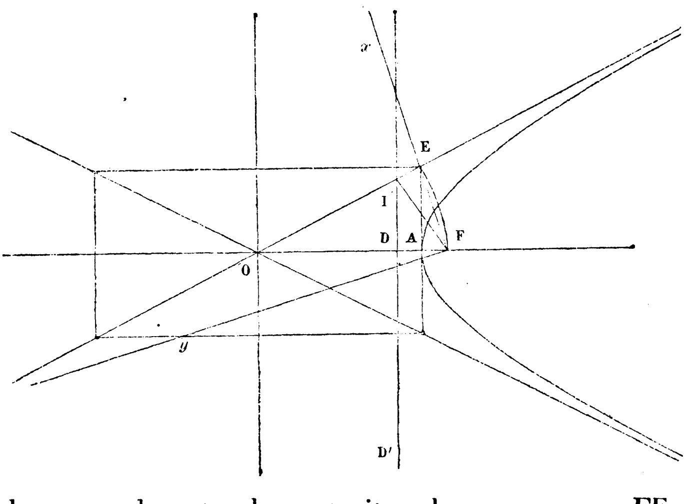
SOLUTIONS DE QUELQUES QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. L'ABBÉ A. GENEIX-MARTIN.

---

1. *Équation générale des hyperboles ayant un point donné pour foyer, et telles qu'un des sommets du rectangle construit sur les axes soit en un point donné.*

Prenons le foyer fixe F pour pôle, le point fixe E étant



le sommet du rectangle construit sur les axes, prenons FE pour axe polaire. L'équation de la courbe sera de la forme

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x \cos\omega + y \sin\omega - d)^2.$$

Il faut déterminer ε et d.

Nous savons qu'on obtient le foyer en décrivant de O comme centre un arc de rayon OE; donc le triangle EOF est isoscèle : la directrice est IDD', on sait la construire.

On a

$$\widehat{FEO} = \widehat{EFO} = \omega.$$

Soit

$$EF = l,$$

on a

$$l = 2c \cos\omega,$$

d'où

$$c = \frac{l}{2 \cos\omega}.$$

On a aussi

$$IF = b = l \sin\omega; \quad OI = a = -c \cos 2\omega = -\frac{l \cos 2\omega}{2 \cos\omega};$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\cos 2\omega}, \quad FD = d = \frac{b^2}{c} = 2l \sin^2\omega \cos\omega.$$

L'équation générale demandée est donc

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\omega}(x \cos\omega + y \sin\omega - 2l \sin^2\omega \cos\omega)^2.$$

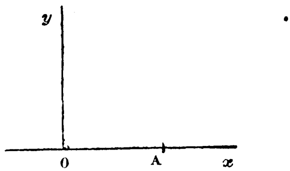
II. *Lieu des foyers des hyperboles équilatères ayant un centre fixe* O, *et passant par un point fixe* A.

Prenons OA pour axe des x, et une perpendiculaire en O à OA pour axe des y; posons OA $= a$. Soit (α, β)

un foyer. L'équation des hyperboles considérées est de la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 2(x \cos\omega + y \sin\omega - d)^2.$$

Elle renferme deux paramètres arbitraires ω et d.



L'origine étant au centre, les coefficients des termes du premier degré doivent être nuls, ce qui donne

$$(1) \qquad \alpha = 2d\cos\omega, \quad \beta = 2d\sin\omega,$$

d'où

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4d^2, \quad d = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}, \quad \cos\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Exprimons que la courbe passe par le point A

$$(x = a, \quad y = 0),$$

il vient, en tenant compte de la première des relations (1),

$$a^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 2(a^2\cos^2\omega + d^2).$$

Remplaçons dans cette relation $\cos\omega$ et d par les valeurs que nous venons de trouver, il vient pour l'équation du lieu

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2a^2(\alpha^2 - \beta^2) = 0.$$

C'est l'équation d'une lemniscate qui a pour foyers le point A et son symétrique par rapport à l'origine. Le point double est O.

III. *Lieu des foyers des ellipses ayant un sommet donné à une extrémité du petit axe, et une tangente donnée à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux.*

IT, tangente fixe à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux; B, sommet fixe sur l'axe non focal. Il est facile de démontrer que la tangente IT est parallèle à la droite AB, qui joint les extrémités des axes de l'ellipse considérée parmi celles qui satisfont à la question.

On démontre aussi facilement que l'ordonnée à l'origine OT de cette tangente est égale à $OB\sqrt{2}$ ou $b\sqrt{2}$.

Soient OL la distance du centre à la droite BA, et BL′ la distance de B à la tangente IT, on a

$$\frac{OL}{BL'} = \frac{OB}{BT} = \frac{OB}{OT - OB} = \frac{b}{b(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

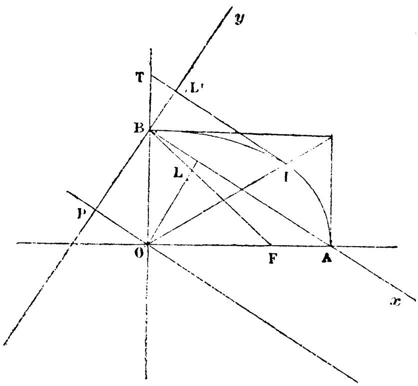
d'où

$$OL = \frac{BL'}{\sqrt{2} - 1}.$$

Ainsi, étant donnés le sommet fixe B et la tangente fixe IT; δ étant la distance BL′ de B à IT, le centre de l'ellipse est sur une parallèle à IT, distante de B de la quantité $\frac{\delta}{\sqrt{2} - 1}$, et par suite distante de IT de la quantité $\delta + \frac{\delta}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$.

Soit F le foyer dans la position considérée de l'ellipse, on a $BF = OA$. Nous allons chercher le lieu des foyers.

Prenons BA pour axe des x, et une perpendiculaire en B pour axe des y. Prenons $BP = \delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$; par le point P



menons une parallèle à l'axe des x; elle passe par le centre O. Soit $y = \beta$ l'équation de la droite PO.

Menons de l'origine la droite BO ($y = mx$); les coordonnées du point O sont $y = \beta$, $x = \frac{\beta}{m}\cdot$ L'équation de la droite OF, perpendiculaire à OB, est

$$m^2(y-\beta) + mx - \beta = 0.$$

L'abscisse du point A où elle rencontre l'axe des x est $x = \frac{(m^2+1)\beta}{m}\cdot$ Donc

$$\overline{OA}^2 = \beta^2(1+m^2).$$

Puisque $BF = OA$, décrivons de l'origine comme centre le cercle de rayon $\beta\sqrt{1+m^2}$. Son équation est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = \beta^2(1+m^2).$$

Les foyers sont, à l'intersection de ce cercle et de la droite OA,

$$(2) \qquad m^2(y-\beta)+mx-\beta=0.$$

Nous obtiendrons le lieu cherché en éliminant m entre (1) et (2).

On sait que l'élimination de Z entre les deux équations

$$aZ^2+bZ+c=0, \quad a'Z^2+b'Z+c'=0$$

donne pour résultat

$$(ac'-ca')^2=(ab'-ba')(bc'-cb').$$

Appliquons aux équations (1) et (2) du second degré en m, il vient

$$[(\beta-y)(x^2+y^2-\beta^2)+\beta^3]^2=x\beta^2x^2(x^2+y^2-\beta^2).$$

En développant, réduisant et supprimant le facteur (x^2+y^2), on trouve pour l'équation du lieu

$$(x^2+y^2-\beta^2)y(y-2\beta)+\beta^4=0.$$

Cette courbe a deux asymptotes, l'axe des x et une parallèle à l'axe des x, dont l'équation est $y=2\beta$. Du reste, la courbe est comprise tout entière entre ces deux asymptotes, car il est facile de vérifier qu'elle ne les rencontre pas à distance finie.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1880 (DEUXIÈME SESSION);

Par M. A. CHAMBEAU,

Élève du pensionnat Notre-Dame du Sacré-Cœur.

1° *Écrire l'équation générale des paraboles passant par deux points donnés,* A *et* B, *et dont les diamètres ont une direction donnée.*

2° *Donner l'expression des coordonnées du sommet et du foyer de ces paraboles.*

3° *On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite* AB, *trouver le lieu des points de contact et construire ce lieu.*

Notations. — AB *étant prise pour axe des* y, *et une perpendiculaire pour axe des* x, *on fera* $\mathrm{AB} = 2a$, *en appelant* m *le coefficient angulaire de la direction des diamètres des paraboles considérées.*

Je prends le milieu de AB pour origine.

L'équation générale des paraboles ayant m pour coefficient angulaire de la direction de leurs diamètres est

$$(y - mx)^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

L'équation

$$y - mx = 0$$

représente le diamètre mené par l'origine, et

$$2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0$$

est l'équation de la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Ces paraboles devant passer par les points A et B, dont les coordonnées sont (o, a) et $(o, -a)$, on a les équations de condition

$$a^2 + 2\mu a + \nu = 0, \quad a^2 - 2\mu a + \nu = 0,$$

d'où

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \nu = -a^2;$$

donc : 1° l'équation générale demandée est

$$(1) \qquad (y - mx)^2 + 2\lambda x - a^2 = 0;$$

2° l'équation (1) peut s'écrire identiquement

$$(y - mx + h)^2 - 2h(y - mx) + 2\lambda x - a^2 - h^2 = 0,$$

ou

$$(y - mx + h)^2 + 2(\lambda + mh)x - 2hy - a^2 - h^2 = 0.$$

L'équation

$$y - mx + h = 0$$

représente un diamètre quelconque, et

$$2(\lambda + mh)x - 2hy - a^2 - h^2 = 0,$$

la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

En exprimant que ces droites sont perpendiculaires, on aura les équations de l'axe et de la tangente au sommet.

La condition est

$$m\left(\frac{\lambda + mh}{h}\right) + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{m\lambda}{m^2 + 1}.$$

Il s'ensuit que l'équation de l'axe est

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2 + 1} = 0,$$

et celle de la tangente au sommet

$$x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + m^2\lambda^2}{2(m^2 + 1)\lambda} = 0.$$

De ces deux équations, on tire

$$x = \frac{a^2(m^2 + 1)^2 - m^2\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}$$

et

$$y = \frac{m(m^2 + 2)\lambda^2 + m(m^2 + 1)^2 a^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}.$$

Ces valeurs de x et y sont les coordonnées du sommet des paraboles.

Le foyer sera déterminé par l'intersection de l'axe et de la droite représentée par l'équation

$$x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + (m^2 - 1)\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)} = 0.$$

(*Voir* les *Nouvelles déterminations analytiques des foyers et directrices*, par M. Georges Dostor) (¹).

La résolution des équations

$$x + my - \frac{a^2(m^2+1)^2 + (m^2-1)\lambda^2}{2\lambda(m^2+1)} = 0,$$

(¹) Il est facile de trouver les coordonnées du foyer sans avoir recours aux formules générales des *Nouvelles déterminations analytiques,* etc., car l'ordonnée du foyer est égale à celle du point de concours des deux tangentes représentées par les équations

$$2\lambda x - a^2 = 0 \quad \text{et} \quad x + my - \frac{a^2(m^2+1)^2 + m^2\lambda^2}{2(m^2+1)\lambda} = 0,$$

et l'abscisse s'obtient au moyen de l'équation

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2+1} = 0$$

de l'axe, en remplaçant y par la valeur de l'ordonnée. Cela résulte simplement de ce que le lieu des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.

On peut encore, sans connaître l'équation de la tangente au sommet, déterminer le foyer par un calcul qui s'appuie sur les considérations suivantes.

Il est d'abord évident que la différence des distances des deux points A, B à la directrice est égale à la projection de AB sur la direction des diamètres; cette projection est exprimée par le produit $2a\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$, indépendant de la variable λ.

La différence des distances des points A, B au foyer est, de même, égale à $2a\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$; il s'ensuit que le lieu du foyer de l'une quelconque des paraboles considérées est l'hyperbole dont A, B sont les foyers, et l'axe focal, ou traverse, $\frac{2ma}{\sqrt{m^2+1}}$. L'équation de cette hyperbole est

$$(m^2+1)y^2 - m^2(m^2+1)x^2 - m^2a^2 = 0;$$

donc, en résolvant le système des deux équations

$$(m^2+1)y^2 - m^2(m^2+1)x^2 - m^2a^2 = 0, \quad y - mx - \frac{m\lambda}{m^2+1} = 0,$$

on aura les coordonnées cherchées. (G.)

et

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2+1} = 0,$$

donne pour les coordonnées du foyer

$$x = \frac{a^2(m^2+1) - \lambda^2}{2(m^2+1)\lambda}, \quad y = \frac{a^2 m(m^2+1) + \lambda^2 m}{2(m^2+1)\lambda}.$$

3° Le coefficient angulaire des tangentes perpendiculaires à AB est nul; on a donc au point de contact

$$-m(y - mx) + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad (y - mx)^2 + 2\lambda x - a^2 = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, il vient

$$y^2 - m^2x^2 - a^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{m^2}\right)} - \frac{y^2}{a^2} + 1 = 0,$$

équation du lieu géométrique des points de contact. Cette équation représente une hyperbole rapportée à ses axes, et ayant ses sommets réels aux points A et B. Ses asymptotes ont pour équation $y^2 - m^2x^2 = 0$; l'une d'elles est le diamètre de la parabole, mené par l'origine, l'autre est symétrique par rapport à l'axe des y; il est donc très facile de construire cette courbe.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1881.

Composition de Mathématiques.

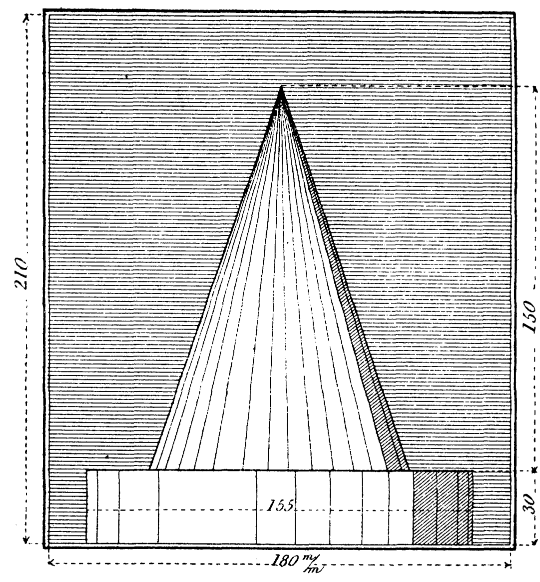
Une parabole étant donnée, on lui mène une normale en l'un des points situés avec le foyer sur une même perpendiculaire à l'axe. Trouver le lieu des sommets des sections faites par des plans contenant cette normale dans le cylindre dont la parabole donnée est la section droite.

Composition littéraire.

Développer la pensée suivante : Le culte de la vérité prend des formes différentes avec les époques. De notre temps, le noble rêve du bonheur de l'humanité future sur la terre par les découvertes de la science, par les applications de l'industrie, par les réformes politiques et sociales, c'est-à-dire, en un mot, la philosophie du progrès devient dans certaines âmes une sorte de religion. C'est ainsi que la science en est arrivée à avoir ses temples, ses sacrifices, ses apôtres et ses matyrs.

Composition de Lavis (trois heures).

Faire à l'encre de Chine, à *teintes plates,* le lavis d'un



cône de révolution reposant sur un socle cylindrique et se détachant sur un fond gris uniforme.

On se conformera aux cotes indiquées en millimètres sur le croquis ci-joint.

Nota. Les traits pour le cadre, les arêtes ou les contours apparents des solides seront faits à l'encre.

On observera les filets de lumière.

Composition de Calcul.

Étant donnés, dans un triangle, deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$b = 483^{m},76, \quad c = 675^{m},37, \quad A = 35^{\circ}42'15'',$$

calculer les deux angles B et C, le troisième côté a, la longueur de la perpendiculaire abaissée de A sur a et la distance du pied de cette perpendiculaire au sommet C.

Composition de Géométrie descriptive.

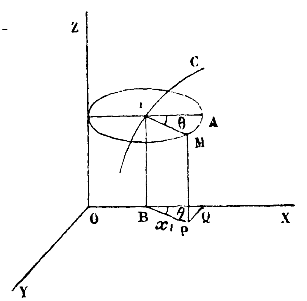
On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a $0^{m},190$, dont la base ABC est située dans le plan horizontal, et dont le sommet D est au-dessus de ce plan. Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans la face BCD. Le point B est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans la face ACD.

On demande de représenter en projection horizontale le corps qui reste, quand on supprime dans le tétraèdre la partie comprise dans le premier cône et la partie comprise dans le second. Indiquer les constructions faites pour trouver un point de l'intersection des cônes et la tangente en ce point.

QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

Soient OX, OY, OZ *trois axes de coordonnées rectangulaires, et dans le plan* ZOX *une courbe donnée* C. *Une surface est engendrée par une circonférence de cercle dont le plan reste parallèle au plan* XOY, *dont le centre décrit la courbe* C, *et qui rencontre constamment* OZ. *On demande de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface, en pre-*



nant pour variables la coordonnée z d'un point M *et l'angle* θ *du rayon du cercle qui passe en ce point avec la trace du plan du cercle sur le plan* ZOX. *Application au cas où la courbe* C *est une parabole, ayant le point* O *pour sommet et* OX *pour axe.*

Soient x, y, z les coordonnées du point M; x_1 l'abscisse OB de la projection du centre I; et $x_1 = \varphi(z)$ l'équation de la courbe C. On a

$$(1) \qquad x = x_1(1+\cos\theta), \quad \text{ou} \quad x = \varphi(z)(1+\cos\theta),$$

$$(2) \qquad y = x_1 \sin\theta, \quad \text{ou} \quad y = \varphi(z)\sin\theta;$$

par suite, l'équation de la surface est

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}[x-\varphi(z)]^2+y^2=\varphi^2(z),\\ \quad\text{ou}\\ x^2+y^2-2x\varphi(z)=0.\end{array}\right.$$

On déduit de là

$$p=\frac{dz}{dx}=\frac{x-\varphi(z)}{x\varphi'(z)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,\frac{1}{\varphi'(z)}=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{\varphi'(z)},$$

$$q=\frac{dz}{dy}=\frac{y}{x\varphi'(z)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\,\frac{1}{\varphi'(z)}=\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{\varphi'(z)},$$

$$dp=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varphi'^2(z)\cos^2\frac{\theta}{2}}\left[\cos\theta\,\varphi''(z)\,dz+\varphi'(z)\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\,d\theta\right],$$

$$dq=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varphi'^2(z)\cos^2\frac{\theta}{2}}[\sin\theta\,\varphi''(z)\,dz-\varphi'(z)\,d\theta],$$

$$dx=2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}\,\varphi'(z)\,dz-\sin\frac{\theta}{2}\,\varphi(z)\,d\theta\right],$$

$$dy=\sin\theta\,\varphi'(z)\,dz+\varphi(z)\cos\theta\,d\theta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation générale des lignes asymptotiques

$$dp\,dx+dq\,dy=0,$$

on aura l'équation demandée :

$$\begin{aligned}&2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\theta\,\varphi''(z)\,dz+\varphi'(z)\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\,d\theta\right]\\ &\quad\times\left[\cos\frac{\theta}{2}\,\varphi'(z)\,dz-\sin\frac{\theta}{2}\,\varphi(z)\,d\theta\right]\\ &\quad+[\sin\theta\,\varphi''(z)\,dz-\varphi'(z)\,d\theta]\\ &\qquad\times[\sin\theta\,\varphi'(z)\,dz+\varphi(z)\cos\theta\,d\theta]=0.\end{aligned}$$

ou

$$(4) \qquad \sqrt{\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}}\,dz = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Application. — Dans le cas où la courbe C est une parabole, on a

$$\varphi(z) = \frac{z^2}{2p},$$

d'où

$$\varphi'(z) = \frac{z}{p}, \quad \varphi''(z) = \frac{1}{p}.$$

L'équation (4) devient alors

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

d'où

$$\log z = \log\tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right) + \log C$$

et

$$z = C\tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right).$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 251

(voir 1re série, t. XI, p. 114);

Par M. J. BOURGET,

Docteur ès Sciences.

Placer les huit premiers nombres sur une même ligne, de telle sorte que la différence de deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à la différence

de leurs rangs dans la ligne. Combien existe-t-il de dispositions de ce genre?

17582463

est une de ces dispositions.

Placer sur un échiquier huit reines, de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise à l'une des sept autres?

La solution est une conséquence de la précédente.

(E. LIONNET.)

Ce problème est évidemment difficile : il s'agit de choisir, parmi les 40320 permutations des huit chiffres (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) celles qui satisfont à la condition imposée par l'énoncé.

