

MAURICE D'OCAGNE

**Sur la construction de la normale
dans un certain mode de génération
des courbes planes**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 197-200

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__197_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA CONSTRUCTION DE LA NORMALE DANS UN CERTAIN
MODE DE GÉNÉRATION DES COURBES PLANES;**

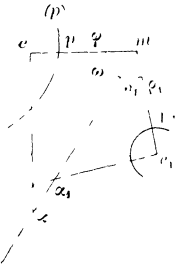
PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Élève de l'École Polytechnique.

Considérons dans un plan deux courbes fixes (p) et (p_1) . Soient mp une normale à la courbe (p) , mp_1 une normale à la courbe (p_1) , m leur point de rencontre; si nous posons $mp = \varrho$, $mp_1 = \varrho_1$, le lieu (m) du point m sera défini par une relation de la forme $F(\varrho, \varrho_1) = 0$.

Proposons-nous de construire la normale en un point m de la courbe (m) .

Soient α et α_1 les points où cette normale est coupée par les normales aux enveloppes des droites mp et mp_1 , c'est-à-dire par les perpendiculaires aux droites mp et



mp_1 , aux points e et e_1 , centres de courbure des courbes (p) et (p_1) respectivement relatifs aux points p et p_1 .

Pour un déplacement infiniment petit du point m , on a, d'après un principe connu de Géométrie cinématique ⁽¹⁾, en appelant $d\theta$ et $d\theta_1$ les angles de contingence

⁽¹⁾ MANNHEIM. *Cours de Géométrie descriptive*, p. 603.

respectifs des enveloppes mp et mp_1 ,

$$d\varphi = ex \cdot d\theta, \quad d\varphi_1 = e_1 x_1 \cdot d\theta_1.$$

d'où

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{ex \cdot d\theta}{e_1 x_1 \cdot d\theta_1}.$$

Mais, le déplacement infiniment petit du point m étant représenté par $d(m)$, on sait que ⁽¹⁾

$$d(m) = mx \cdot d\theta,$$

et de même

$$d(m) = m x_1 \cdot d\theta_1.$$

d'où il résulte que

$$\frac{d\theta}{d\theta_1} = \frac{m x_1}{m x}.$$

La relation (1) devient donc

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{ex \cdot m x_1}{e x_1 \cdot m x}$$

ou

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}.$$

Or on a, par différentiation de l'équation de la courbe,

$$F'_\varphi d\varphi + F'_{\varphi_1} d\varphi_1 = 0,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = - \frac{F'_{\varphi_1}}{F'_\varphi},$$

et, par comparaison avec la relation (2).

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} = - \frac{F'_{\varphi_1}}{F'_\varphi}.$$

De là la règle suivante :

On porte respectivement sur mp et sur mp_1 des lon-

(1) Même Ouvrage, même page.

guez proportionnelles à F'_2 et F'_{z_1} ; sur les droites ainsi obtenues on construit un parallélogramme : la diagonale de ce parallélogramme passant par le point m est la normale cherchée.

Il y a lieu de faire la distinction suivante : en supposant l'une des longueurs ci-dessus désignées constamment portée dans le sens de m vers p , il faudra porter l'autre dans le sens de m vers p_1 ou en sens contraire, suivant que le rapport $\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}$ sera négatif ou positif, parce que, dans un cas, les angles ω et ω_1 doivent être comptés en sens inverses, et, dans l'autre, dans le même sens.

Comme cas particuliers de ce théorème général, on a les théorèmes de Joachimsthal, proposés par M. Frenet dans son *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 33.

Il est aisé de voir que la courbe dont l'équation en coordonnées bipolaires est la même que l'équation de la courbe (m) rapportée aux courbes (p) et (p_1) sera tangente à celle-ci au point m , si l'on prend pour pôles les points p et p_1 correspondant à ce point m .

Faisons une application de ce qui précède. Supposons qu'on prenne pour courbes fixes un point et un cercle, et pour équation

$$\rho - k\rho_1 = 0.$$

k étant une constante. La courbe ainsi définie est un *ovale de Descartes* ⁽¹⁾; comme, dans ce cas, on a

$$F'_2 = 1, \quad F'_{z_1} = -k,$$

et par suite

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} = -\frac{F'_{z_1}}{F'_2} = k.$$

(1) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIX, p. 408.

on voit facilement quelle est la construction de la normale par application de la règle générale.

Appelant p le point fixe, p_1 un point de la circonférence fixe, m le point correspondant de l'ovale, on voit, d'après la remarque faite plus haut, que *le cercle ayant pour diamètre la distance des points conjugués harmoniques qui divisent le segment pp_1 dans le rapport K est tangent à l'ovale considéré au point m .*

Je terminerai cette Note par quelques théorèmes sur la *lemniscate* qui résultent des principes précédents.

L'équation de cette courbe en coordonnées bipolaires est

$$\rho\rho_1 = k.$$

Par suite,

$$F'_\rho = \rho_1, \quad F'_{\rho_1} = \rho$$

et

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} = -\frac{\rho}{\rho_1},$$

d'où l'on conclut facilement que :

La normale en un point d'une lemniscate est symétrique de la droite qui joint ce point au centre de la courbe par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle formé par les rayons vecteurs du même point.

Il est, de plus, aisé de démontrer que, dans le triangle rectangle, la hauteur et la médiane issues du sommet de l'angle droit sont symétriques par rapport à la bissectrice intérieure issue du même sommet.

On arrive sans difficulté, par la combinaison de cette proposition avec le théorème précédent, au nouveau théorème que voici :

Les points d'une lemniscate où la tangente est parallèle à l'axe des foyers sont sur une circonférence concentrique à cette courbe et passant par les foyers.