

CARLOS MICHAUX

**Solution de la question de mathématiques
spéciales proposée au concours
général de 1878**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 17-20

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__17_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878 ;**

PAR M. CARLOS MICHAUX,

Élève du lycée de Douai (classe de M. Guillot).

Les droites A'OA, B'OB, C'OC sont trois axes de coordonnées rectangulaires ; on suppose $OA' = OA = a$, $OB' = OB = b$, $OC' = OC = c$.

Déterminer : 1° le lieu des axes de révolution des surfaces de révolution du second degré qui passent par les six points A', A, B', B, C', C ; 2° le lieu des extrémités D de ces axes.

On construira la projection du lieu du point D sur le plan AOB, en supposant $a > c > b$, et l'on partagera la courbe en arcs tels, que chacun d'eux corresponde à des surfaces de même espèce.

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les six points A', A, B', B, C', C est, en suppo-

sant le terme indépendant différent de zéro,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - 1 = 0.$$

Lorsque la surface est de révolution, l'équation

$$\left(\frac{1}{a^2} - S\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - S\right)y^2 + \left(\frac{1}{c^2} - S\right)z^2 \\ + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

qui donne les plans cycliques, devient l'une des équations

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - S}x \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - S}y \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - S}z\right)^2 = 0.$$

Ces équations représentent les plans principaux parallèles aux axes des surfaces considérées : les axes seront donc donnés par les équations

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - S}} = \pm \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - S}} = \pm \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - S}}$$

ou

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - S} = \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - S} = \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - S}.$$

En éliminant la variable S, on obtiendra facilement le lieu des axes :

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

C'est un cône du second degré rapporté à ses axes et sur lequel on peut placer un trièdre trirectangle.

Les sommets se trouvant à l'intersection de l'axe et

de la surface, les coordonnées de ses points doivent satisfaire aux équations

$$(1) \quad \frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - S} = \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - S} = \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - S} = \frac{l^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 3S},$$

l^2 représentant le carré de la demi-longueur de l'axe.

Mais, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ étant un invariant, on a

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{l^2} + 2S,$$

puisque S est l'inverse du carré du rayon du parallèle dont le plan passe par le centre.

En tenant compte de cette relation, les équations (1) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - S} &= \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - S} = \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - S} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 2S\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 3S\right)}. \end{aligned}$$

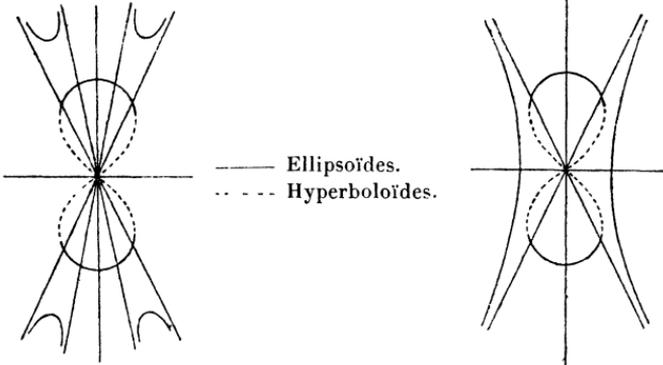
En éliminant S , on obtiendrait aisément les équations du lieu; mais il est préférable de construire immédiatement la projection sur le plan des xy , au moyen de la variable auxiliaire S .

Pour partager en arcs correspondant à des surfaces de même espèce, nous remarquons d'abord que des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à deux nappes peuvent seuls donner des points réels; nous distinguerons ces deux surfaces par le signe de S , S étant négatif pour des hyperboloïdes et positifs pour des ellipsoïdes, puisque le parallèle dont le plan passe par le centre est imaginaire dans le premier cas et réel dans le second.

On construit facilement les deux courbes que l'on obtient en supposant

$$1^{\circ} \quad \frac{2}{b^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

$$2^{\circ} \quad \frac{2}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$



Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.