A la page 148 du tome XI, 1re série des *Nouvelles Annales*, Terquem dit, dans une Note, que Koralek, par un procédé empirique, a trouvé que le problème de Lionnet a 92 solutions, dont 12 seulement sont distinctes, mais il ne nous fait pas connaître ces solutions, ni le procédé employé par Koralek pour arriver à ces conclusions.

En m'occupant du problème des permutations, j'ai été naturellement amené à réfléchir au problème de Lionnet. Après l'avoir transformé en un problème d'Analyse indéterminée, j'ai pu trouver un procédé graphique conduisant sûrement à toutes les solutions du problème. Ce procédé graphique peut être comparé au crible d'Ératosthènes, pour la détermination des nombres premiers; c'est peut-être le procédé empirique de Koralek. Quoi qu'il en soit, il me semble qu'il constitue une solution rationnelle du problème proposé, en ce sens qu'il réduit la considération de 40320 permutations à la construction d'environ 300 petits Tableaux faciles à faire.

En suivant ce procédé, que je ferai connaître tout à l'heure, j'ai trouvé, comme Koralek, 92 permutations satisfaisant à la condition imposée.

Au point de vue du problème des échecs, ces 92 solutions ne donnent que 24 figures distinctes. On comprend, en effet, que plusieurs permutations correspondent à la même disposition des dames sur un échiquier, en prenant successivement comme base de l'échiquier ses quatre côtés. Ces 24 figures peuvent même être regardées comme se réduisant à 12, en remarquant qu'elles se divisent en groupes de deux symétriques relativement à la base supérieure et à la base inférieure de l'échiquier.

Nous nous expliquons ainsi le résultat annoncé par Koralek.

Voici comment nous avons procédé :

Imaginons un échiquier de 64 cases. Le long de la première ligne verticale nous ferons mouvoir le chiffre 1, le long de la seconde ligne le chiffre 2, ainsi de suite. Il

8			3					
7						6		
6				4				
5		2						
4								8
3					5			
2							7	
1	1							
	1	2	3	4	5	6	7	8

ne devra jamais y avoir plus d'un chiffre sur une même ligne horizontale, et si nous dispersons ainsi les huit chiffres en remplissant les deux conditions que nous venons d'énoncer, nous aurons chaque fois une permutation des huit chiffres, pour laquelle le rang occupé par chaque chiffre sera le numéro de la ligne horizontale sur laquelle il se trouve. Dans la figure ci-contre nous trouvons la permutation

17582463

Les valeurs des chiffres sont les *abscisses* de chaque case du Tableau, les rangs de ces chiffres dans la permutation sont les *ordonnées*.

Ce système de représentation adopté, on voit qu'après avoir placé un chiffre dans une case de sa colonne, il ne peut pas y avoir de chiffres dans une case de la diagonale qui correspond au chiffre placé, quand on s'assujettit à la condition imposée par M. Lionnet; car, suivant cette diagonale, les ordonnées augmentent ou diminuent de la même quantité que les abscisses.

De là un procédé empirique bien simple pour trouver toutes les permutations demandées :

1° On fait une série d'échiquiers semblables à celui de la figure ci-dessus, ce qui est facile au moyen de papier quadrillé;

2° On placera 1 à la première case du bas, puis on pointe les cases horizontales et les cases diagonales correspondantes où l'on ne peut plus placer de chiffres;

3° Il reste au chiffre 2 une série de cases possibles; on le met à la première, et l'on pointe toutes les cases horizontales et diagonales correspondantes à droite;

4° Il reste au chiffre 3 une série de cases possibles; on le place à la première, et l'on pointe comme précédemment les cases horizontales et diagonales correspondantes;

5° On continue ainsi à éliminer les diverses cases de l'échiquier qui ne peuvent pas recevoir de chiffres au fur et à mesure qu'on a placé les précédents. On arrive de la sorte méthodiquement à trouver les seules permutations satisfaisant à la condition du problème.

Remarquons que si, au lieu de lire une permutation de bas en haut, nous la lisons de haut en bas

$$36428571$$

nous avons évidemment une nouvelle permutation satisfaisant à la condition Lionnet; donc, quand nous aurons placé 1 aux rangs 1, 2, 3, 4, nous pourrons nous arrêter. Les autres permutations seront celles que nous aurons déjà trouvées, lues en sens inverse. Le travail ainsi réduit exige environ 300 opérations. C'est peu, si l'on remarque que le nombre total des permutations parmi lesquelles on a choisi est 40320.

Voici le tableau des 46 permutations que nous avons trouvées :

17582463	26174835	25713864
17468253	53172864	28613574
16837425	83162574	62713584
15863724	46152837	72418536
	57142863	82417536
61528374	63184275	52814736
41582736	53168247	62714853
51842736	63185247	52617483
31758246	48136275	35714286
51468273	84136275	64718253
71386425	48157263	58417263
51863724	47185263	36815724
41586372	64158273	75316824
	63175824	64713528
	73168524	58413627
	57138642	36418572
		36814752
		57413862

En lisant chacun de ces résultats en sens inverse, nous en obtenons 46 autres satisfaisant encore à la condition imposée : donc nous avons en tout, comme le dit Koralek, 92 permutations différentes jouissant de la propriété indiquée dans l'énoncé.

Mais, au point de vue des échecs, ces permutations ne constituent pas toutes des solutions différentes. En effet, on peut prendre pour base de l'échiquier un côté quelconque, et si l'on considère une des solutions précédentes, par exemple celle qui est indiquée par Lionnet; elle donne, en prenant successivement chaque côté pour base, les solutions

84136275, 63571428, 42736851.

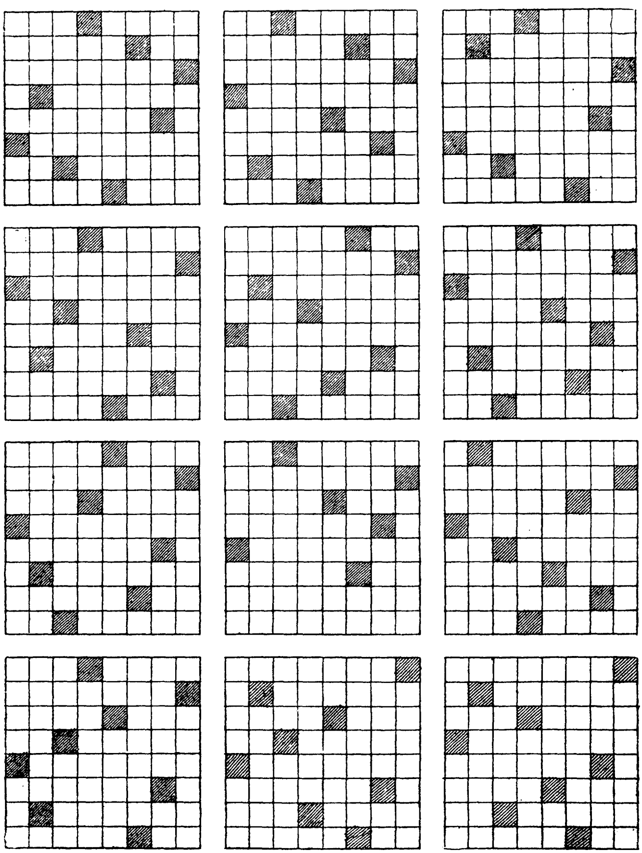
Donc on peut classer les solutions du Tableau précédent et leurs inverses en groupes donnant sur l'échiquier la même figure.

Voici le Tableau de cette classification qui renferme 24 groupes :

(1).....	17582463	84136275	63571428	42736851
(2)....	17468253	83162574	64713528	52473861
(3)....	51468273	73168524	62713584	57413862
(4)....	71386425	41586372	72631483	47531682
(5)....	61528374	57138642	52617483	75316824
(6)....	41582736	36271485	46831752	74286135
(7)....	51842736	36814752	36275184	74258136
(8)....	31758246	35714286	53847162	73825164
(9)....	51863724	36418572	72418536	57263184
(10)...	57142863	64158273	63175824	62714853
(11)...	63184275	47185263	42751863	63741825
(12)...	53172864	64718253		
(13)...	15863724	82417536	57263148	36428571
(14)...	16837425	82531746	47526138	35286471
(15)...	26831475	48531726	42586137	37286415
(16)...	28613574	58413627	27368514	52468317
(17)...	42861357	38471625	24683175	47382516
(18)...	53168247	25713864	58417263	63728514
(19)...	63185247	48157263	25741863	63724815
(20)...	26174835	46152837	68241753	64285713
(21)...	48136275	27581463	63581427	42736815
(22)...	35841726	42857136	37285146	36824175
(23)...	52814736	57248136	36258174	36815724
(24)...	35281746	46827135		

Ces 24 groupes se divisent en deux groupes de 12 termes chacun, jouissant de cette propriété que la figure correspondante à l'un des groupes de la première série de 12 est symétrique de la figure correspondante au groupe de même rang dans la seconde série. En d'autres termes, si l'on trace la figure formée par un des groupes de la première série de 12 sur une feuille de papier, en retournant la feuille et regardant la figure par transparence, on obtient la figure donnée par le groupe de même rang dans la seconde série de 12.

Donc, au point de vue du problème des échecs, on peut dire, avec Koralek, qu'il n'y a que 12 solutions distinctes donnant les figures du Tableau suivant :



Ces figures correspondent à chacun des 12 premiers groupes.

Si l'on pouvait les trouver directement par une méthode simple, on pourrait en déduire les 92 permutations des huit premiers chiffres remplissant les conditions imposées par l'énoncé de Lionnet.

QUESTION.

1376. Dans un cône donné on inscrit une sphère, et dans la partie laissée libre au-dessus de cette sphère on inscrit une nouvelle sphère; et ainsi de suite indéfiniment. Trouver l'expression du rayon de la $(n+1)^{\text{ième}}$ sphère, sachant que R est le rayon de base du cône, H la hauteur, et que C en représente le côté.

Prouver que l'espace laissé vide dans le cône par toutes ces sphères a pour volume

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H \cdot \frac{5C^2+3R^2}{3C^2+R^2}.$$

(G. Dostor.)

RECTIFICATION.

L'observation faite par M. Genty (p. 370) sur la dernière partie de l'énoncé de la question 1306 est exacte, et cet énoncé doit être modifié comme il suit :

Les tangentes de rebroussement passent respectivement par les six points où les côtés du triangle ABC *coupent la conique* C_2.

Ces tangentes sont faciles à construire. Soient γ_1 et γ_2 les points où AB coupe C_2, la tangente de rebroussement qui passe par γ_1 est la droite qui joint ce point à celui où $\gamma_2 C$ coupe C_2. Dewulf.

SUR LA FONCTION GÉNÉRATRICE DES POLYNOMES $P_{m,n}$ DE DIDON;

PAR M. G.-A. ORLOW,
Professeur à l'Institut des voies de communication, et à l'École de construction de Saint-Pétersbourg.

Dans la Note sous le titre : *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 749), Didon considère des fonctions remarquables qu'il désigne par $P_{m,n}$, et dont il donne l'expression générale sous la forme

$$P_{m,n} = K_{m,n} \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^m}{dx^m}.$$

Le coefficient $K_{m,n}$ désignant une constante et m, n des entiers positifs, la fonction $P_{m,n}$ représente un polynôme de degré $m+n$, dans lequel l'exposant de x ne surpasse pas m; en donnant à m et à n toutes les valeurs entières et positives possibles, on obtiendra une série indéfinie de polynômes de cette forme.

Didon montre que l'intégrale

$$\int\int P_{m,n} P_{m',n'}\, dx\, dy,$$

étendue sur la surface du cercle $x^2+y^2=1$, se réduit à zéro, à moins qu'on n'ait $m=m'$, $n=n'$; il trouve pour l'intégrale $\int\int P_{m,n}^2\, dx\, dy$ l'expression suivante

$$\begin{aligned} K_{m,n}^2 & \frac{2\pi}{2m+1} 2^{2m} m!\, m!\, n! \\ & \times \frac{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}{2.4.6\ldots(2m+2n+2)} (2m+n+2)\ldots(2m+2n+1). \end{aligned}$$

En posant

$$K_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!\, 2^{n+2m}},$$

il la réduit à la forme

$$\frac{2\pi}{2m+1}\,\frac{(2m+n+2)(2m+n+3)\ldots(2m+2n+1)}{n!\, 2^{2m+2n}} \times \frac{1.3.5\ldots(2m+2n+1)}{2.4.6\ldots(2m+2n+2)},$$

et trouve, pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$, c'est-à-dire pour la somme $\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n P_{m,n}$, l'expression

$$(1)\quad \begin{cases} (1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \quad \times \left[1 - ax - by - \dfrac{(a^2+b^2)(y^2-1)}{2\left(1-by+\sqrt{1-2by+b^2}\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Au moyen des propriétés précédentes, il déduit l'expression du coefficient $A_{m,n}$ dans la série de la forme

$$f(x, y) = \sum A_{m,n} P_{m,n}.$$

Les fonctions $P_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, et en particulier elles permettent de réaliser un certain mode d'approximation des fonctions quelconques de deux variables, au moyen de polynômes entiers, par rapport à ces mêmes variables. Les propriétés des polynômes $P_{m,n}$ sont exposées par Didon dans le Mémoire intitulé *Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables* (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII, p. 247).

Considérons les résultats cités plus haut.

L'expression de l'intégrale $\int\int P_{m,n}^2\,dx\,dy$ et celle de la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ dépendent du facteur constant $K_{m,n}$, dont un choix convenable permet de les simplifier. Si, au lieu de l'expression employée par Didon pour ce facteur, on pose

$$(2)\quad K_{m,n}=\frac{2^{n-m}(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{m!\,n!(2m+n+2)(2m+n+3)\ldots(2m+2n+1)},$$

on aura, comme il est aisé de le voir, pour l'intégrale $\int\int P_{m,n}^2\,dx\,dy$, l'expression

$$\frac{\pi}{m+n+1}\times\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}\,\frac{(2m+2)(2m+3)\ldots(2m+n+1)}{m!\,n!},$$

plus simple que celle citée plus haut. Par conséquent, en effectuant le développement d'une fonction quelconque de deux variables en série ordonnée suivant les polynômes $P_{m,n}$, on obtient pour le coefficient du terme général une expression plus simple et plus commode pour les applications que celle donnée par Didon.

Pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ nous aurons, comme on va voir, l'expression

$$(3)\quad [(1-2ax-2by+b^2)(1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\frac{1}{2}},$$

beaucoup plus simple que celle de Didon; elle est encore remarquable en ce qu'elle peut être généralisée.

Donnant à cette expression la forme

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-2ax-2by+b^2-\frac{a^2(y^2-1)}{1-2by+b^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et introduisant dans l'exposant du second facteur un paramètre arbitraire β, on forme une nouvelle expression

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-2ax-2by+b^2-\frac{a^2(y^2-1)}{1-2by+b^2}\right]^{-\beta-\frac{1}{2}}$$

ou bien

$$(4)\left\{\begin{array}{l}(1-2by+b^2)^{\beta}[(1-2ax-2by+b^2)\\ \qquad\qquad\times(1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)},\end{array}\right.$$

qui est à son tour la fonction génératrice des fonctions plus générales que je désignerai par $\Omega_{m,n}(x, y, \beta)$ et qui se présentent sous la forme

$$\Omega_{m,n}=C_{m,n}\frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}}\frac{d^n(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}$$
$$\times\frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}}\frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m},$$

$C_{m,n}$ y désignant une constante. Ces nouvelles fonctions $\Omega_{m,n}$ sont aussi des polynômes entiers de degré $m+n$, dans lesquels l'exposant de x ne surpasse pas m, et le terme en $x^m y^n$ est le suivant :

$$2^n\frac{(2\beta+1)(2\beta+3)\ldots(2\beta+2m-1)}{m!}$$
$$\times\frac{(\beta+m+1)(\beta+m+2)\ldots(\beta+m+n)}{n!}x^m y^n.$$

Les polynômes $P_{m,n}$ ne sont qu'un cas particulier de ces nouvelles fonctions $\Omega_{m,n}$, qui correspond à $\beta=0$.

Les polynômes $\Omega_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions connues

$$\varpi_l(x,\alpha)=c_l\frac{1}{(x^2-1)^{\alpha}}\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l},$$

où c_l désigne une constante, α un paramètre arbitraire, l un nombre entier et positif. On sait que les fonctions ϖ_l admettent une fonction génératrice très simple

$$(1-2ax+a^2)^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)},$$

si l'on pose

$$c_l = \frac{1}{l!}\,\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\dots(2\alpha+2l-1)}{(2\alpha+l+1)(2\alpha+l+2)\dots(2\alpha+2l)}.$$

Mais, en posant $c_l = \frac{1}{l!2^l}$, nous trouverons pour la fonction génératrice des mêmes polynômes une autre expression

$$2^\alpha(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-ax+\sqrt{1-2ax+a^2}\right)^{-\alpha},$$

moins simple que la précédente. On obtient facilement cette dernière expression au moyen de la formule de Lagrange

$$f'\frac{dz}{dx} = \sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{a^l}{l!}\frac{d^l}{dx^l}\{f'(x)[\varphi(x)]^l\},$$

où z est une fonction de a et de x déterminée par l'équation

$$z = x + a\varphi(z).$$

Pour cela, on n'a qu'à poser dans cette formule

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}(x^2-1),\quad f'(x) = (x^2-1)^\alpha.$$

En ayant égard à deux expressions précédentes pour la fonction génératrice des polynômes ϖ_l, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{a^l}{l!\,2^l}\,\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\,\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l}\\
&\qquad = 2^\alpha(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-ax+\sqrt{1-2ax+a^2}\right)^{-\alpha},\\
&\sum_{l=0}^{l=\infty}\frac{a^l}{l!}\,\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\dots(2\alpha+2l-1)}{(2\alpha+l+1)(2\alpha+l+2)\dots(2\alpha+2l)}\\
&\qquad\times\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}\,\frac{d^l(x^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} = (1-2ax+a^2)^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}\right.$$

D'après chacune d'elles, on peut déterminer la fonction génératrice pour les polynômes $P_{m,n}$ et $\Omega_{m,n}$.

Pour obtenir celle des polynômes $P_{m,n}$, Didon emploie deux fois la formule de Lagrange. Sa méthode peut être encore appliquée au calcul de la fonction génératrice des polynômes $\Omega_{m,n}$, c'est-à-dire à la somme

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n \Omega_{m,n}.$$

Nous abrégerons encore le calcul si au lieu de la formule de Lagrange nous employons immédiatement la première des formules (5); suivant la marche indiquée par Didon, nous trouverons pour la fonction génératrice cherchée l'expression qui, dans le cas $\beta = 0$, se réduit à l'expression (1) ou, ce qui revient au même, à

$$(1-2by+b^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-ax-by\frac{a^2+b^2}{2b^2}\left(1-by-\sqrt{1-by+b^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Mais, dans le cas général, on obtient une expression très compliquée et de peu d'intérêt.

Au contraire, en calculant la fonction génératrice des polynômes $\Omega_{m,n}$ d'après la seconde des formules (5), on aura l'expression (4) très simple citée ci-dessus. A cet effet, il faut prendre pour $C_{m,n}$ la quantité

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2^{n-m}}{m!\,n!}\,\frac{(2\beta+1)(2\beta+2)\ldots(2\beta+m)}{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)}\\ &\qquad\times\frac{(\beta+m+1)\ldots(\beta+m+n)}{(2\beta+2m+n+2)\ldots(2\beta+2m+2n+1)},\end{aligned}\right.$$

qu'on peut encore présenter comme il suit :

$$\begin{aligned}&\frac{2^n}{m!\,n!}\,\frac{(2\beta+1)(2\beta+3)\ldots(2\beta+2m-1)\,\Gamma(\beta+m+n+1)}{\Gamma(\beta+m+1)}\\ &\quad\times\frac{\Gamma(2\beta+m+1)\,\Gamma(2\beta+2m+n+2)}{\Gamma(2\beta+2m+1)\,\Gamma(2\beta+2m+2n+2)};\end{aligned}$$

et, en supposant d'abord m constant, il faut déterminer la somme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^n}{n!} \frac{2^n (\beta+m+1)\ldots(\beta+m+n)}{(2\beta+2m+n+2)\ldots(2\beta+2m+2n+1)}$$
$$\times \frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}.$$

La seconde des formules (5) donne immédiatement l'expression simple

$$(1-2by+b^2)^{-(\beta+m+1)};$$

en posant dans cette formule $\alpha = \beta + m + \frac{1}{2}$, et en remplaçant les lettres x, a, l respectivement par y, b, n.

On n'a qu'à transformer l'expression

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{m!\,2^m} \left(\frac{a}{1-2by+b^2}\right)^m \frac{(2\beta+1)\ldots(2\beta+m)}{(\beta+1)\ldots(\beta+m)}$$
$$\times \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^m (x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m},$$

et la multiplier par le facteur $(1-2by+b^2)^{-(\beta+1)}$ pour avoir la fonction génératrice demandée. Pour transformer cette dernière somme, au moyen de la seconde des formules (5), nous remarquons d'abord qu'en changeant x en $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$, faisant $a = a'\sqrt{1-y^2}$ et ayant de plus égard à l'égalité

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\ldots(2\alpha+2l-1)}{(2\alpha+l+1)(2\alpha+l+2)\ldots(2\alpha+2l)}$$
$$= \frac{1}{2^l} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)\ldots(2\alpha+l)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+l)},$$

cette formule deviendra

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{a'^l}{l!\,2^l} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)\ldots(2\alpha+l)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+l)} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\alpha}$$

$$\times \frac{d^l(x^2+y^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} = [1-2a'x-a'^2(y^2-1)]^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}.$$

En supposant ici

$$a' = \frac{a}{1-2by+b^2},$$

et en changeant les lettres l et α respectivement en m et β, nous aurons pour la somme cherchée l'expression

$$(1-2by+b^2)^{2\beta+1}[(1-2ax-2by+b^2)$$
$$\times(1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}.$$

En la multipliant par $(1-2by+b^2)^{-(\beta+1)}$, nous obtiendrons enfin l'expression de la fonction génératrice demandée (4), que l'on peut présenter encore comme il suit :

$$(1-2by+b^2)^\beta[(1-2ax-2by+a^2+b^2)$$
$$\times(1-2by+b^2)-a^2(y-b)^2]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}.$$

En posant, dans les formules (6) et (4), $\beta = 0$, nous obtiendrons les formules (2) et (3).

Donc les polynômes $\Omega_{m,n}$ peuvent être définis par l'égalité

$$(1-2by+b^2)^\beta[(1-2ax-2by+b^2)$$
$$\times(1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \Sigma a^m b^n \Omega_{m,n},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de m et n depuis o jusqu'à l'infini. Voici quelques-uns de ces polynômes dans les cas les plus simples :

$$\Omega_{0,0} = 1,$$
$$\Omega_{1,0} = (2\beta + 1)x,$$
$$\Omega_{0,1} = 2(\beta + 1)y,$$
$$\Omega_{2,0} = \frac{2\beta + 1}{2}[(2\beta + 3)x^2 + y^2 - 1],$$
$$\Omega_{1,1} = 2(2\beta + 1)(\beta + 2)xy,$$
$$\Omega_{0,2} = (\beta + 1)[2(\beta + 2)y^2 - 1],$$
$$\Omega_{3,0} = \frac{(2\beta + 1)(2\beta + 3)}{2.3}[(2\beta + 5)x^3 + 3xy^2 - 3x],$$
$$\Omega_{2,1} = (\beta + 3)(2\beta + 1)[(2\beta + 3)x^2 y + y^3 - y],$$
$$\Omega_{1,2} = (\beta + 2)(2\beta + 1[2(\beta + 3)xy^2 - x],$$
$$\Omega_{0,3} = \tfrac{2}{3}(\beta + 1)(\beta + 2)[2(\beta + 3)y^3 - 3y],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ces polynômes, ayant la fonction génératrice spéciale, ont des propriétés complètement analogues à celles des polynômes ϖ_l. Je ferai voir, dans une autre occasion, quelques-unes de ces propriétés.

THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES (1);

PAR M. CH. BIEHLER.

TROISIÈME PARTIE.

1. Cette troisième Partie a pour objet la construction des branches paraboliques fournies par une direction multiple de points à l'infini.

(1) *Voir* même Tome, p. 97.

Nous considérerons d'abord le cas où la direction donnée est celle de l'axe des y.

I.

Soit toujours

$$(1)\quad \begin{cases} F(x,y) = f_m(x,y) \\ \qquad\qquad + f_{m-1}(x,y) + \ldots + f_1(x,y) + f_0 = 0 \end{cases}$$

l'équation de la courbe, dans laquelle les groupes homogènes ont été mis en évidence et leur degré marqué par l'indice de f.

Coupons la courbe par la droite $x = \frac{1}{\lambda}$, et formons le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points d'intersection de la droite et de la courbe. Il suffit, pour cela, d'éliminer z entre les équations

$$f_m(x,y) + z f_{m-1}(x,y) + z^2 f_{m-2}(x,y) + \ldots + z^m f_0 = 0,$$

$$x = \frac{z}{\lambda}.$$

On obtient ainsi pour l'équation du faisceau

$$(2)\quad \begin{cases} f_m(x,y) + \lambda x f_{m-1}(x,y) \\ \qquad\qquad + \lambda^2 x^2 f_{m-2}(x,y) + \ldots + \lambda^m x^m f_0 = 0. \end{cases}$$

Soit t l'inverse du coefficient angulaire de l'un quelconque des rayons du faisceau, on aura

$$x = ty.$$

Remplaçant, dans (2), x par cette valeur et divisant les deux membres par y^m, il viendra

$$(3)\quad \begin{cases} f_m(t,1) + \lambda t f_{m-1}(t,1) \\ \qquad\qquad + \lambda^2 t^2 f_{m-2}(t,1) + \ldots + \lambda^m t^m f_0 = 0, \end{cases}$$

ou, en posant d'une manière générale $f_\mu(t,1) = \varphi_\mu(t)$, l'équation (3) prendra la forme

$$(4)\quad \varphi_m(t)+\lambda t\varphi_{m-1}(t)+\lambda^2 t^2\varphi_{m-2}(t)+\ldots+\lambda^m t^m\varphi_0=0.$$

2. Lorsque la droite $x=\frac{1}{\lambda}$ s'éloignera indéfiniment de l'origine, c'est-à-dire lorsque λ tendra vers zéro, une ou plusieurs valeurs de t devront tendre vers zéro, s'il existe des branches paraboliques dans la direction de l'axe des y.

Or, l'équation (4) développée devient

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\varphi_m(0)+t\varphi'_m(0)+\frac{t^2}{1.2}\varphi''_m(0)+\ldots+\frac{t^m}{m!}\varphi_m^{(m)}(0)\\&\quad+\lambda t\left[\varphi_{m-1}(0)+t\varphi'_{m-1}(0)+\ldots+\frac{t^{m-1}}{\overline{m-1}!}\varphi_{m-1}^{(m-1)}(0)\right]+\ldots\\&\quad+\lambda^{m-1}t^{m-1}[\varphi_1(0)+t\varphi'_1(0)]+\lambda^m t^m\varphi_0=0.\end{aligned}\right.$$

Il faut donc que $\varphi_m(0)=0$ et $\varphi'_m(0)=0$, pour que l'équation (5) puisse être satisfaite pour un système de valeurs infiniment petites de λ et de t, c'est-à-dire que la direction de l'axe des y soit une direction double de points à l'infini, ce qui est bien connu. L'équation (5), dans cette hypothèse, devient, après avoir été débarrassée du facteur t,

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\frac{t}{1.2}\varphi''_m(0)+\ldots+\frac{t^{m-1}}{m!}\varphi_m^{(m)}(0)\\&\quad+\lambda[\varphi_{m-1}(0)+t\varphi'_{m-1}(0)+\ldots]+\ldots\\&\quad+\lambda^{m-1}t^{m-2}[\varphi_1(0)+t\varphi'_1(0)]+\lambda^m t^{m-1}\varphi_0=0.\end{aligned}\right.$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$(7)\qquad t\left[\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0)+\alpha\right]+\lambda[\varphi_{m-1}(0)+\beta]=0;$$

on en tire

$$t=-\frac{\varphi_{m-1}(0)+\beta}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0)+\alpha}\times\lambda;$$

α et β sont des sommes de termes qui renferment tous soit t, soit λ en facteur.

Quand λ tend vers zéro, une seule racine t de l'équation (6) tendra vers zéro, et la formule

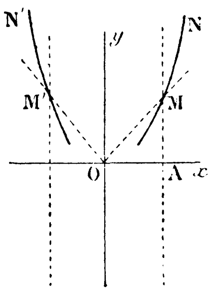
$$t = - \frac{\varphi_{m-1}(0)}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0)} \times \lambda \tag{8}$$

en donne une valeur approchée, en supposant que $\varphi'_m(0)$ et $\varphi_{m-1}(0)$ soient différents de zéro.

L'interprétation géométrique de ces résultats est très simple.

Soit OA (*fig.* 1) la quantité $\frac{1}{\lambda}$; à mesure que λ diminue, la droite AM parallèle à l'axe des y s'éloigne de

Fig. 1.



l'origine; sur cette droite se trouve un point M de la courbe qui est donné par l'intersection de AM avec un rayon OM très voisin de Oy; ce rayon a pour coefficient angulaire l'inverse de la racine infiniment petite représentée par la formule (8). Quand λ diminue, le point M engendre la branche MN, et la région dans laquelle se trouve cette branche est donnée par le signe du rapport $\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi''_m(0)}$. Lorsque λ change de signe, la racine infiniment petite change aussi de signe et donne la branche M′N′ située de l'autre côté de l'axe de y. La figure est construite dans l'hypothèse où le coefficient de λ dans la formule (8) est positif.

Supposons maintenant que $\varphi_{m-1}(0)$ soit toujours différent de zéro et qu'un certain nombre de dérivées de la fonction $\varphi_m(t)$ soient nulles pour $t=0$; soient

$$\varphi''_m(0)=0, \quad \ldots, \quad \varphi_m^{(q-1)}(0)=0 \quad \text{et} \quad \varphi_m^{(q)}(0) \gtrless 0.$$

L'équation (6) prendra la forme

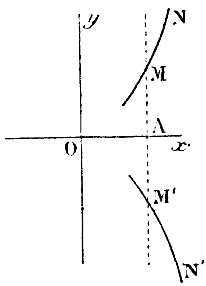
$$(9) \qquad t^{q-1}\left[\frac{\varphi_m^{(q)}(0)}{q!}+\alpha\right]+\lambda[\varphi_{m-1}(0)+\beta]=0,$$

α et β renfermant dans tous leurs termes soit t, soit λ en facteur.

Si $q-1$ est impair, une seule des $q-1$ racines infiniment petites de l'équation (9) qui tend vers zéro engendre une courbe dont la forme générale est analogue à celle de la *fig.* 1.

Si $q-1$ est pair, deux des racines de l'équation (9) sont réelles; elles sont de signes contraires, mais il faut

Fig. 2.



pour cela que λ ait reçu une valeur dont le signe soit celui du rapport $-\dfrac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi_m^{(q)}(0)}$; dans ce cas, la courbe affecte une forme semblable à celle de la *fig.* 2.

3. **Supposons maintenant que $\varphi_{m-1}(o) = o$.**

L'équation (6) ne sera satisfaite pour de petites valeurs de λ et de t qu'autant que $\varphi_m(o) = o$, $\varphi'_m(o) = o$, $\varphi''_m(o) = o$; c'est-à-dire que la direction de l'axe des y doit être triple.

Dans ce cas, l'équation (6) prend la forme

$$t\left[\frac{1}{1.2.3}\varphi'''_m(o) + \alpha\right] + \lambda[\varphi'_{m-1}(o) + \beta] = o,$$

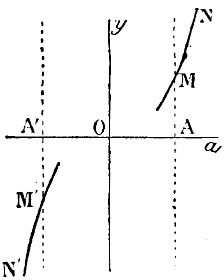
et l'on obtient encore des branches paraboliques analogues à celles de la *fig.* 1.

Mais si $\varphi_{m-1}(o) = o$ avec $\varphi'_{m-1}(o) = o$, et si $\varphi''_{m-1}(o)$ est aussi nul, l'équation pourra s'écrire

$$(10)\qquad t\left[\frac{1}{1.2.3}\varphi'''_m(o) + \alpha\right] + \lambda^2[\varphi_{m-2}(o) + \beta] = o,$$

et la racine infiniment petite t engendre les branches MN, M'N' (*fig.* 3), situées de part et d'autre de l'axe des y et dans des régions opposées du plan; la *fig.* 3 a été con-

Fig. 3.



struite dans l'hypothèse où le rapport $\dfrac{\varphi_{m-2}(o)}{\varphi'''_m(o)}$ est négatif.

4. Considérons maintenant le cas où l'on a

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi'_m(0) = 0, \quad \varphi''_m(0) = 0,$$
$$\varphi'''_m(0) = 0, \quad \varphi^{\text{IV}}_m(0) = \gtrless 0,$$
$$\varphi_{m-1}(0) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(0) = 0, \quad \varphi''_{m-1}(0) \gtrless 0 \quad \text{avec} \quad \varphi_{m-2}(0) \gtrless 0;$$

l'équation (6) deviendra

$$(11) \qquad t^2 \frac{\varphi^{\text{IV}}_m(0)}{4!} + \lambda t \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2} + \lambda^2 \varphi_{m-2}(0) + \gamma = 0,$$

γ étant une somme de termes qui sont tous infiniment petits devant les trois premiers.

Si l'on pose $t = \tau \times \lambda$, l'équation (11) aura tous ses termes divisibles par λ^2 et pourra s'écrire

$$(12) \qquad \tau^2 \frac{\varphi^{\text{IV}}_m(0)}{4!} + \tau \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2} + \varphi_{m-2}(0) + \gamma' = 0,$$

γ' étant une somme de termes qui renferment tous λ en facteur.

Quand λ est très petit, la fonction τ a une valeur aussi voisine que l'on veut de la valeur de l'une des racines de l'équation du second degré

$$(13) \qquad \tau^2 \frac{\varphi^{\text{IV}}_m(0)}{4!} + \tau \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2} + \varphi_{m-2}(0) = 0.$$

Soient τ_0 et τ_1 les racines de l'équation (13).

Si τ_0 et τ_1 sont réelles et inégales, les valeurs des deux racines de l'équation (11) qui tendent vers zéro sont

$$t = \tau_0 \times \lambda, \quad t = \tau_1 \times \lambda.$$

Si τ_0 et τ_1 sont de même signe, on obtient une disposition des branches analogues à celle que présente la *fig.* 4.

Si τ_0 et τ_1 sont de signes contraires, on obtient la *fig.* 5.

La *fig.* 4 a été construite dans l'hypothèse où τ_0 et τ_1 sont positifs.

Si les racines de l'équation (13) sont imaginaires, il

Fig. 4.

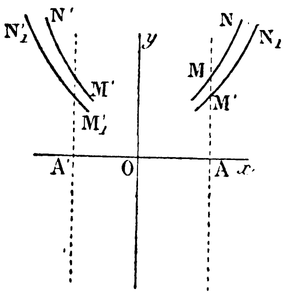
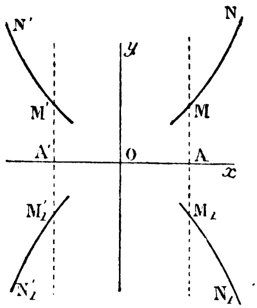


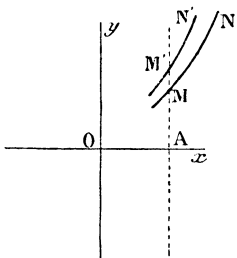
Fig. 5.



n'y a pas de branche parabolique réelle dans la direction de l'axe des y.

Enfin, si les racines de l'équation (13) sont égales

Fig. 6.



entre elles, l'équation (12) pourra se mettre sous la forme

$$\varphi_m^{\text{iv}}(0)\,(\tau-\tau_0)^2 + A\lambda + B\lambda^2 + \ldots = 0;$$

les deux valeurs de τ qui ont pour limite τ_0 ont donc pour valeurs approchées

$$\tau = \tau_0 \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_m^{\text{IV}}(0)}} \times \lambda,$$

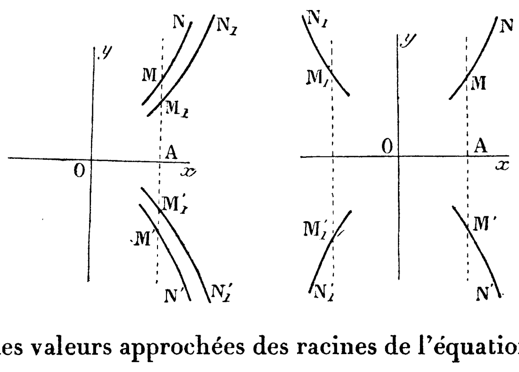
et, par suite,

$$t = \tau_0 \lambda \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_m^{\text{IV}}(0)}} \lambda^3.$$

Ces deux racines donnent naissance aux branches paraboliques de la *fig.* 6.

5. La discussion complète de l'équation (6) dans le cas où $\varphi_{m-2}(0)$ est différent de zéro se fait comme la discussion de l'équation (17) de la première Partie [1]; nous n'insisterons pas davantage et nous nous bornerons à remarquer que cette étude ne nous donne que deux nouvelles formes de courbes, comme nous l'avons déjà vu pour les branches qui se croisent à l'origine : ce sont celles que présentent les *fig.* 7 et 8; elles sont fournies

Fig. 7. Fig. 8.



par des valeurs approchées des racines de l'équation (6),

[1] Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX (novembre 1880).

de la forme

$$t = \sqrt[n]{\tau_0 \times \lambda},$$

$$t = \sqrt[n]{\tau_1 \times \lambda},$$

pour des valeurs paires de n; la *fig.* 7 convient au cas où τ_0 et τ_1 sont de même signe, et la *fig.* 8 au cas où τ_0 et τ_1 sont de signes contraires. Dans la *fig.* 8, les quatre branches MN, M′N′, M_1N_1, $M'_1N'_1$ sont fournies par quatre racines différentes; dans la *fig.* 7, au contraire, deux racines infiniment petites fournissent les quatre branches.

Nous allons passer maintenant au cas où la direction multiple des points à l'infini est autre que celle de l'axe des y. (*A suivre.*)

THÉORÈMES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. WEILL.

Considérons une courbe algébrique représentée par l'équation

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

Cherchons les abscisses des points où elle est rencontrée par une droite

$$y = ax + b;$$

l'équation qui donne ces abscisses sera

$$0 = x^m \varphi_m(1,a) + x^{m-1}(b\varphi'_m + \varphi_{m-1}) + x^{m-2}\left(\frac{b^2}{2}\varphi''_m + b\varphi'_{m-1} + \varphi_{m-2}\right) + \ldots .$$

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de cette équation; la somme des carrés des différences de ces racines prises deux à deux est

$$(m-1)(x_1+x_2+\ldots+x_m)^2$$
$$-2m(x_1x_2+x_1x_3+\ldots)=k^2.$$

La somme des carrés des distances mutuelles des points de rencontre de la sécante avec la courbe est égale à $k^2(1+a^2)$, c'est-à-dire à

$$(1+a^2)\left[\frac{(m-1)(b\varphi'_m+\varphi_{m-1})^2}{(\varphi_m)^2}-2m\frac{\frac{b^2}{2}\varphi''_m+b\varphi'_{m-1}+\varphi_{m-2}}{\varphi_m}\right].$$

Nous allons tirer quelques conséquences de cette formule. Elle montre d'abord que si l'on coupe par une droite une série de courbes dans lesquelles les termes de degré le plus élevé m, ainsi que les termes de degré $(m-1)$ et $(m-2)$ sont les mêmes, la somme des carrés des distances mutuelles des points où la sécante rencontre chacune des courbes est la même. Cherchons les courbes pour lesquelles la somme des carrés des distances mutuelles des points de rencontre avec une série de sécantes parallèles reste la même; il faudra, dans la formule, annuler le coefficient de b^2 et celui de b. On a alors les relations

$$(m-1)(\varphi'_m)^2-m\varphi_m\varphi''_m=0,$$
$$(m-1)\varphi'_m\varphi_{m-1}-m\varphi_m\varphi'_{m-1}=0.$$

On en déduit

$$\varphi_m=(kx+ly)^m,$$
$$\varphi_{m-1}=c(kx+ly)^{m-1}.$$

Par une transformation de coordonnées, on peut ramener l'équation de la courbe à la forme

$$y^m+\varphi_{m-2}(x,y)+\ldots=0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque l'équation d'une courbe peut se ramener à la forme*

$$y^m + \varphi_{m-2}(x, y) + \ldots = 0,$$

la somme des carrés des distances mutuelles des points où une sécante rencontre cette courbe reste constante quand la sécante se déplace parallèlement à elle-même. Les courbes dont l'équation réduite est de la forme indiquée sont les seules qui jouissent de cette propriété géométrique.

Remarque. — On peut observer que, pour les courbes dont il s'agit, le centre des moyennes distances des points où une sécante quelconque rencontre la courbe est sur une droite fixe.

Si l'on cherche les conditions pour que la somme des carrés des distances des points où une sécante rencontre une courbe soit nulle, on trouve, d'après la formule établie plus haut, qu'il faut que l'on ait pour forme réduite de l'équation de la courbe

$$y^m + \varphi_{m-3}(x, y) + \ldots = 0,$$

et l'on a le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une courbe dont l'équation réduite est*

$$y^m + \varphi_{m-3}(x, y) + \ldots = 0,$$

la somme des carrés des distances mutuelles des points où une sécante quelconque rencontre la courbe est toujours nulle, et c'est la seule courbe jouissant de cette propriété.

EXERCICES DE CALCUL ALGÉBRIQUE;

Par M. S. REALIS.

1. Question. — *Désignant par* P *la somme de deux carrés premiers entre eux, et par* n *un entier positif quelconque, démontrer, par un calcul direct, que le nombre* $9\mathrm{P}^n$ *est la somme de trois carrés, premiers entre eux par rapport à* P.

Solution. — Soit $\mathrm{P} = p^2 + q^2$. On a, pour les premières valeurs de n,

$$\begin{aligned}
9\mathrm{P} &= (2p+q)^2 + 4(p-q)^2 + (p+2q)^2,\\
9\mathrm{P}^2 &= 4(p^2+pq-q^2)^2 + 4(p^2-2pq-q^2)^2 + (p^2+4pq-q^2)^2,\\
9\mathrm{P}^3 &= (2p^3+3p^2q-6pq^2-q^3)^2 + 4(p^3-3p^2q-3pq^2+q^3)^2\\
&\quad + (p^3+6p^2q-3pq^2-2q^3)^2,\\
9\mathrm{P}^4 &= 4(p^4+2p^3q-6p^2q^2-2pq^3+q^4)^2\\
&\quad + 4(p^4-4p^3q-6p^2q^2+4pq^3+q^4)^2\\
&\quad + (p^4+8p^3q-6p^2q^2-8pq^3-q^4)^2,\\
9\mathrm{P}^5 &= (2p^5+5p^4q-20p^3q^2-10p^2q^3+10pq^4+q^5)^2\\
&\quad + 4(p^5-5p^4q-10p^3q^2+10p^2q^3+5pq^4-q^5)^2\\
&\quad + (p^5+10p^4q-10p^3q^2-20p^2q^3+5pq^4+2q^5)^2,
\end{aligned}$$

. . . .

La formule générale, constituant la solution de la question proposée, est comme il suit.

Soient $n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ les coefficients binomiaux, en sorte que

$$(1+1)^n = 1 + n + n_1 + n_2 + \ldots + n_1 + n + 1,$$

et soit fait, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q} &= 2p^n + np^{n-1}q - 2n_1p^{n-2}q^2 - n_2p^{n-3}q^3 + 2n_3p^{n-4}q^4 + \ldots,\\
\mathrm{R} &= p^n - np^{n-1}q - n_1p^{n-2}q^2 + n_2p^{n-3}q^3 + n_3p^{n-4}q^4 + \ldots,\\
\mathrm{S} &= p^n + 2np^{n-1}q - n_1p^{n-2}q^2 - 2n_2p^{n-3}q^3 + n_3p^{n-4}q^4 + \ldots;
\end{aligned}$$

on aura, pour toute valeur entière et positive de n,

$$9\,P^n = Q^2 + 4\,R^2 + S^2.$$

Note. — Pour éviter tout malentendu dans l'application de la formule générale, nous ajouterons les observations suivantes :

1° Dans les polynômes Q et S, les signes des deux premiers termes sont positifs, ceux des deux termes suivants sont négatifs, ceux du cinquième et du sixième termes sont positifs, et ainsi de suite, en alternant de deux en deux termes. Dans le polynôme R, le signe du premier terme est positif, ceux des deux termes suivants sont négatifs, ceux du quatrième et du cinquième terme redeviennent positifs, et ainsi de suite.

2° Dans le polynôme Q, les coefficients n_{2m+1}, d'indice impair, sont multipliés par 2; de même, dans le polynôme S, pour les coefficients n_{2m}, d'indice pair. Dans l'expression de R, les coefficients n, n_1, n_2, ... se suivent tels qu'ils se présentent dans le développement du binôme, au signe près.

La vérification de la formule en question est un utile exercice que nous proposons aux jeunes élèves. On peut y procéder de deux manières, savoir : en constatant directement qu'il y a identité entre les deux membres développés, ou bien en faisant voir que, si la relation subsiste pour une valeur donnée de n, elle subsiste encore pour les valeurs $n+1$, $n+2$, ...

2. Changeons, dans les identités ci-dessus, q en $q\sqrt{-1}$; il nous viendra

$$9\,(p^2 - q^2) = (2p + q\sqrt{-1})^2 + 4\,(p - q\sqrt{-1})^2 + (p + 2\,q\sqrt{-1})^2,$$

et

$$9\,(p^2 - q^2)^n = (p' + q'\sqrt{-1})^2 + 4\,(p'' - q''\sqrt{-1})^2 + (p''' + q'''\sqrt{-1})^2.$$

p', q', p'', q'', p''', q''' étant déterminés directement en fonction de p et q.

Moyennant des valeurs convenables de p et q, l'expression $p^2 - q^2$ peut représenter tout nombre impair donné; on a donc ce théorème que : *la puissance $n^{ième}$ d'un nombre impair quelconque, étant multipliée par* 9, *est la somme des carrés de trois nombres entiers complexes, que l'on peut déterminer directement.*

En particulier

$$9(2p-1) = \left[2p+(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 + 4\left[p-(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 + \left[p+2(p-1)\sqrt{-1}\right]^2,$$

$$\begin{aligned} 9(2p-1)^2 = {} & 4\left[(2p^2-2p+1)+p(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 \\ & + 4\left[(2p^2-2p+1)-2p(p-1)\sqrt{-1}\right]^2 \\ & + \left[(2p^2-2p+1)+4p(p-1)\sqrt{-1}\right]^2. \end{aligned}$$

L'identité

$$\begin{aligned} x = {} & \left[\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{2.3}\sqrt{-1}\right]^2 + \left[\frac{x+1}{3}-\frac{x-1}{3}\sqrt{-1}\right]^2 \\ & + \left[\frac{x+1}{2.3}+\frac{x-1}{3}\sqrt{-1}\right]^2, \end{aligned}$$

en y désignant par x un nombre entier quelconque, exprime une proportion plus générale, à savoir que : *tout nombre entier est, par une décomposition directe, la somme des carrés de trois nombres rationnels complexes.*

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} xz = {} & \left[\frac{x+z}{3}+\frac{x-z}{2.3}\sqrt{-1}\right]^2 + \left[\frac{x+z}{3}-\frac{x-z}{3}\sqrt{-1}\right]^2 \\ & + \left[\frac{x+z}{2.3}+\frac{x-z}{3}\sqrt{-1}\right]^2. \end{aligned}$$

Nous n'avons pas besoin de rappeler que l'on entend par *nombre rationnel complexe* l'expression $a+b\sqrt{-1}$, dans laquelle a et b sont des quantités rationnelles. Si a et b ont des valeurs entières, la même expression prend le nom de *nombre entier complexe*.

3. Des relations inscrites au n° **1**, on passe facilement aux suivantes :

$$
\begin{aligned}
18\,P &= (3p-q)^2 + (4q)^2 + (3p+q)^2,\\
18\,P^2 &= (3p^2-2pq-3q^2)^2 + (8pq)^2 + (3p^2-2pq-3q^2)^2,\\
18\,P^3 &= (3p^3-3p^2q-9pq^2+q^3)^2 + [4q(3p^2-q^2)]^2\\
&\quad + (3p^3+3p^2q-9pq^2-q^3)^2,\\
18\,P^4 &= (3p^4-4p^3q-18p^2q^2+4pq^3+3q^4)^2\\
&\quad + [16pq(p^2-q^2)]^2\\
&\quad + (3p^4+4p^3q-18p^2q^2-4pq^3-3q^4)^2,\\
18\,P^5 &= (3p^5-5p^4q-30p^3q^2+10p^2q^3+15pq^4-q^5)^2\\
&\quad + [4q(5p^4-10p^2q^2+q^4)]^2\\
&\quad + (3p^5+5p^4q-30p^3q^2-10p^2q^3+15pq^4+q^5)^2,
\end{aligned}
$$

. . . .

dont nous laissons au lecteur le soin de formuler la loi. Elles renferment, comme on voit, la solution d'une question analogue à la précédente.

On obtient ici, en particulier, l'identité assez remarquable

$$2(6p-1) = \left[p-(3p-1)\sqrt{-1}\right]^2 + (4p)^2 + \left[p+(3p-1)\sqrt{-1}\right]^2,$$

comprise, du reste, dans la formule

$$2q(6p-q) = \left[p-(3p-q)\sqrt{-1}\right]^2 + (4p)^2 + \left[p+(3p-q)\sqrt{-1}\right]^2.$$

4. On a, par identité,

$$2\,P^n = R^2 + T^2,$$

P et R étant les mêmes quantités que ci-dessus (n° **1**), et T se déduisant de R, par le changement de q en $-q$.

Écrivant

$$9\,P^n = 4\,R^2 + 4\,T^2 + P^n,$$

il en résulte, dans le cas où n est un nombre pair, une nouvelle solution de la question considérée au n° 1.

Il se présente ici l'égalité évidente

$$2(2p-1)=[p-(p-1)\sqrt{-1}]^2+[p+(p-1)\sqrt{-1}]^2,$$

par où le double de tout nombre impair est représenté par la somme des carrés de deux entiers complexes conjugués; et l'on a, de même,

$$2.3(2p-1)=[(p+1)-(p-2)\sqrt{-1}]^2+[(p+1)+(p-2)\sqrt{-1}]^2,$$
$$2.5(2p-1)=[(p+2)-(p-3)\sqrt{-1}]^2+[(p+2)+(p-3)\sqrt{-1}]^2,$$
$$2.7(2p-1)=[(p+3)-(p-4)\sqrt{-1}]^2+[(p+3)+(p-4)\sqrt{-1}]^2,$$

. . . .

$$\begin{aligned}2(2h-1)(2p-1)=&[(p+h-1)-(p-h)\sqrt{-1}]^2\\&+[(p+h-1)+(p-h)\sqrt{-1}]^2,\end{aligned}$$

ou, sous forme plus simple,

$$8xy=[(x+y)-(x-y)\sqrt{-1}]^2+[(x+y)+(x-y)\sqrt{-1}]^2.$$

5. Les résultats qui précèdent peuvent être généralisés à différents points de vue, ce qui fournira de nouveaux sujets d'exercices pour les élèves.

Nous nous bornons ici à remarquer que les formules relatées, étant de simples identités algébriques, sont indépendantes de toute hypothèse préalable à l'égard des quantités p et q. Les formules générales, où n reste indéterminé, sont même indépendantes de la condition que n soit un entier positif, puisque les relations établies entre les coefficients binomiaux n, n_1, n_2, n_3, ... ressortent des opérations à faire pour la vérification des mêmes formules, et ne sont pas une conséquence de l'hypothèse que n soit entier et positif. Il suffit donc, pour que l'égalité subsiste entre les deux membres de chaque formule générale, que les développements en série soient convergents. Or, lorsque n n'est pas un entier positif, les séries illimitées Q, R, S, T sont visiblement convergentes, toutes les fois que le développement de P^n est lui-même convergent.

Considérons, par exemple, la formule générale du nº 4, relative à la décomposition de $2P^n$ en deux carrés, et écrivons

$$P^n = p^{2n}\left(1 + n\frac{q^2}{p^2} + n_1\frac{q^4}{p^4} + n_2\frac{q^6}{p^6} + \ldots\right) = p^{2n}P',$$

$$R = p^n\left(1 - n\frac{q}{p} - n_1\frac{q^2}{p^2} + n_2\frac{q^3}{p^3} + \ldots\right) = p^n R',$$

$$T = p^n\left(1 + n\frac{q}{p} - n_1\frac{q^2}{p^2} - n_2\frac{q^3}{q_3} + \ldots\right) = p^n T',$$

où l'on suppose $p^2 > q^2$. La relation

$$2P' = R'^2 + T'^2$$

aura lieu identiquement entre les quantités p et q, quelle que soit la valeur réelle de n; il en sera donc de même à l'égard de la relation

$$2P^n = R^2 + T^2,$$

que nous avons rapportée ci-dessus, en y considérant n comme entier et positif.

SUR LE MOUVEMENT VERTICAL D'UN POINT PESANT DANS UN MILIEU RÉSISTANT;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève de l'École Polytechnique.

---

1. On sait que la loi du mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant est différente selon que le mouvement est descendant ou ascendant.

Cette Note a pour but de faire connaître une propriété commune à ces deux mouvements. Cette propriété n'est autre que l'expression de la loi qui lie les espaces parcourus par le mobile dans des temps égaux.

Nous supposons la résistance du milieu ambiant proportionnelle au carré de la vitesse.

2. *Mouvement descendant.* — Considérons les espaces successifs parcourus par le mobile pendant des intervalles de temps égaux τ. Soient α_{n-1} et α_n deux de ces espaces consécutifs. En appelant g l'intensité de la pesanteur dans le vide, K la constante de résistance du milieu considéré, nous avons le théorème suivant :

Théorème. — *La somme* $e^{-\frac{g\alpha_{n-1}}{K^2}} + e^{\frac{g\alpha_n}{K^2}}$ *est constante et indépendante de la vitesse initiale du mobile.*

En appelant v_0 la vitesse initiale du mobile, on sait que la loi du mouvement descendant est donnée par la formule

$$z = \frac{K^2}{g}\log\frac{e^{\frac{gt}{K}}(K+v_0)+e^{-\frac{gt}{K}}(K-v_0)}{2K},$$

que nous pourrons écrire

$$2Ke^{\frac{gz}{K^2}} = e^{\frac{gt}{K}}(K+v_0)+e^{-\frac{gt}{K}}(K-v_0).$$

Nous poserons, pour simplifier l'écriture, $e^{\frac{g}{K}} = \varepsilon$, et cette formule deviendra

$$(1)\qquad 2K\varepsilon^{\frac{z}{K}} = \varepsilon^{t}(K+v_0)+\varepsilon^{-t}(K-v_0).$$

Si z et t sont pris pour représenter l'espace et le temps correspondant au point de séparation des segments α_{n-1} et α_n, nous avons, par application de la formule (1),

$$2K\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{K}} = \varepsilon^{t-\tau}(K+v_0) + \varepsilon^{-(t-\tau)}(K-v_0)$$

et

$$2K\varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{K}} = \varepsilon^{t+\tau}(K+v_0) + \varepsilon^{-(t+\tau)}(K-v_0).$$

Additionnons ces deux dernières égalités membre à membre; il nous vient

$$2K\left(\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{K}} + \varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{K}}\right)$$
$$= \varepsilon^{t}(\varepsilon^{-\tau}+\varepsilon^{\tau})(K+v_0) + \varepsilon^{-t}(\varepsilon^{\tau}+\varepsilon^{-\tau})(K-v_0)$$

ou

$$2K\left(\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{K}} + \varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{K}}\right) = [\varepsilon^{t}(K+v_0) + \varepsilon^{-t}(K-v_0)](\varepsilon^{\tau}+\varepsilon^{-\tau}).$$

Divisant cette égalité par l'égalité (1), membre à membre, nous avons

$$\frac{\varepsilon^{\frac{z-\alpha_{n-1}}{K}} + \varepsilon^{\frac{z+\alpha_n}{K}}}{\varepsilon^{\frac{z}{K}}} = \varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau},$$

ou

$$\varepsilon^{-\frac{\alpha_{n-1}}{K}} + \varepsilon^{\frac{\alpha_n}{K}} = \varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau},$$

ou encore

$$e^{-\frac{g\alpha_{n-1}}{K^2}} + e^{\frac{g\alpha_n}{K^2}} = e^{\frac{g\tau}{K}} + e^{-\frac{g\tau}{K}}.$$

La valeur du second membre, ne dépendant que de quantités fixes, est constante. De plus, la valeur de cette constante est indépendante de la vitesse initiale v_0. Le théorème est, par suite, démontré.

Remarque. — En appelant α l'espace parcouru, au bout du temps τ, par le mobile, à partir de sa position initiale, lorsqu'on le laisse tomber sans lui imprimer de vitesse, on a

$$e^{\frac{g\tau}{K}} + e^{-\frac{g\tau}{K}} = 2e^{\frac{g\alpha}{K^2}}.$$

On a ainsi une nouvelle expression de la constante

3. *Mouvement ascendant.* — En conservant aux diverses lettres la même signification que dans le numéro précédent, on a encore :

Théorème. — *La somme* $e^{-\frac{g\alpha_{n-1}}{K^2}} + e^{\frac{g\alpha_n}{K^2}}$ *est constante et indépendante de la vitesse initiale du mobile.*

On sait que la loi du mouvement ascendant est donnée par la formule

$$z = \frac{K^2}{g} \log \frac{v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}}{K},$$

que nous pouvons écrire

$$(2) \qquad K e^{\frac{gz}{K^2}} = v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}.$$

Si z et t sont pris pour représenter l'espace et le temps correspondant au point de séparation des segments α_{n-1} et α_n, parcourus consécutivement par le mobile dans le temps τ, nous avons, d'après la formule (2),

$$K e^{\frac{g(z-\alpha_{n-1})}{K^2}} = v_0 \sin \frac{g}{K}(t-\tau) + K \cos \frac{g}{K}(t-\tau),$$

et

$$K e^{\frac{g(z+\alpha_n)}{K^2}} = v_0 \sin \frac{g}{K}(t+\tau) + K \cos \frac{g}{K}(t+\tau).$$

Additionnant ces deux égalités membre à membre, nous avons

$$\begin{aligned} K\left(e^{\frac{g(z-\alpha_{n-1})}{K^2}} + e^{\frac{g(z+\alpha_n)}{K^2}}\right) &= 2 v_0 \sin \frac{gt}{K} \cos \frac{g\tau}{K} + 2K \cos \frac{gt}{K} \cos \frac{g\tau}{K} \\ &= 2 \cos \frac{g\tau}{K}\left(v_0 \sin \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}\right). \end{aligned}$$

Divisons cette dernière égalité par l'égalité (2) membre à membre, il nous vient

$$\frac{e^{\frac{g(\tau-\alpha_{n-1})}{K^2}}+e^{\frac{g(\tau+\alpha_n)}{K^2}}}{e^{\frac{g\tau}{K^2}}}=2\cos\frac{g\tau}{K}$$

ou

$$e^{-\frac{g\alpha_{n-1}}{K^2}}+e^{\frac{g\alpha_n}{K^2}}=2\cos\frac{g\tau}{K}.$$

La valeur du second membre, ne dépendant que de quantités fixes, est constante. De plus, la valeur de cette constante est indépendante de la vitesse initiale v_0. Le théorème est donc démontré.

Nous mettrons cette constante sous une forme qui se rapprochera plus de celle que nous avons obtenue, dans le cas du mouvement descendant, en remarquant que

$$2\cos\frac{g\tau}{K}=e^{\frac{g\tau}{K}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{g\tau}{K}\sqrt{-1}}.$$

4. *Résumé*. — En définitive, lorsqu'un point pesant se meut verticalement dans un milieu résistant, dans un sens ou dans l'autre, on a

$$e^{-\frac{g\alpha_{n-1}}{K^2}}+e^{\frac{g\alpha_n}{K^2}}=C,$$

la constante C étant indépendante de v_0.

Posant, d'une manière générale,

$$e^{\frac{g\alpha_i}{K^2}}=E_i,$$

nous écrirons la formule précédente

$$\frac{1}{E_{n-1}}+E_n=C.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{E_1}+E_2=C,$$

d'où

$$E_2 = C - \frac{1}{E_1}.$$

De même,

$$E_3 = C - \frac{1}{E_2} = C - \cfrac{1}{C - \cfrac{1}{E_1}},$$

et encore

$$E_4 = C - \cfrac{1}{C - \cfrac{1}{C - \cfrac{1}{E_1}}}.$$

Nous voyons ainsi comment sont liés E_n et E_1, et par suite α_n et α_1.

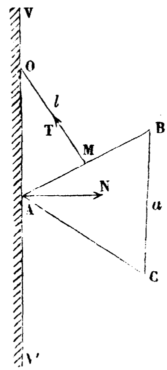
CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1880.

Composition de Géométrie et Statique.

1° *Géométrie.* — Exposer brièvement la suite des théorèmes qui conduisent à la mesure du volume d'un parallélépipède quelconque; faire ressortir l'enchaînement de ces propositions; insister sur ce qu'on entend par la *mesure d'un volume*.

Comme application, calculer le poids d'un parallélépipède rectangle dont la hauteur $h = 1^{m},352$, dont la base $B = 2^{mq},36524$, et dont le poids d'un décimètre cube est $0^{kg},661$.

2° *Statique.* — Soit un triangle équilatéral *pesant* ABC, dont le côté est égal à a, et qui n'est susceptible de se mouvoir que dans un plan vertical. Au milieu M du côté AB, on attache un fil de longueur $OM = l$, dont l'autre extrémité est fixée en un point O d'un mur vertical VV'; la tension du fil donne lieu à une force T appliquée en M au triangle ABC dans la direction de MO; le sommet A s'appuie sans frottement sur le mur verti-

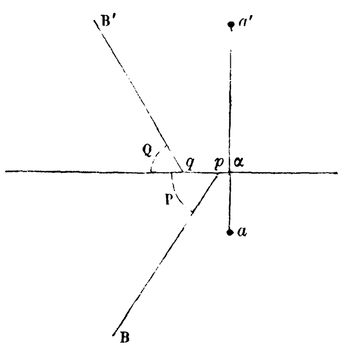


cal VV′, c'est-à-dire que la réaction du mur donne lieu à une force normale N, appliquée au sommet A.

On demande de trouver les positions d'équilibre du triangle ABC.

Tracé graphique.

Étant donnés un point (a, a') et une droite (B, B'),



dont les positions sont déterminées comme il suit :

$$\alpha a = 0^{m},020, \quad \alpha p = 0^{m},0035, \quad P = 56^{o},30,$$
$$\alpha a' = 0^{m},050, \quad \alpha q = 0^{m},0155, \quad Q = 60^{o},$$

1° Mener par le point (aa') une droite (XX') perpendiculaire à la droite (BB') et faisant avec la ligne de terre un angle $\varphi = 49°$;

2° Construire la plus courte distance de la droite (BB') et de la droite (XX');

3° Construire sur cette plus courte distance et sur les deux droites (BB'), (XX') un parallélépipède rectangle, dont les côtés, pris respectivement le long de (BB') et de (XX'), aient pour longueurs $0^m,030$ et $0^m,035$.

Remarque. — Le problème admet plusieurs solutions; on choisira celle des droites (XX') qui est la moins inclinée sur le plan horizontal, et pour parallélépipède celui qui est le plus en haut et à gauche.

Composition d'Arithmétique, d'Algèbre et de calcul de Trigonométrie rectiligne.

1° *Arithmétique.* — Calculer le volume qu'occupent 565^{fr} en pièces d'argent de 2^{fr} et de 1^{fr}, sachant que la densité de l'argent est 10,47, et que celle du cuivre est 8,95.

2° *Algèbre.* — Étant données l'équation du second degré

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 = a^2(1 - e^2)$$

dans laquelle a et e sont des constantes, e étant plus petit que 1, et aussi les deux relations

$$x = ae + r\cos V,$$
$$y = r\sin V,$$

dans lesquelles r et V sont deux nouvelles variables, exprimer le plus simplement possible r en fonction de V, et déterminer les valeurs de V pour lesquelles r atteint ses valeurs maxima et minima.

3° *Calcul numérique de Trigonométrie.*—On donne dans le triangle ABC

$$a = 857^{\text{m}},649,$$
$$c = 703^{\text{m}},625,$$
$$\text{B} = 39^\circ 47' 56''.$$

Calculer les autres éléments et la surface.

PROPOSITIONS;

PAR M. LIONNET.

I. L'unité est le seul nombre triangulaire égal à la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

II. Dix est le seul nombre triangulaire égal à la somme des carrés de deux impairs consécutifs.

III. Un et cinq sont les deux seules sommes consécutives de deux carrés d'entiers consécutifs dont le produit égale une somme de deux carrés d'entiers consécutifs.

IV. Quand un nombre triangulaire T égale le produit de deux entiers consécutifs dont le plus petit est double d'un triangulaire, $4\text{T} + 1$ est, ainsi que sa racine carrée, la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

Il en résulte que, pour $\text{T} = 0$ et $\text{T} = 6$, 1 et 5 sont, ainsi que leurs carrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. On démontre facilement, avec ou sans l'emploi des imaginaires, que 1 et 5 sont les seuls nombres premiers ayant cette double propriété; et de même pour 1 et 13 qui sont, ainsi que leurs bicarrés, la somme des carrés de deux entiers consécutifs. Mais on ignore encore si un ou plusieurs nombres composés ont l'une de ces doubles propriétés.

V. Aucun produit $1.3.5.7.9\ldots$ de plusieurs impairs consécutifs n'est égal à un nombre entier élevé à une puissance d'un degré supérieur à l'unité.

VI. Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme ou la différence des cubes soit égale au carré d'un nombre entier.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1272

(voir 2e série, t. XVII, p. 288);

PAR UN ANONYME.

Dans un tétraèdre ABCD *dont les faces sont équivalentes :*

1° *Les faces sont égales;*

2° *Le centre de gravité du tétraèdre coïncide avec les centres des sphères inscrite et circonscrite, et d'une sphère à la fois tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre et aux perpendiculaires menées à chaque face par le point de concours de ses hauteurs.*

(COTTEREAU.)

J'établirai d'abord le lemme suivant :

1. Soient XY, X'Y' deux droites, non situées dans un même plan, et PP' leur perpendiculaire commune (*). Si l'on prend sur l'une de ces deux droites, par exemple, sur XY, à partir du point P, où XY est rencontrée par PP', des distances égales PA, PB, les points A, B, ainsi

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

déterminés, seront également distants de l'autre droite $X'Y'$.

Démonstration. — Du point P' je mène une parallèle xy à XY, et des points A, B des perpendiculaires Aa, Bb à xy. Ces perpendiculaires sont parallèles et égales à PP' : on a donc $P'a = P'b$ et $Aa = Bb$.

La droite PP' étant perpendiculaire au plan des deux droites xy, $X'Y'$, il en est de même des parallèles Aa, Bb, à PP'. Il s'ensuit que, si a', b' représentent les projections de a, b sur $X'Y'$, les droites Aa' et Bb' seront perpendiculaires à $X'Y'$.

Or, $aa' = bb'$, puisque P' est le milieu de ab, et $Aa = Bb$: donc les triangles rectangles Aaa', Bbb' sont égaux, par conséquent $Aa' = Bb'$; ce qu'il fallait démontrer.

2. Inversement, si les distances Aa', Bb' des points A, B à $X'Y'$ sont égales entre elles, les points A, B seront également distants du point P. Car il est facile de voir, d'après ce qui précède, que l'inégalité des distances PA, PB entraîne celle des distances Aa', Bb'.

Nous allons faire application de cette réciproque à la proposition 1272.

3. Désignons par MN la perpendiculaire commune à deux arêtes opposées AB, CD du tétraèdre considéré [1]. Les triangles ACD, BCD, de même base CD, étant par hypothèse équivalents, ont nécessairement des hauteurs égales; ainsi, les deux points A, B de AB, sont équidistants de la droite CD : donc le point M est le milieu de l'arête AB. De même N est le milieu de CD. Ainsi, dans un tétraèdre dont les faces sont équivalentes, la

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées est perpendiculaire à ces deux arêtes.

Si P et Q sont les milieux de deux autres arêtes opposées AD, BC, les deux droites MN, PQ diagonales d'un parallélogramme MPNQ se couperont mutuellement en parties égales en un point O, qui sera également distant des quatre sommets A, B, C, D, parce qu'il appartient à des droites perpendiculaires aux milieux des arêtes AB, AD, DC, BC. Dans les triangles rectangles OMA, ONC, on a $OA = OC$, et $OM = ON$, d'où $MA = NC$, $AB = CD$; donc, dans un tétraèdre dont les faces sont équivalentes, les arêtes opposées sont deux à deux égales entre elles, et par conséquent :

1° Les faces sont égales, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun;

2° Le point O milieu de MN est, comme on sait, le centre de gravité du tétraèdre. Ses distances aux faces sont respectivement égales aux quarts des hauteurs correspondantes du tétraèdre. Mais les faces étant équivalentes, ces hauteurs sont égales entre elles : donc le point O est équidistant des quatre faces, c'est-à-dire qu'il coïncide avec le centre de la sphère inscrite. L'égalité des droites OA, OB, OC, OD montre qu'il coïncide aussi avec le centre de la sphère circonscrite.

Soient :

AH la hauteur du tétraèdre, menée du sommet A;

OF perpendiculaire sur AH, et par conséquent parallèle au plan BCD;

o la projection de O sur le plan BCD, ou le centre du cercle circonscrit au triangle BCD;

g le point d'intersection de la droite AO prolongée, et du plan BCD, ou le centre de gravité du triangle BCD;

h le point de concours des hauteurs de BCD;

G le point où la droite OF est rencontrée par la perpendiculaire au plan BCD, élevée au point h.

D'après des propositions connues, on a $oh = 3.og$ et $o\mathrm{H} = 3.og$, d'où $oh = o\mathrm{H}$, et $\mathrm{OG} = \mathrm{OF}$.

Mais, dans le triangle rectangle AOF, l'hypoténuse OA est le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, et le côté $\mathrm{AF} = \frac{3}{4}\mathrm{AH}$, conserve la même grandeur pour chacune des quatre hauteurs du tétraèdre; il en est, par conséquent, de même de OF; donc, la sphère, dont O est le centre, et $\mathrm{OF} = \mathrm{OG}$, le rayon, est à la fois tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre et aux perpendiculaires élevées aux faces par les points de concours de leurs trois hauteurs.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1283

(voir 2e série, t. XVII, p. 384);

PAR M. MORET-BLANC.

D'un point P *pris sur la tangente en* C *à un cercle, on mène une sécante* PAB *telle que la surface du triangle* ABC *soit maximum; trouver l'enveloppe de cette sécante quand le point* P *se meut sur la tangente.*

(FAUQUEMBERGUE.)

Je prends la tangente pour axe des y, et le diamètre du point de contact pour axe des x.

Soient

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

l'équation de la circonférence, et

$$y = mx + \beta$$

celle de la sécante issue du point P.

En appelant x_1, y_1; x_2, y_2 les coordonnées des points d'intersection, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{S.ABC} &= \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)\\ &= \tfrac{1}{2}[x_1(mx_2+\beta) - x_2(mx_1+\beta)] = \tfrac{1}{2}\beta(x_1 - x_2).\end{aligned}$$

x_1 et x_2 sont les racines de l'équation

$$(1+m^2)x^2 - 2(a - m\beta)x + \beta^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a - m\beta \pm \sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}}{1+m^2}$$

et par suite

$$\mathrm{S} = \frac{\beta\sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}}{1+m^2},$$

en donnant au radical le signe de β.

Égalant à zéro la dérivée par rapport à m, on a

$$\mathrm{S}' = \frac{\beta[3a\beta m^2 - 2(a^2-\beta^2)m - a\beta]}{(1+m^2)^2\sqrt{a^2-\beta^2-2am\beta}} = 0,$$

ou

$$3a\beta m^2 - 2(a^2-\beta^2)m - a\beta = 0,$$

d'où

$$m = \frac{a^2 - \beta^2 \pm \sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}}{3a\beta}.$$

Pour $m = 0$, la dérivée étant de signe contraire à β, il faudra prendre le signe inférieur ou le signe supérieur, suivant que β sera positif ou négatif.

En reportant cette valeur de m dans l'équation de la sécante, on a, en chassant le dénominateur,

$$(x - 3a)\beta^2 + 3a\beta y - a^2 x = \pm x\sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}.$$

On aura l'équation de l'enveloppe, en éliminant β entre cette équation et sa dérivée par rapport à β,

$$2(x - 3a)\beta + 3ay = \frac{\pm x(a^2\beta + 2\beta^3)}{\sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}},$$

ce qui conduit à l'équation

$$(3y^2 - x^2 + 2ax)^3(3a - 2x)^2 \\ = y^2(3xy^2 - x^3 - 3ay^2 + 5ax^2 - 6a^2x)^2.$$

La courbe est du huitième degré, symétrique par rapport à l'axe Cx. L'origine est un point quadruple. Mais il faut remarquer que l'équation représente non seulement l'enveloppe demandée, mais aussi celle de la ligne qui correspond à la valeur de m qui donnerait pour la surface un minimum algébrique.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 1343

(voir 2e série, t. XVIII, p. 144);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un triangle ABC *et un point* P. *Soient respectivement* α, β, γ *les points où les côtés du triangle rencontrent les droites* PA, PB *et* PC. *On suppose que les droites menées par les points* α, β *et* γ *perpendiculairement aux côtés* BC, CA *et* AB *se coupent en un même point* M. *Déterminer : 1° le lieu décrit par le point* P; *2° le lieu décrit par le point* M.

(LAGUERRE.)

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB; celles des droites PC, PB, PA, qui passent par un même point, seront de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} a\alpha - b\beta = 0, \\ b\beta - c\gamma = 0, \\ c\gamma - a\alpha = 0. \end{cases}$$

L'équation de la perpendiculaire à AB, au point où AB est rencontré par PC, est de la forme

$$a\alpha - b\beta + n\gamma = 0.$$

La condition pour qu'elle soit perpendiculaire à AB ($\gamma = 0$) est

$$n + b\cos A - a\cos B = 0,$$

d'où

$$n = a\cos B - b\cos B,$$

et l'équation de cette perpendiculaire devient

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} a\alpha - b\beta + (a\cos B - b\cos A)\gamma = 0, \\ \text{de même} \\ b\beta - c\gamma + (b\cos C - c\cos B)\alpha = 0, \\ c\gamma - a\alpha + (c\cos A - a\cos C)\beta = 0 \end{array}\right.$$

sont les équations des deux autres perpendiculaires.

La condition pour que ces trois droites concourent en un même point est

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a & -b & a\cos B - b\cos A \\ b\cos C - c\cos B & b & -c \\ -a & c\cos A - a\cos C & c \end{vmatrix} = 0.$$

On aura l'équation du lieu du point P en éliminant a, b, c entre cette équation et les équations (1). Celles-ci peuvent s'écrire

$$\frac{a}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b}{\frac{1}{\beta}} = \frac{c}{\frac{1}{\gamma}}.$$

Remplaçant, dans le déterminant (3), a, b, c par les quantités proportionnelles

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma},$$

et chassant les dénominateurs, il vient

$$\begin{vmatrix} \beta & -\alpha & \beta\cos B - \alpha\cos A \\ \gamma\cos C - \beta\cos B & \gamma & -\beta \\ -\gamma & \alpha\cos A - \gamma\cos C & \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et réduisant,

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha^2 \sin^2 A(\beta \cos B - \gamma \cos C) \\ \quad + \beta^2 \sin^2 B(\gamma \cos C - \alpha \cos A) + \gamma^2 \sin^2 C(\alpha \cos A - \beta \cos B) = 0. \end{cases}$$

Cette équation représente une cubique passant par les trois sommets et par le point de concours des hauteurs du triangle ABC, comme on pouvait le prévoir.

On obtiendra l'équation du lieu du point M en éliminant a, b, c entre les trois équations (2).

Ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a(\alpha + \gamma \cos B) &= b(\beta + \gamma \cos A), \\ b(\beta + \alpha \cos C) &= c(\gamma + \alpha \cos B), \\ c(\gamma + \beta \cos A) &= a(\alpha + \beta \cos C). \end{aligned}$$

Multipliant ces équations membre à membre, supprimant le facteur abc commun aux deux membres et réduisant, il vient

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha^2(\beta \cos B - \gamma \cos C) \\ \quad + \beta^2(\gamma \cos C - \alpha \cos A) + \gamma^2(\alpha \cos A - \beta \cos B) = 0. \end{cases}$$

Le lieu est encore une cubique passant par les trois sommets du triangle et par le point de concours des hauteurs.

On reconnaît *a priori*, et l'on vérifie sur l'équation, que le lieu du point M passe encore par les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits au triangle ABC; les points correspondants du lieu du point P sont le centre de gravité du triangle et les points de concours des trois droites qui joignent chaque sommet au point de contact sur le côté opposé du cercle inscrit, et de chacun des cercles ex-inscrits.

Note. — La même question a été résolue par MM. Goffart et Pisani.

Question 1373
(voir 2ᵉ série, t. XX, p. 383);

PAR M. N. GOFFART.

Si, d'un point O *d'une circonférence, on abaisse des perpendiculaires* OM, ON *à deux côtés d'un triangle inscrit, la projection du troisième côté sur* MN *sera égale à* MN. (ERNEST CESARO.)

Soient ABC le triangle inscrit, et OM, ON les perpendiculaires abaissées d'un point O de la circonférence sur les côtés AB, AC respectivement (¹).

Dans le triangle OMN, on a

$$\frac{\mathrm{MN}}{\sin \mathrm{MON}} = \frac{\mathrm{OM}}{\sin \mathrm{ONM}},$$

ou, parce que MON $=$ A, et ONM $=$ OAM,

$$\frac{\mathrm{MN}}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\mathrm{OM}}{\sin \mathrm{OAM}}.$$

Le triangle OMA étant rectangle en M,

$$\frac{\mathrm{OM}}{\sin \mathrm{OAM}} = \mathrm{AO}:$$

donc

$$\frac{\mathrm{MN}}{\sin \mathrm{A}} = \mathrm{AO}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{MN} = \mathrm{AO} \sin \mathrm{A}.$$

L'angle aigu formé par BC et MN est égal à

$$\mathrm{B} - \mathrm{AMN} = \mathrm{B} - \mathrm{AON} = \mathrm{B} - 90^\circ + \mathrm{A} + \mathrm{OAM} = 90^\circ - \mathrm{OBA} \ (^2):$$

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure. Les droites BC, MN se rencontrent en un point P qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur BC.

(²) Le quadrilatère OMBP étant inscriptible, l'angle

$$\mathrm{MPB} = \mathrm{MOB} = 90^\circ - \mathrm{OBA}.$$

il s'ensuit que la projection de BC sur MN est égale à BC $\sin OBA$. Mais le triangle AOB donne

$$\frac{AO}{\sin OBA} = \frac{AB}{\sin AOB} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$$

donc

$$BC \sin OBA = AO \sin A,$$

et par conséquent la projection de BC sur MN est égale à MN.

Note. — La même question a été résolue par MM. Leblond et Vielle, élèves au lycée du Havre, et par M. Fauquembergue, qui a aussi résolu la question 1345.

Question 1374

(voir 2e série, t. XX, p. 384);

PAR M. N. GOFFART.

On donne le plan et les trois angles d'un triangle ABC, *dont le sommet* A *est fixe; trouver le lieu géométrique des points de l'espace d'où les trois côtés sont vus sous des angles droits.*

On suppose que les trois angles donnés sont aigus.

Considérons l'une des positions ABC du triangle, et soient AA', BB', CC' ses trois hauteurs qui se rencontrent au point O. Conservons les notations habituelles, et désignons par α, β, γ les longueurs OA, OB, OC.

Par les sommets A, B, C, menons respectivement aux côtés opposés les parallèles B''AC'', A''BC'', B''CA'' : on obtient un triangle A''B''C'' semblable à ABC, dans le rapport de similitude 2. Si donc $d = 2r$ est le diamètre du cercle circonscrit à ABC, $2d$ est le diamètre du cercle circonscrit à $A''B''C''$. Or, dans le triangle OAB'', rectangle en A, on a

$$OA = OB'' \cos B''OA,$$

ou

$$(1) \qquad \alpha = d \cos A.$$

On a deux autres relations analogues, en sorte que

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{\cos A} = \frac{\beta}{\cos B} = \frac{\gamma}{\cos C} = d,$$

relation de même forme que

$$(3) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d,$$

et d'où l'on tire par multiplication

$$(4) \qquad \frac{a\alpha}{\sin 2A} = \frac{b\beta}{\sin 2B} = \frac{c\gamma}{\sin 2C} = 2r^2,$$

puis par division

$$(5) \qquad \frac{\alpha}{a} \operatorname{tang} A = \frac{\beta}{b} \operatorname{tang} B = \frac{\gamma}{c} \operatorname{tang} C = 1.$$

Décrivons sur les trois côtés du triangle comme diamètre trois sphères, qui seront chacune le lieu d'où l'on voit le côté correspondant sous l'angle droit. Elles se coupent en deux points symétriques par rapport au plan ABC et qui se projettent en O. Soit M l'un de ces points. Deux des sphères se coupent suivant une circonférence dans le plan AMA', dont le diamètre est AA'. Donc

$$OM^2 = OA.OA' = \alpha(h - \alpha) = d \cos A \left(\frac{bc}{d} - d \cos A\right),$$

ou

$$\begin{aligned} OM^2 &= d^2 \cos A (\sin B \sin C - \cos A) \\ &= d^2 \cos A [\sin B \sin C + \cos(B + C)], \end{aligned}$$

ou enfin

$$OM^2 = d^2 \cos A \cos B \cos C \text{ } (^1).$$

Donc, lorsque le triangle tourne autour du point A dans le plan ABC donné, et se déforme en restant semblable à lui-même, le rapport

$$\left(\frac{OM}{OA}\right)^2 = \frac{\cos B \cos C}{\cos A}$$

reste constant.

Le lieu des points M est donc un cône de révolution autour de la perpendiculaire en A au plan ABC, et la tangente du demi-angle au sommet est

$$\sqrt{\frac{\cos A}{\cos B \cos C}}.$$

Il résulte de là que le cône n'existe que si chacun des cosinus est positif, c'est-à-dire que si les trois angles donnés sont aigus.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc

QUESTIONS.

1377. Trouver les valeurs des intégrales

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

et

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2-x-2}}.$$

(S. Realis.)

(1) On abrégerait ce calcul en observant que le triangle rectangle BOA′ donne

$$OA' = OB \cos C = d \cos B \cos C, \quad \text{d'où} \quad OA.OA' = d^2 \cos A \cos B \cos C.$$

(G.)

1378. L'équation

$$x^4 + 12\alpha\beta(\alpha + \beta)x + 2\alpha\beta(4\alpha^2 - 9\alpha\beta + 4\beta^2) = 0,$$

dans laquelle α et β sont des entiers différents de zéro, n'a pas de racine entière. (S. Realis.)

1379. Les trois côtés a, b, c d'un triangle sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique; et si l'on ajoute successivement 50 et 60 à chacun de ces côtés, le rayon du cercle inscrit augmente, respectivement, de 17 et de 20 : trouver les valeurs des côtés de ce triangle. (W.-A. Whitworth, M. A.)

(Extrait du journal : *The educational times*.)

1380. Si, par les points de contact d'une tangente commune à deux circonférences qui se coupent, et par un de leurs points d'intersection, on fait passer une circonférence, son rayon sera moyen géométrique entre les rayons des deux premiers cercles.

(Domenico Montesano.)

1381. On donne une circonférence et deux points A, B, extérieurs à cette courbe. Par le point B, on mène une corde quelconque MN, et du point A les droites AM, AN, qui coupent respectivement la circonférence en P et Q; démontrer que :

1° La droite PQ rencontre AB en un point qui reste fixe, lorsque la sécante BMN tourne autour du point B;

2° Le lieu géométrique du point d'intersection des perpendiculaires menées aux droites AM, AN aux points M, N est une droite perpendiculaire à AB.

(Domenico Montesano.)

RECTIFICATIONS.

1. Une erreur s'est glissée dans l'énoncé de la question 1364; voici comment il faut le rétablir :

1° Les équations réciproques telles que, en posant $x + \frac{1}{x} = 2t$, leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$F[(x+1)^4, (x-1)^4] = 0,$$

F désignant une fonction entière et homogène de $(x+1)^4$ et $(x-1)^4$.

On suppose que l'équation proposée n'admet pas pour racine $+1$, ou -1.

2° Les équations réciproques telles que, en posant $x + \frac{1}{x} = t$, leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$(x^2+x+1)^n (x^2-x+1)^{n'} F[(x^2+x+1)^2, (x^2-x+1)^2] = 0,$$

F désignant une fonction entière et homogène des quantités

$$(x^2+x+1)^2, \quad (x^2-x+1)^2.$$

Pellet.

Les deux propositions comprises dans ce nouvel énoncé ont été démontrées dans le *Bulletin mensuel de l'Académie de Clermont* (mars 1881), par M. Paut, boursier d'agrégation.

2. Question 1376, page 480 :

$$\textit{au lieu de } \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{5C^2+3R^2}{3C^2+R^2}, \quad \textit{lisez } \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{C^2+3R^2}{3C^2+R^2}.$$

La question 1376 se trouve dans les *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire* de M. Catalan (6e édition, p. 447).

La limite de la somme des volumes des sphères inscrites au cône, qui a été déterminée par M. Catalan, conduit immédiatement, pour l'espace laissé vide dans le cône, à l'expression $\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{C^2+3R^2}{3C^2+R^2}$, indiquée par M. Dostor.

SUR LA DÉTERMINATION DE QUELQUES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. H. RESAL.

1. La racine carrée d'un trinôme du second degré peut toujours se mettre sous l'une des trois formes suivantes :

$$\sqrt{1+x^2}, \quad \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2-1}.$$

Cela posé, désignons par $f(x)$ une fonction quelconque de x.

2. Soient

$$X = \int f(x)\sqrt{1+x^2}\,dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

On a, en ayant recours à la méthode d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2 f(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= X_1 + \frac{1}{2}\int \frac{x f(x)\,dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = X_1 + \int x f(x)\,d\sqrt{1+x^2}, \\ &= X_1 + x f(x)\sqrt{1+x^2} - \int [f(x) + x f'(x)]\sqrt{1+x^2}\,dx; \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \qquad 2X = X_1 + x f(x)\sqrt{1+x^2} - \int x f'(x)\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Si nous posons

$$(2) \qquad x f'(x) = \varphi'(x),$$

cette équation donne, en intégrant encore une fois par parties,

$$(3) \qquad 2X = X_1 + [x f(x) - \varphi(x)]\sqrt{1+x^2} + \int \frac{x\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On voit ainsi que **X** dépend de l'intégrale X_1, et d'une seconde intégrale de même nature que la précédente.

Exemples :

1° $f(x) = 1$. L'équation (1) donne ([1])

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 2\int\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + x\sqrt{1+x^2} \\ &= \log\left[x+\sqrt{1+x^2}\right] + x\sqrt{1+x^2}. \end{aligned}\right.$$

Cette méthode est plus expéditive que celles auxquelles on a généralement recours, puisqu'elle ne fait dépendre l'intégrale **X** que d'une autre dont on trouve facilement l'expression.

2° $f(x) = x$, pour mémoire, car on voit immédiatement que

$$(5)\qquad 2\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}\cdot$ De l'équation (1) on déduit

$$(\alpha)\qquad \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}.$$

En posant

$$\sqrt{1+x^2} = u,$$

([1]) En posant $x = \operatorname{tang}\theta$, on a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{d\theta}{\cos\theta} = 2\int\frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = 2\int\frac{2\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}} = \log\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right).$$

on trouve successivement

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2\sqrt{1+x^2}} \\ &= \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{u-1}{u+1} = \log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

4° $f(x) = x^m$, en désignant par m un nombre quelconque.

On a, d'après la formule (1),

$$2\int x^m \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} + x^{m+1}\sqrt{1+x^2} - m\int x^m \sqrt{1+x^2}\, dx,$$

d'où

$$(\beta)\qquad (2+m)\int x^m\sqrt{1+x^2} = \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} + x^{m+1}\sqrt{1+x^2}.$$

Mais on a

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^{m-1}\, dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = \int x^{m-1}\, d\sqrt{1+x^2},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(7)\qquad \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{1+x^2} - (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1+x^2}\, dx.$$

L'équation (β) devient aussi

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &(2+m)\int x^m\sqrt{1+x^2}\, dx \\ &= x^{m-1}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1+x^2}\, dx. \end{aligned} \right.$$

Supposons que m soit un nombre pair positif; on voit, d'après cette formule, que l'on fera dépendre

$$\begin{array}{lll} \int x^m\sqrt{1+x^2}\, dx & \text{de} & \int x^{m-2}\sqrt{1+x^2}\, dx, \\ \int x^{m-2}\sqrt{1+x^2}\, dx & \text{de} & \int x^{m-4}\sqrt{1+x^2}\, dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int x^2\sqrt{1+x^2}\, dx & \text{de} & \int \sqrt{1+x^2}\, dx. \end{array}$$

Or, comme nous savons déterminer la dernière de ces intégrales, on trouvera sans difficulté l'expression de la première.

Si m est positif et impair, on voit, en opérant comme ci-dessus, que l'intégrale du premier membre de l'équation (8) ne dépendra finalement que de la suivante

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx,$$

dont l'expression est connue.

Supposons maintenant que m soit un nombre entier négatif et posons $m-2=-n$; la formule (8) donne

$$(n-1)\int x^{-n}\sqrt{1+x^2}\,dx$$
$$=-x^{-n+1}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+(4-n)\int x^{(n-2)}\sqrt{1+x^2}\,dx;$$

et l'on voit que, selon que n sera pair ou impair, on sera conduit finalement à

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx \quad \text{ou} \quad \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx,$$

intégrales que nous savons déterminer.

D'après ce qui précède, on voit que, si m est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale du premier membre de l'équation (7) s'obtiendra sans difficulté.

3. Soient

$$X=\int f(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,\quad X_1=\int\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

On a

$$X=\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int x^2\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=X_1+\int xf(x)\,d\sqrt{1-x^2}$$
$$=X_1+xf(x)\sqrt{1-x^2}-\int[f(x)+xf'(x)]\,dx;$$

d'où

$$(9)\qquad 2X=X_1+xf(x)\sqrt{1-x^2}-\int xf'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

équation identique à l'équation (1), à la condition de remplacer, sous le radical, dans cette dernière, $+x^2$ par $-x^2$.

Exemples :

1° $f(x) = 1$. La formule (9) donne

$$(10) \qquad 2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}.$$

2° $f(x) = x$ (pour mémoire). On a

$$(11) \qquad 2\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$. On a, d'après la formule (9),

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

Si nous posons

$$\sqrt{1-x^2} = u,$$

nous aurons

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\int\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\frac{(1-u)}{1+u} = \log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

par suite

$$(13) \qquad \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^1}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

4° $f(x) = x^m$. Lorsque m est un nombre entier positif et négatif, le mode de réduction des intégrales indiqué à la fin du numéro précédent est applicable ici, et nous n'avons pas à insister sur ce point.

4. **Soit**

$$X = \int f(x)\sqrt{x^2-1}\,dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Nous avons

$$X = -\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{x^2 f(x)\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = -X_1 + \int x f(x)\,d\sqrt{x^2-1}$$
$$= -X_1 + x f(x)\sqrt{x^2-1} - \int [f(x) + x f'(x)]\sqrt{x^2-1}\,dx;$$

d'où

$$(13) \qquad 2X = -X_1 + x f(x)\sqrt{x^2-1} - \int x f(x)\sqrt{x^2-1}\,dx.$$

Exemples :

1° $f(x) = 1$. L'équation (13) donne

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\int \sqrt{x^2-1}\,dx = -\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \\ & \quad + x\sqrt{x^2-1} = -\log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + x\sqrt{x^2-1}. \end{aligned} \right.$$

2° $f(x) = x$ (pour mémoire). On a

$$(15) \qquad 2\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-1}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}.$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$. La formule (13) donne

$$2\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = -\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} + \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx;$$

---

(1) En posant $x = \frac{1}{\sin\theta}$, on a

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sin\theta} = \int \frac{\dfrac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\theta}}{\tang\frac{\theta}{2}}$$
$$= \log\tang\frac{\theta}{2} = \log\frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta} = \log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).$$

d'où

$$(\gamma)\qquad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = -\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1}.$$

En posant $x = \frac{1}{\sin\theta}$, on reconnaît facilement que l'intégrale du second membre de cette équation, prise avec son signe, a pour valeur θ. On a donc

$$(16)\qquad \int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \arc\sin\frac{1}{x} + \sqrt{x^2-1}.$$

4° L'intégrale

$$\int x^m\sqrt{x^2-1}\,dx,$$

dans laquelle m est un nombre entier positif ou négatif, se réduira en suivant la marche indiquée à la fin du n° 2.

5. Nous allons maintenant chercher à exprimer, au moyen de transcendantes connues, les intégrales des racines carrées des fonctions trigonométriques. Il est évident que, dans tous les cas, on est ramené à considérer les trois intégrales suivantes :

$$\int\sqrt{\sin x}\,dx,\quad \int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\,dx,\quad \int\sqrt{\operatorname{tang} x}\,dx,$$

les deux premières supposant des limites comprises entre zéro et π, et la troisième entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

6. Si nous posons $\sin x = \cos^2\theta$, nous avons

$$\int\sqrt{\sin x}\,dx = -2\int\frac{\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\cos^4\theta}} = -2\int\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$$
$$= 2\left(-\int\sqrt{1+\cos^2\theta}\,d\theta + \int\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\right),$$

et enfin

$$(17)\qquad \int\sqrt{\sin x}\,dx = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} - \sqrt{2}\int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta\right).$$

On est ainsi ramené à deux intégrales elliptiques qui sont respectivement de la première et de la seconde espèce.

7. En continuant à poser $\sin x = \cos^2\theta$, nous avons

$$\int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\,dx = -2\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\cos^4\theta}} = -2\int\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}},$$

ou

$$(18)\qquad \int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\,dx = -\sqrt{2}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}},$$

ce qui est une intégrale elliptique de la première espèce.

En retranchant l'une de l'autre les équations (17) et (18), on trouve

$$(19)\qquad \int\frac{1-\sin x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{\frac{3}{2}}\int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta.$$

8. Considérons maintenant l'intégrale

$$X = \int\sqrt{\operatorname{tang} x}\,dx.$$

En posant

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}^2\theta,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned}
X &= 2\int\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta} = 2\int\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta} \\
&= \int\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{1-\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} + \int\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{1+\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{1-\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} + \frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{1+\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta} \\
&\quad - \frac{1}{2}\int\frac{\cos 2\theta\,d\theta}{1-\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\int\frac{\cos 2\theta\,d\theta}{1+\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{d\operatorname{tang}\theta}{\left(\operatorname{tang}\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{2}\int\frac{d\operatorname{tang}\theta}{\left(\operatorname{tang}\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\log\frac{1-\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

et enfin

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \int \sqrt{\operatorname{tang} x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[& \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{2}\operatorname{tang}\theta - 1\right) \Big] \\ & + \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{2}\operatorname{tang}\theta + 1\right) \\ & + \log\left(\frac{\sqrt{2} - \sin 2\theta}{\sqrt{2} + \sin 2\theta}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}. \end{aligned}\right.$$

THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES [1];

PAR M. CH. BIEHLER.

II.

6. Désignons par a le coefficient angulaire de la direction considérée et soit $y = ax + \frac{1}{\lambda}$ une parallèle à cette direction; formons le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre de cette droite avec la courbe; il suffira, pour obtenir l'équation du faisceau, d'éliminer z entre les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f_m(x,y) + z f_{m-1}(x,y) + \ldots \\ & \qquad + z^{m-1} f_1(x,y) + z^m f_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

et

$$\lambda(y - ax) = z;$$

on obtient ainsi l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & f_m(x,y) + \lambda(y - ax) f_{m-1}(x,y) \\ & \quad + \lambda^2 (y - ax)^2 f_{m-2}(x,y) + \ldots + \lambda^m (y - ax)^m f_0 = 0 \end{aligned}\right.$$

[1] *Voir* même Tome, p. 97 et 489.

ou bien

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + \lambda\left(\frac{y}{x} - a\right) f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ & \quad + \lambda^2\left(\frac{y}{x} - a\right)^2 f_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots + \lambda^m\left(\frac{y}{x} - a\right)^m f_0 = 0; \end{aligned}\right.$$

et si l'on pose

$$f_\mu\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi_\mu\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{y}{x} - a = t,$$

l'équation (3) prendra la forme

$$(4)\quad \varphi_m(a+t) + \lambda t \varphi_{m-1}(a+t) + \lambda^2 t^2 \varphi_{m-2}(a+t) + \ldots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0,$$

ou bien

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & \varphi_m(a) + t\varphi'_m(a) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''_m(a) + \ldots + \frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}_m(a) \\ & \quad + \lambda t\left[\varphi_{m-1}(a) + t\varphi'_{m-1}(a) + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m=1)!}\varphi^{(m-1)}_{m-1} a\right] + \ldots \\ & \quad + \lambda^{m-1} t^{m-1}\left[\varphi_1(a) + t\varphi'_1(a)\right] + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (5) du paragraphe précédent, où l'on a supposé que la direction des points à l'infini est celle de l'axe des y; elle n'en diffère qu'en ce que les quantités $\varphi^{(p)}_\mu(0)$ sont remplacées dans la première par les quantités correspondantes $\varphi^{(p)}_\mu(a)$.

La discussion de cette nouvelle équation (5) est donc identique à celle que nous avons déjà faite, et les figures nouvelles ne diffèrent de celles qui ont été précédemment obtenues qu'en ce qu'elles présentent, par rapport à la droite $y = ax$, la disposition que les premières présentent par rapport à l'axe des y; il est donc superflu d'y revenir.

7. Nous allons, en terminant, faire une remarque sur

les valeurs approchées des racines qui nous ont permis de construire les branches paraboliques. La première de ces valeurs est fournie par la formule (8), savoir

$$t = -\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0)} \times \lambda,$$

ou

$$\frac{t}{1.2}\varphi''_m(0) + \lambda\varphi_{m-1}(0) = 0;$$

dans cette formule

$$t = \frac{x}{y}, \quad \lambda = \frac{1}{x};$$

en substituant ces valeurs, il vient

$$(a) \qquad \frac{x^2}{12}\varphi''_m(0) + y\,\varphi_{m-1}(0) = 0.$$

La formule (8) représente dans un système particulier de coordonnées une parabole du second degré, car la formule (a) représente la même courbe en coordonnées cartésiennes; remarquons encore que le groupe de termes

$$\frac{x^2}{12}\varphi''_m(0) + y\,\varphi_{m-1}(0)$$

existe dans l'équation de la courbe proposée, car

$$f_m(x, y) = y^m f_m\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y^m \varphi_m\left(\frac{x}{y}\right);$$

or

$$y^m\varphi_m\left(\frac{x}{y}\right) = y^m\left[\varphi_m(0) + \frac{x}{y}\,\varphi'_m(0) + \frac{x^2}{y^2}\,\frac{\varphi''_m(0)}{1.2} + \ldots\right];$$

par suite,

$$f_m(x, y) = y^m\,\varphi_m(0) + y^{m-1}x\,\varphi'_m(0)$$
$$+ y^{m-2}x^2\,\frac{\varphi''_m(0)}{12} + \ldots + \frac{x^m\varphi^{(m)}(0)}{m!};$$

les quantités

$$\varphi_m(0)\ \varphi'_m(0)\ \ldots\ \varphi_m^{(m)}(0)$$

sont donc les coefficients de la fonction homogène de degré m, $f_m(x, y)$.

On a de même

$$f_{m-1}(x, y) = y^{m-1}\varphi_{m-1}(0) + y^{m-2}x\,\varphi_{m-1}(0) + \ldots + x^{m-1}\varphi_{m-1}^{(m-1)}(0);$$

par suite, ce sont les deux termes

$$y^{m-2}x^2\frac{\varphi''_m(0)}{1 2} + y^{m-1}\varphi_{m-1}(0)$$

qui fournissent, quand on égale leur somme à zéro, l'équation de la parabole du second degré que l'on peut considérer comme asymptotique de la courbe dans la direction de l'axe des y ; ce sont donc les deux seuls termes précédents qui déterminent la forme de la courbe à l'infini dans la direction considérée.

Les autres valeurs approchées des racines donnent lieu à des remarques semblables. Dans la *fig.* 2, les points à l'infini dans la direction de l'axe des y sont fournis par la parabole [*voir* la formule (9)]

$$(b)\qquad \frac{x^q}{q!}\varphi_m^{(q)}(0) + y^{q-1}\varphi_{m-1}(0) = 0$$

obtenue au moyen des termes

$$y^{m-q}x^q\frac{\varphi_m^{(q)}(0)}{q!} + y^{m-1}\varphi_{m-1}(0)$$

de l'équation proposée.

Dans la *fig.* 3, c'est la parabole

$$(c)\qquad x^3\frac{\varphi'''_m(0)}{1 2 3} + y\varphi_{m-2}(0) = 0$$

qui nous donne la formule de la courbe ; elle est obtenue en prenant dans l'équation de la courbe les termes

$$y^{m-3}x^3\frac{\varphi'''_m(0)}{1\,2\,3}+y^{m-2}\varphi_{m-2}(0).$$

Les *fig.* 4 et 5 sont fournies par les paraboles

$$x^2=\tau_0\times y\quad x^2=\tau_0\times y,$$

dont l'équation

$$(x^2-\tau_0\times y)(x^2-\tau_1 y)=0$$

est donnée par le groupe

$$y^{m-4}x^4\frac{\varphi^{(4)}_m(0)}{4!}+y^{m-3}x^2\frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1\,2}+y^{m-2}\varphi_{m-2}(0),$$

qui figure dans l'équation proposée, et ainsi des autres.

La méthode que nous avons développée a donc pour effet de nous donner le groupe des termes de l'équation proposée, qui déterminent la forme de la courbe à l'infini, quand il existe des branches paraboliques dans la direction de l'axe des y.

Quand la direction est autre que celle de l'un des axes de coordonnées, c'est à l'équation (5) du § II qu'il faut appliquer ce que nous venons de dire de l'équation de la courbe, après avoir substitué toutefois aux variables t et λ, qui y figurent, leurs valeurs en x et y données par les formules

$$\frac{y}{x}-a=t,\quad \lambda(y-ax)=1.$$

Ce que nous venons de dire des branches paraboliques s'applique également aux branches hyperboliques qui accompagnent les asymptotes, et aux branches de courbes qui se croisent en un point situé à distance finie, dont la construction a été étudiée dans la première Partie.

On peut donc dire, d'une manière générale, que la *méthode que nous avons employée fait dépendre la construction de la courbe proposée en un point à distance finie ou à l'infini de celle d'une autre courbe plus simple dont l'équation s'obtient en égalant à zéro un groupe de termes de l'équation proposée ou d'une équation déduite de la proposée par une transformation simple.* Le groupe des termes qui forment le premier membre de l'équation de la courbe auxiliaire fait partie de l'équation même de la courbe, lorsque le point autour duquel on construit la courbe est à l'origine et que les tangentes à la courbe en ce point sont les axes de coordonnées; cela a encore lieu si le point est à l'infini et si les axes de coordonnées sont les asymptotes mêmes de la courbe dans le cas où le point est hyperbolique, et si la direction des axes de coordonnées est la direction du point multiple à l'infini, dans le cas où ce point est parabolique. Dans les autres cas, le premier membre de l'équation de la courbe auxiliaire s'obtient en égalant à zéro un groupe de termes appartenant à l'équation transformée.

Nous allons, en terminant, appliquer ce qui précède à un exemple.

Supposons qu'on ait à construire la courbe

$$x^6 - 5xy^4 + 6y^3 - x^2 = 0.$$

1° Construisons-la d'abord autour de l'origine; on voit que l'axe des y est une tangente de rebroussement. Coupons la courbe par la droite $x = \lambda y$; l'équation de la courbe débarrassée du facteur $y^2 y'$ devient

$$\lambda^6 y^4 - 5\lambda y^3 + 6y - \lambda^2 = 0;$$

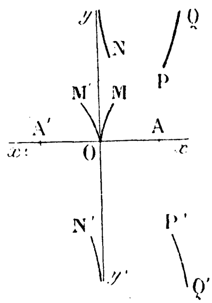
cette équation, pour de petites valeurs de y et de λ, se réduit à

$$6y - \lambda^2 = 0,$$

car le terme $\lambda^6 y^4$ est infiniment petit devant chacun des terme $6y$ et $-\lambda^2$ et le terme $-5\lambda y^3$ est infiniment petit devant $6y$.

Pour des valeurs positives et négatives de λ, y est po-

Fig. 9.



sitif, par suite la courbe affecte autour de l'origine la forme de MOM' (*fig.* 9).

$$6y - \lambda^2 = 0$$

est l'équation de la courbe auxiliaire, qui devient en coordonnées rectilignes

$$6y^3 - x^2 = 0.$$

On voit qu'elle est formée en égalant à zéro le groupe des termes $6y^3 - x^2$ de l'équation proposée.

2° Construisons en second lieu la courbe autour de ses asymptotes. Il n'y a qu'une seule direction asymptotique, qui est celle de l'axe des y ; l'équation de la courbe pouvant s'écrire

$$-5xy^4 + 6y^3 + x^6 - x^2 = 0,$$

on voit que l'axe des y est asymptote. Coupons la courbe par des parallèles à l'asymptote, à savoir par $x = \varepsilon$, et posons $y = \frac{1}{z}$, il viendra

$$-5\varepsilon + 6z + z^4(\varepsilon^6 - \varepsilon^2) = 0;$$

cette équation, pour de petites valeurs de z et de ε, se réduit évidemment à

$$-5\varepsilon + 6z = 0.$$

Pour des valeurs positives de ε, z et par suite y sont positifs; pour des valeurs négatives de ε, y est négatif; on obtient donc les branches yN, y'N' (*fig.* 9). L'équation

$$-5\varepsilon + 6z = 0$$

est celle de la courbe auxiliaire; en remplaçant ε et z par leur valeur

$$x = \varepsilon, \quad z = \frac{1}{y},$$

elle devient

$$-5xy + 6 = 0;$$

c'est l'équation d'une hyperbole : on l'obtient en égalant à zéro le groupe des termes $-5xy^4 + 6y^3$ de l'équation proposée.

3° Cherchons maintenant les branches paraboliques dans la direction de l'axe des y. Coupons la courbe par la droite $x = \frac{1}{\lambda}$ et formons l'équation du faisceau des rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre de la droite et de la courbe; il faut pour cela éliminer z entre les équations

$$x^6 - 5zxy^4 + 6z^3y^3 - z^4x^2 = 0,$$

$$x = \frac{z}{\lambda},$$

ce qui donne

$$x^6 - 5\lambda x^2y^4 + 6\lambda^3x^3y^3 - \lambda^4x^6 = 0.$$

Posons maintenant $x = ty$; cette équation deviendra une équation entre t et λ, savoir :

$$t^6 - 5\lambda t^2 + 6\lambda^3 t^3 - \lambda^4 t^6 = 0,$$

qui, pour de petites valeurs de t et de λ, se réduit à

$$t^6 - 5\lambda t^2 = 0,$$
$$t^4 - 5\lambda = 0.$$

λ ne peut recevoir que des valeurs positives pour que t soit réel, et à chaque valeur de λ correspondent deux valeurs de t de signes contraires ; on obtient ainsi les branches PQ, P′Q′ (*fig.* 9). L'équation $t^4 - 5\lambda = 0$ représente l'équation de la parabole auxiliaire ; elle devient en coordonnées rectilignes

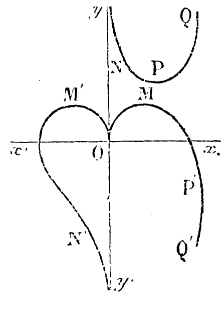
$$x^5 - 5y^4 = 0,$$

et se tire de l'équation proposée en égalant à zéro le groupe formé par ses deux premiers termes

$$x^6 - 5xy^4.$$

Si l'on remarque que la courbe rencontre l'axe des x aux points $x = \pm 1$, et qu'elle ne rencontre l'axe des y

Fig. 10.



qu'à l'origine et à l'infini ; que si de plus on coupe la courbe par la droite $x = \lambda$ et si l'on remarque que l'équation en y ne peut avoir de racines égales qu'autant qu'une équation du neuvième degré en λ est satisfaite, on en conclut que les branches yN et PQ doivent se raccorder; il en est de même de OM et P′Q′, ainsi que de OM′ et N′y'. On obtient donc pour la courbe une forme analogue à celle de la *fig.* 10.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE LA SUBSTITUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS. APPLICATION DE CETTE THÉORIE A LA RECHERCHE DE L'ÉQUATION ET DES POINTS MULTIPLES D'UN LIEU DÉFINI PAR k ÉQUATIONS CONTENANT $k-1$ PARAMÈTRES VARIABLES;

Par M. L. SALTEL,

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

I. — Objet du Mémoire.

On rencontre, en Algèbre élémentaire, de nombreux problèmes se résolvant sans peine, grâce à l'introduction de solutions étrangères préalablement connues : il suffit, en effet, de les supprimer à la fin du calcul.

C'est, je crois, faute d'avoir remarqué l'existence et la détermination précise de certains résultats étrangers, qui s'introduisent nécessairement par les substitutions *connues* d'un système d'équations à un autre système d'équations, que l'on ne développe pas, dans les Traités de Géométrie analytique, un procédé *élémentaire* permettant de trouver l'équation d'un lieu géométrique défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables. En traitant, dans le présent travail, *quatre* cas particuliers de ce dernier problème général, j'aurai donc surtout en vue de mettre en parfaite évidence l'existence et la détermination exacte des non-solutions que l'on rencontre dans l'application des règles les plus élémentaires relatives à la théorie de l'élimination; j'indiquerai en outre un moyen, non encore remarqué, d'obtenir, en même temps que l'équation du lieu, les coordonnées des points multiples de ce lieu.

II. — Premier problème.

Problème. — *Éliminer* α *entre les équations*

$$(a)\quad \begin{cases} A(x, y, \alpha) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha) = 0, & (2) \end{cases}$$

supposées respectivement d'ordres m, n *par rapport à ce paramètre, et déterminer les points multiples du lieu défini par ces mêmes équations.*

Solution. — Ordonnons ces équations par rapport au paramètre α; on aura

$$(a')\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} A = A_1(x, y)\alpha^m + A_2(x, y)\alpha^{m-1} \\ + A_3(x, y)\alpha^{m-2} + A_4(x, y)\alpha^{m-3} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} (3) \\ \left.\begin{aligned} B = B_1(x, y)\alpha^n + B_2(x, y)\alpha^{n-1} \\ + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} (4) \end{cases}$$

Supposons d'abord que les exposants m et n soient inégaux; supposons, par exemple, que

$$m = n + 3; \tag{5}$$

le système (a') pourra s'écrire

$$(a'')\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} A = A_1(x, y)\alpha^n\alpha^3 + A_2(x, y)\alpha^{n+2} + A_3(x, y)\alpha^{n+1} \\ + A_4(x, y)\alpha^n + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} (6) \\ \alpha^n = \dfrac{-[B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots]}{B_1(x, y)}. \quad (7) \end{cases}$$

Substituons à la relation (6) la relation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette équation, α^n par sa valeur (7); on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$(b)\left\{\begin{aligned} &C = C_1(x,y)\alpha^n\alpha^2 + C_2(x,y)\alpha^{n+1} + C_3(x,y)\alpha^n \\ &\qquad\qquad + C_4(x,y)\alpha^{n-1} + \ldots = 0, \qquad (8) \\ &\alpha^n = \frac{-[B_2(x,y)\alpha^{n-1} + B_3(x,y)\alpha^{n-2} + B_4(x,y)\alpha^{n-3} + \ldots]}{B_1(x,y)}, \qquad (9) \end{aligned}\right.$$

qui se composera évidemment du système (a'') plus du système *étranger* défini par

$$(c)\left\{\begin{aligned} &B_2(x,y)\alpha^{n-1} + B_3(x,y)\alpha^{n-2} \\ &\qquad + B_4(x,y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, \qquad (10) \\ &B_1(x,y) = 0, \qquad (11) \end{aligned}\right.$$

en sorte que (b) représentera non seulement le lieu proposé (a), mais encore la courbe étrangère, comptée, en général, $n - 1$ fois [1], ayant pour équation

$$B_1(x,y) = 0\ [2]. \qquad (12)$$

Cette introduction d'une courbe étrangère rend le système (b) plus facile à résoudre que le système (a''), puisque l'équation (6) se trouve remplacée par l'équation (8), qui est de degré moindre d'*une unité* par rapport au paramètre à éliminer α.

Substituons encore à l'équation (8) l'équation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette re-

---

[1] Il correspond, en effet, si le terme $B_1(x,y)$ n'est pas nul, $n-1$ valeurs du paramètre α pour chaque point (x,y) de cette courbe. — Voir la Note sur les points multiples qui termine le présent paragraphe.

[2] Il est très important d'observer que, dans le cas particulier où l'on a $A_1(x,y) = B_1(x,y)$, on n'introduit pas de lieu étranger si l'on a soin, après la substitution de (9) dans le premier terme de (8), de diviser par $B_1(x,y)$ le numérateur et le dénominateur du coefficient de ce premier terme. On n'introduit pas non plus de lieu étranger lorsque $n = 1$.

lation, α^n par sa valeur (9); on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$
(d)\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} D = D_1(x, y)\alpha^n\alpha + D_2(x, y)\alpha^n + D_3(x, y)\alpha^{n-1} \\ + D_4(x, y)\alpha^{n-2} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} && (13)\\
&\alpha^n = \frac{-[B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots]}{B_1(x, y)}, && (14)
\end{aligned}\right.
$$

qui se composera du système (b) plus du système *étranger* défini par (c).

Substituant enfin à l'équation (13) l'équation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette relation, α^n par sa valeur (14), on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$
(e)\left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} E = E_1(x, y)\alpha^n + E_2(x, y)\alpha^{n-1} \\ + E_3(x, y)\alpha^{n-2} + E_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} && (15)\\
&\left.\begin{aligned} B = B_1(x, y)\alpha^n + B_2(x, y)\alpha^{n-1} \\ + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} && (16)
\end{aligned}\right.
$$

qui se composera du système (d) plus du système étranger défini par (c).

Les trois substitutions des systèmes (b), (d), (e) au système (a') suffisent évidemment pour établir ce théorème :

THÉORÈME I. — *Quels que soient les exposants m et n du paramètre α, on peut toujours, sauf à introduire des solutions étrangères parfaitement définies, substituer au système (a') un système de la forme (e) dans lequel les plus hauts exposants de α sont égaux dans les deux équations.*

Cela fait, l'équation (16) pouvant s'écrire sous la forme (14), substituons à la relation (15) la relation obtenue en remplaçant dans le premier terme de cette équation α^n par sa valeur (14); on aura, après avoir chassé les dénominateurs, le système

$$(f)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x,y,\alpha) &= 0, & (17)\\ B &= 0, & (18)\end{aligned}\right.$$

qui se compose évidemment du système (e), plus du système étranger défini par

$$(g)\qquad \left\{\begin{aligned} B_1 &= 0, & (19)\\ B &= 0, & (20)\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire par

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned} &B_1(x,y) = 0, && (21)\\ &B_2(x,y)\alpha^{n-1} + B_3(x,y)\alpha^{n-2} + B_4(x,y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, && (22)\end{aligned}\right.$$

en sorte que (f) représentera non seulement le lieu (e), mais encore la courbe étrangère, comptée, en général, $n-1$ fois, ayant pour équation

$$B_1(x,y) = 0. \qquad (23)$$

Cette introduction d'un lieu étranger rend encore le système (f), qui est de la forme

$$(i)\quad \left\{\begin{aligned} &F = F_1(x,y)\alpha^{n-1} + F_2(x,y)\alpha^{n-2} + F_3(x,y)\alpha^{n-3} + F_4(x,y)\alpha^{n-4} + \ldots = 0, && (24)\\ &B = B_1(x,y)\alpha^{n} + B_2(x,y)\alpha^{n-1} + B_3(x,y)\alpha^{n-2} + B_4(x,y)\alpha^{n-3} + \ldots = 0, && (25)\end{aligned}\right.$$

plus facile à résoudre que le système (e), puisque l'équation (15) se trouve remplacée par l'équation (24), qui est de degré moindre d'*une unité* par rapport au *paramètre à éliminer α. De là ce théorème :*

Théorème II. — *Quel que soit l'exposant n dans les deux équations (e), on peut toujours, sauf à introduire des solutions étrangères parfaitement définies, substituer à ce système un système de la forme (i) dans lequel l'exposant (α) est diminué d'une unité dans l'une des équations.*

L'application du théorème I au système (i) permettant d'abaisser d'une unité l'exposant de α dans l'équation (25), il est manifeste que l'application successive des théorèmes I et II suffira, sauf, redisons-le, à introduire des solutions étrangères *parfaitement définies*, pour pouvoir substituer au système proposé (a') un système de la forme

$$(j) \quad \begin{cases} G = G_1(x,y)\alpha + G_2(x,y) = 0, & (26) \\ H = H_1(x,y)\alpha^2 + H_2(x,y)\alpha + H_3(x,y) = 0, & (27) \end{cases}$$

que l'on remplacera par

$$(k) \quad \begin{cases} G_1(x,y)\alpha + G_2(x,y) = 0, & (29) \\ H_1 G_2^2 - H_2 G_1 G_2 + H_3 G_1^2 = 0. & (30) \end{cases}$$

En débarrassant l'équation (30) des facteurs étrangers (préalablement connus), on aura finalement le système

$$(l) \quad \begin{cases} G_1(x,y)\alpha + G_2(x,y) = 0, & (31) \\ K(x,y) = 0, & (32) \end{cases}$$

qui sera équivalent au système proposé (a') : l'équation (32) sera l'équation cherchée.

Nota. — Il est évident (puisqu'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final (l) peut se présenter sous la forme

$$(p) \quad \begin{cases} J(x,y,\alpha) = 0, & (33) \\ K(x,y) = 0, & (34) \end{cases}$$

le plus haut exposant de α étant, dans l'équation (33), supérieur à l'unité.

Points multiples [1]. — D'après le système [(26) et

---

[1] Il s'agit, bien entendu, des points multiples de la première classe. — Voir notre Mémoire *Historique et développement d'une méthode pour déterminer les singularités ordinaires d'un lieu géométrique défini par k équations*.

(27)], les points communs aux deux courbes représentées par

$$G_1(x, y) = 0, \quad G_2(x, y) = 0 \tag{35}$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système : il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de α qui sont racines de l'équation (27). Pour obtenir séparément les points multiples du lieu proposé (a'), il suffira de défalquer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères. Ajoutons, au sujet de ces courbes étrangères, que la détermination de leur degré de multiplicité, comme celle d'ailleurs des points multiples, suppose connue la connaissance de la forme du système final (l). Dans ce qui précède, nous avons essentiellement supposé que l'équation (31) de ce système final contenait seulement au *premier degré* le paramètre α.

III. — Application du premier problème.

Afin de mieux préciser les considérations précédentes, nous allons les développer à nouveau sur un cas particulier, celui où le lieu est défini par les équations

$$(S_1) \quad \begin{cases} \left. \begin{array}{l} A = A_1(x, y)\alpha^3 + A_2(x, y)\alpha^2 \\ \qquad + A_3(x, y)\alpha + A_4(x, y) = 0, \end{array} \right\} & (36) \\ \left. \begin{array}{l} B = B_1(x, y)\alpha^3 + B_2(x, y)\alpha^2 \\ \qquad + B_3(x, y)\alpha + B_4(x, y) = 0. \end{array} \right\} & (37) \end{cases}$$

Substituons à ce système le système

$$(S_2) \quad \begin{cases} M = 0, & (38) \\ A = 0, & (39) \end{cases}$$

obtenu en écrivant l'équation (36) sous la forme

$$\alpha^3 = -\frac{A_2\alpha^2 + A_3\alpha + A_4}{A_1},$$

et en substituant cette valeur de α^3 dans le premier terme de (37); on a introduit ainsi le lieu étranger défini par

$$(S_3)\quad \begin{cases} A_1(x,y)=0, & (40)\\ A=0, & (41)\end{cases}$$

c'est-à-dire par

$$(S_4)\quad \begin{cases} A_1(x,y)=0, & (42)\\ A_2(x,y)\alpha^2+A_3(x,y)\alpha+A_4(x,y)=0, & (43)\end{cases}$$

ce qui représente *deux* fois la courbe ayant pour équation

$$A_1(x,y)=0. \qquad (44)$$

Cela fait, le système (S_2) pouvant s'écrire

$$(S_5)\quad \begin{cases} \alpha^2=\dfrac{\alpha(A_1B_3-A_3B_1)+A_1B_4-A_4B_1}{A_2B_1-A_1B_2}, & (45)\\ A_1\alpha^3+A_2\alpha^2+A_3\alpha+A_4=0, & (46)\end{cases}$$

substituons-lui le système

$$(S_6)\quad \begin{cases} \alpha^2=\dfrac{\alpha(A_1B_3-A_3B_1)+A_1B_4-A_4B_1}{A_2B_1-A_1B_2}, & (47)\\ \left.\begin{array}{l} A_1\alpha\dfrac{\alpha(A_1B_3-A_3B_1)+A_1B_4-A_4B_1}{A_2B_1-A_1B_2}\\ \qquad +A_2\alpha^2+A_3\alpha+A_4=0,\end{array}\right\} & (48)\end{cases}$$

obtenu en écrivant le premier terme de (46) sous la forme $A_1\alpha^2\times\alpha$ et remplaçant α^2 par sa valeur (45). On a introduit de la sorte le lieu étranger défini par

$$(S_7)\quad \begin{cases} \alpha(A_1B_3-A_3B_1)+A_1B_4-A_4B_1=0, & (49)\\ A_2B_1-A_1B_2=0, & (50)\end{cases}$$

c'est-à-dire *une* fois la courbe ayant pour équation

$$A_2(x,y)\,B_1(x,y)-A_1(x,y)\,B_2(x,y)=0. \qquad (51)$$

En effectuant les calculs, le système (S_6) s'écrit :

$$(S_8)\left\{\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}C = (A_2B_1 - A_1B_2)\alpha^2 + \alpha(A_3B_1 - A_1B_3)&\\ + A_4B_1 - A_1B_4 = o,&\end{aligned}\right\}\quad(52)\\ &\left.\begin{aligned}D = [A_1(A_1B_3 - A_3B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)]\alpha^2&\\ + [A_1(A_1B_4 - A_4B_1) + A_3(A_2B_1 - A_1B_2)]\alpha&\\ + A_4(A_2B_1 - A_1B_2) = o;&\end{aligned}\right\}\quad(53)\end{aligned}\right.$$

substituons-lui le système

$$(S_9)\left\{\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}C[A_1(A_1B_3 - A_2B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)]&\\ - D(A_2B_1 - A_1B_2) = o,&\end{aligned}\right\}\quad(54)\\ &C = o,\quad(55)\end{aligned}\right.$$

comprenant le lieu étranger défini par

$$(S_{10})\left\{\begin{aligned}&A_2B_1 - A_1B_2 = o,\quad(56)\\ &C = o,\quad(57)\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire par

$$(S_{11})\left\{\begin{aligned}&A_2B_1 - A_1B_2 = o,\quad(58)\\ &(A_3B_1 - A_1B_3)\alpha + A_4B_1 - A_1B_4 = o,\quad(59)\end{aligned}\right.$$

ce qui représente encore *une* fois la courbe ayant pour équation

$$A_2(x, y).\,B_1(x, y) - A_1(x, y).\,B_2(x, y) = o.\quad(60)$$

Cela fait, le système (S_9) pouvant s'écrire

$$(S_{12})\left\{\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}\Big(\{(A_3B_1 - A_1B_3)[A_1(A_1B_3 - A_3B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)]&\\ - [A_1(A_1B_4 - A_4B_1) + A_3(A_2B_1 - A_1B_2)](A_2B_1 - A_1B_2)\}\Big)\alpha&\\ + \{(A_4B_1 - A_1B_4)[A_1(A_1B_3 - A_3B_1) + A_2(A_2B_1 - A_1B_2)]&\\ - A_4(A_2B_1 - A_1B_2)^2\} = o,&\end{aligned}\right\}\quad(61)\\ &(A_2B_1 - A_1B_2)\alpha^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)\alpha + A_4B_1 - A_1B_4 = o,\quad(62)\end{aligned}\right.$$

tirons de l'équation (61) la valeur de α pour la substituer dans (62); en écrivant cette équation (61) sous la forme $\alpha X + Y = o$, nous aurons le système final

$$(S_{13})\left\{\begin{aligned}&\alpha X + Y = o,\quad(63)\\ &\left.\begin{aligned}(A_2B_1 - A_1B_2)Y^2 - XY(A_3B_1 - A_1B_3)&\\ + (A_4B_1 - A_1B_4)X^2 = o&\end{aligned}\right\}\quad(64).\end{aligned}\right.$$

qui sera tel que la relation (64) se composera :

1° De *deux* fois l'équation $A_1(x, y) = 0$;

2° De *deux* fois l'équation $A_2 B_1 - A_1 B_2 = 0$;

3° De l'équation du lieu cherché.

C'est ce que l'on vérifie, en effet, sans peine, en employant les notations abrégées suivantes :

$$a = A_2 B_1 - A_1 B_2, \quad b = A_3 B_1 - A_1 B_3, \quad c = A_4 B_1 - A_1 B_4,$$
$$a' = a A_2 - b A_1, \quad b' = a A_3 - c A_1, \quad c' = a A_4,$$
$$d = A_2 B_4 - A_4 B_2, \quad l = A_3 B_2 - A_2 B_3, \quad m = A_4 B_3 - A_3 B_4.$$

Il suffit de reprendre le calcul à partir des équations (52, 53), d'observer que l'équation (64), qui se présente sous la forme

$$a[(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')(cb' - bc')] = 0, \tag{65}$$

peut aussi s'écrire en remplaçant a', b', c' par leurs valeurs

$$a^2 \left[\begin{array}{l} a(aA_4 - cA_2)^2 + 2bc(aA_4 - cA_2) \\ \quad \times (aA_3 - bA_2 - cA_1)(cA_3 - bA_4) \\ \quad + A_1 b^2 (cA_3 - bA_4) - A_1 c^2 (aA_3 - cA_1) \end{array} \right] = 0, \tag{66}$$

d'où l'on déduit immédiatement, en effectuant chaque parenthèse,

$$a^2 A_1^2 (ad^2 + mb^2 + lc^2 + 2bcd + alm) = 0; \tag{67}$$

en sorte que le système proposé est équivalent au système

$$(S_{14}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha X + Y = 0 \quad (^1), & (68) \\ ad^2 + mb^2 + lc^2 + 2bcd + alm = 0. & (69) \end{array} \right.$$

Points doubles. — Les points doubles sont les points communs aux deux courbes représentées, car

$$X = 0, \quad Y = 0, \tag{70}$$

(1) On va voir que X et Y doivent contenir le facteur $A_1(x, y)$ que l'on devra partant supprimer.

à condition de supprimer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères pour lesquelles il correspond à chacun de leurs points au moins deux valeurs du paramètre (α), c'est-à-dire, ici, tous les points de la courbe représentée par $A_1(x, y) = 0$.

IV. — Deuxième problème.

Problème. — *Éliminer* α *entre les deux équations*

$$(S_1) \qquad \begin{cases} A(x, y, z, \alpha) = 0, & (71) \\ B(x, y, z, \alpha) = 0, & (72) \end{cases}$$

supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples de la surface qu'elles définissent.

Solution. — Il suffit de refaire exactement les mêmes calculs que dans le *premier problème,* sauf à remarquer qu'au lieu d'introduire des *courbes étrangères* on introduit des *surfaces étrangères* définies par des équations de la forme

$$(S_2) \qquad \begin{cases} N(x, y, z) = 0, & (73) \\ M_1(x, y, z)\alpha^\mu + M_2(x, y, z)\alpha^{\mu-1} \\ \qquad + M_3(x, y, z)\alpha^{\mu-2} + \ldots = 0. & (74) \end{cases}$$

Points multiples. — En procédant comme nous venons de le dire, on rencontre, avant de parvenir au système final, des systèmes de la forme

$$(S_3) \qquad \begin{cases} C_1(x, y, z)\alpha^2 + C_2(x, y, z)\alpha + C_3(x, y, z) = 0, & (75) \\ D_1(x, y, z)\alpha^3 + D_2(x, y, z)\alpha^2 \\ \qquad + D_3(x, y, z)\alpha + D_4(x, y, z) = 0, & (76) \end{cases}$$

$$(S_4) \qquad \begin{cases} C_1(x, y, z)\alpha^2 + C_2(x, y, z)\alpha + C_3(x, y, z) = 0, & (77) \\ E_1(x, y, z)\alpha + E_2(x, y, z) = 0. & (78) \end{cases}$$

Il résulte de là :

1° Que les points communs aux trois surfaces représentées par

$$C_1(x, y, z) = 0, \quad C_2(x, y, z) = 0, \quad C_3(x, y, z) = 0 \qquad (79)$$

sont des *points triples* du lieu (S_3) : il correspond, en effet, à chacun de ces points, *trois* valeurs de α qui sont racines de l'équation (76) ;

2° Que les points communs aux deux surfaces représentées par

$$E_1(x, y, z) = 0, \quad E_2(x, y, z) = 0 \qquad (80)$$

sont des *points doubles* du lieu (S_4) : il correspond, en effet, à chacun de ses points, *deux* valeurs de α qui sont racines de l'équation (77) [1].

V. — Troisième problème.

Problème. — Éliminer α, β *entre les trois équations*

$$(S_1) \quad \begin{cases} A(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (2) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (3) \end{cases}$$

supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples du lieu qu'elles définissent.

Solution. — 1° On ordonnera les équations (1, 2) par rapport à α :

$$(S_2) \quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} A = A_1(x, y, \beta)\alpha^m + A_2(x, y, \beta)\alpha^{m-1} \\ + A_3(x, y, \beta)\alpha^{m-2} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} & (4) \\ \left.\begin{aligned} B = B_1(x, y, \beta)\alpha^n + B_2(x, y, \beta)\alpha^{n-1} \\ + B_3(x, y, \beta)\alpha^{n-2} + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} & (5) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0. & (6) \end{cases}$$

---

[1] Parmi ces points doubles, ceux qui se trouvent sur la surface représentée par

$$C_2^2 - 4C_1C_3 = 0$$

sont de rebroussement.

2° On considérera β comme un coefficient et l'on éliminera, entre les équations (4), (5), par le procédé suivi pour résoudre le *premier problème,* le paramètre α, ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_3)\qquad \begin{cases} D_1(x,y,\beta)\alpha + D_2(x,y,\beta) = 0, & (7)\\ E(x,y,\beta) = 0, & (8)\\ C(x,y,\alpha,\beta) = 0, & (9)\end{cases}$$

qui se composera du système (S_2), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_4)\qquad \begin{cases} F(x,y,\beta) = 0, & (10)\\ G(x,y,\alpha,\beta) = 0, & (11)\\ C(x,y,\alpha,\beta) = 0. & (12)\end{cases}$$

3° On tirera de l'équation (7) la valeur de (α) pour la substituer dans (9), ce qui conduira au système

$$(S_5)\qquad \begin{cases} D_1(x,y,\beta)\alpha + D_2(x,y,\beta) = 0, & (13)\\ E(x,y,)\beta = 0, & (14)\\ H(x,y,\beta) = 0. & (15)\end{cases}$$

4° On éliminera, toujours par le procédé suivi dans la solution du *premier problème,* le paramètre β entre les équations (14), (15), ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_6)\qquad \begin{cases} D_1(x,y,\beta)\alpha + D_2(x,y,\beta) = 0, & (16)\\ G_1(x,y)\beta + G_2(x,y,) = 0, & (17)\\ I(x,y) = 0, & (18)\end{cases}$$

qui se composera du système (S_5), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_7)\qquad \begin{cases} D'_1(x,y,\beta)\alpha + D_2(x,y,\beta) = 0, & (19)\\ J(x,y,) = 0, & (20)\\ K(x,y) = 0. & (21)\end{cases}$$

5° Soient $W(x,y)=0$ l'équation (18) débarrassée des facteurs étrangers, et $W_1(x,y)\alpha+V_2(x,y)=0$ l'équation obtenue en remplaçant dans (16) la lettre β par sa valeur tirée de (17); le système

$$(S_8)\quad \begin{cases} V_1(x,y)\alpha+V_2(x,y)=0, & (23)\\ G_1(x,y)\beta+G_2(x,y)=0, & (23)\\ W(x,y)=0 & (24)\end{cases}$$

sera équivalent au système proposé (S_1), et l'équation (24) sera l'équation cherchée.

Nota I. — Il est très important d'observer que, si l'on ne suivait pas exactement l'*ordre* que nous venons d'indiquer, on pourrait fort bien introduire *tout le plan* comme lieu étranger, et partant l'élimination deviendrait impossible dans la suite. C'est, en effet, ce qui arriverait si l'on écrivait, par exemple, l'équation (4) sous la forme

$$\alpha^m=-\frac{A_2(x,y,\beta)\alpha^{m-1}+A_3(x,y,\beta)\alpha^{m-2}+A_4(x,y,\beta)\alpha^{m-3}+\ldots}{A_1(x,y,\beta)},\quad (25)$$

et si l'on substituait *à la fois* cette valeur de α^m dans les *deux* autres équations; on introduirait de la sorte tout le plan défini par les équations

$$(S_9)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned}&A_2(x,y,\beta)\alpha^{m-1}+A_3(x,y,\beta)\alpha^{m-2}\\ &\qquad+A_4(x,y,\beta)\alpha^{m-3}+\ldots=0,\end{aligned}\right\} & (26)\\ A_1(x,y,\beta)=0, & (27)\end{cases}$$

contenant *deux* paramètres variables α et β.

Nota II. — Il est évident (puisqu'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final (S_8) peut se présenter sous la forme

$$(S_{10})\quad \begin{cases} V_1(x,y,\alpha,\beta)=0, & (28)\\ V_2(x,y,\alpha,\beta)=0, & (29)\\ W(x,y)=0, & (30)\end{cases}$$

les plus hauts exposants de α, β étant, dans les équations (28), (29), supérieurs à l'unité.

Points multiples. — Avant de parvenir au système (S_6), on rencontre un système de la forme

$$(S_{11})\quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (31) \\ G_1(x, y)\beta + G_2(x, y) = 0, & (32) \\ M_1(x, y)\beta^2 + M_2(x, y)\beta + M_3(x, y) = 0. & (33) \end{cases}$$

Les points communs aux deux courbes représentées par

$$G_1(x, y) = 0, \quad G_2(x, y) = 0 \qquad (34)$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système; il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de β qui sont racines de l'équation (33), et, partant, à cause de (31), *deux* valeurs de α; il est d'ailleurs bien évident que, pour obtenir séparément les points multiples du lieu proposé (S_1), on devra défalquer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères pour lesquelles il correspond à chacun de leurs points au moins deux valeurs des paramètres α et β.

VI. — Quatrième problème.

Problème. — *Éliminer α, β, γ entre les équations*

$$(S_1)\quad \begin{cases} A(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (2) \\ C(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (3) \\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (4) \end{cases}$$

supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples du lieu qu'elles définissent.

Solution. — 1° On considérera γ comme un coefficient et l'on éliminera, entre les équations (1), (2), (3), par le procédé suivi pour résoudre le *troisième problème*, les paramètres α, β, ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_2)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (5)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (6)\\ G(x, y, \gamma) = 0, & (7)\\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (8)\end{cases}$$

qui se composera du système (S_1), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_3)\quad \begin{cases} H(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (9)\\ I(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (10)\\ J(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (11)\\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0. & (12)\end{cases}$$

2° On tirera des équations (5), (6) les valeurs de α, β pour les porter dans (8), ce qui conduira au système

$$(S_4)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (13)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (14)\\ G(x, y, \gamma) = 0, & (15)\\ K(x, y, \gamma) = 0. & (16)\end{cases}$$

3° On éliminera, par le procédé employé dans la solution du *premier problème*, le paramètre γ, entre les équations (15), (16), ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_5)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (17)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (18)\\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (19)\\ N(x, y) = 0, & (20)\end{cases}$$

qui se composera du système (S_4), plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_6)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (21)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (22)\\ P(x, y, \gamma) = 0, & (23)\\ Q(x, y) = 0. & (24)\end{cases}$$

4° Soient $W(x, y) = 0$ l'équation (20) débarrassée des facteurs étrangers, et

$$V_1(x, y)\alpha + V_2(x, y) = 0, \tag{25}$$
$$U_1(x, y)\beta + V_2(x, y) = 0 \tag{26}$$

les équations obtenues en remplaçant dans (17), (18) la lettre γ par sa valeur tirée de (19), le système

$$(S_7) \qquad \begin{cases} V_1(x, y)\alpha + V_3(x, y) = 0, & (27) \\ U_1(x, y)\beta + V_2(x, y) = 0, & (28) \\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (29) \\ W(x, y) = 0 & (30) \end{cases}$$

sera équivalent au système (S_1), et l'équation

$$W(x, y) = 0 \tag{31}$$

sera l'équation cherchée.

Nota. — Il est évident (puisqu'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final (S_7) peut se présenter sous la forme

$$(S_8) \qquad \begin{cases} R_1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (32) \\ R_2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (33) \\ R_3(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (34) \\ W(x, y) = 0, & (35) \end{cases}$$

les plus hauts exposants de α, β, γ étant, dans les équations (32), (33), (34), supérieurs à l'unité; on conçoit de plus, sans peine, que l'on puisse choisir les équations de manière que les courbes représentées par (32), (33), (34) n'aient jamais de points communs, quelles que soient les valeurs attribuées à α, β, γ; dans ce cas, bien que l'équation (35) puisse représenter une courbe réelle, le système (S_1) ne définit pas un *lieu* proprement dit, c'est-à-dire que les courbes représentées par (1), (2), (3), (4) ne se croisent jamais en un même point, quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres α, β, γ (¹).

Points multiples. — Avant de parvenir au système (S_5), on rencontre un système de la forme

$$(S_9)\quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (36)\\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (37)\\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (38)\\ T_1(x, y)\gamma^2 + T_2(x, y)\gamma + T_3(x, y) = 0; & (39)\end{cases}$$

les points communs aux deux courbes représentées par

$$M_1(x, y) = 0, \quad M_2(x, y) = 0 \qquad (40)$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système; il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de γ qui sont racines de l'équation (39), et, partant, à cause de (36), (37), deux valeurs de α et β. Pour obtenir uniquement les points multiples du lieu proposé, on devra supprimer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères.

Observation finale. — Les développements précédents suffisent évidemment pour démontrer la généralité, à *tous* les cas possibles, de la méthode suivie.

Addition. — Nous développerons dans une Communication spéciale les calculs relatifs aux points multiples

(¹) En voici un exemple :

$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 1,$$
$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 2,$$
$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 3,$$
$$W(x, y) = 0.$$

des lieux (A) et (B) définis par

$$
(\mathrm{A}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&U(\alpha, \beta) = 0, \\
&\frac{x}{\frac{dU}{d\alpha}} = \frac{y}{\frac{dU}{d\alpha}} = \frac{1}{\frac{dU}{dt}};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(\mathrm{B}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&U(\alpha, \beta) = 0, \\
&(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0, \\
&\frac{x-\alpha}{\frac{dU}{d\alpha}} = \frac{y-\beta}{\frac{dU}{d\beta}},
\end{aligned}
\right.
$$

points multiples permettant de déterminer, comme nous l'avons prouvé dans le Mémoire déjà cité, *Historique et développement*, etc., les points de contact des tangentes doubles et les centres des cercles de rayon R doublement tangents à la courbe représentée par

$$U(x, y) = 0 \text{ } (^1).$$

Nota. — On obtiendra le lieu des centres des sphères de rayon R [2] doublement tangentes à la surface représentée par

$$U(x, y, z) = 0,$$

en cherchant la ligne double de la surface définie par

$$
\begin{gathered}
U(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \\
(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - R^2 = 0, \\
\frac{x-\alpha}{\frac{dU}{d\alpha}} = \frac{y-\beta}{\frac{dU}{d\beta}} = \frac{z-\gamma}{\frac{dU}{d\gamma}}.
\end{gathered}
$$

---

(1) Aux points de rebroussement du lieu (A) correspondent les points d'inflexion de la courbe U, et aux points de rebroussement du lieu (B) correspondent les points de contact des cercles de rayon R osculateurs à cette même courbe.

(2) Si l'on suppose, à la fin du calcul, $R = 0$, on a la focale de la surface.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1881).

Physique.

I. Dans une machine à diviser, le pas de la vis est d'un demi-millimètre à la température zéro. La température étant de θ degrés, on veut diviser avec cette machine une règle en laiton, de telle sorte que les divisions de la règle vaillent un millimètre à zéro : comment faut-il régler le tambour de la vis ? On désignera par f et l les coefficients de dilatation linéaire du fer et du laiton. Le premier étant de 12 millionièmes et le second de 19, on calculera le nombre cherché pour $\theta = 10$.

La règle étant ainsi divisée, on s'en servira pour mesurer la hauteur d'un baromètre à la température t° et on réduira cette hauteur à zéro. On désignera par k le coefficient de dilatation cubique du mercure : k étant de 180 millionièmes, on calculera le coefficient numérique de la correction.

II. Comment détermine-t-on le grossissement dans le microscope ?

Dans un microscope dont les deux lentilles sont à une distance invariable, on a appliqué contre l'objectif une lame de verre, de sorte qu'il reste entre l'objectif et la lame un espace vide formant un ménisque concave. On détermine par l'expérience :

1° Le grossissement γ, lorsque le ménisque est vide;

2° Le grossissement g, lorsqu'on y a introduit une goutte d'eau d'indice n;

3° Le grossissement g', lorsqu'on y a introduit une goutte de liquide d'indice n'.

On demande l'indice de ce liquide.

L'indice de l'eau étant $\frac{4}{3}$ et les trois grossissements 50, 30, 20, quel est l'indice du liquide ?

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XX, 2e SÉRIE.)

Théorie des nombres.

Algèbre.

Géométrie élémentaire.

Géométrie cinématique.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XX, 2e SÉRIE.)

6606 Paris. Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.