Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 329-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__329_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 127

(voir 1re série, t. V, p. 148)

En rendant rationnelle l'équation

$$(a_1 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_2 + x)^{\frac{1}{2}} + \ldots - (a_n + x)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

on parvient à une équation du degré 2^{n-2}.

Désignons, en général, par α_p l'expression $(a_p + x)^{\frac{1}{2}}$. M. Desboves démontre, dans ses *Questions d'Algèbre*, p. 217, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant données n lettres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *on forme* 2^{n-1} *polynômes comme il suit : on écrit, à la suite de* α_1, *successivement* $+\alpha_2$ *et* $-\alpha_2$, *et l'on a ainsi les deux binômes* $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$; *à la suite de* $\alpha_1 + \alpha_2$ *et* $\alpha_1 - \alpha_2$ *on écrit successivement* $+\alpha_3$ *et* $-\alpha_3$, *et l'on obtient ainsi quatre polynômes; on écrit à la suite des quatre polynômes successivement* $+\alpha_4$ *et* $-\alpha_4$, *et l'on obtient ainsi huit polynômes, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les lettres aient été employées. Si l'on fait alors le produit des* 2^{n-1} *derniers polynômes, on obtient une fonction symétrique de toutes les lettres élevées à des puissances paires.*

Si donc on multiplie le polynôme

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

qui forme le premier membre de l'équation donnée, et qui est un des polynômes énoncés dans le théorème précédent, par les $2^{n-1} - 1$ polynômes restants, on obtiendra une fonction où chaque lettre entrera à une puissance paire. En remplaçant alors α_p^2 par $a_p + x$, qui est du premier degré en x, le degré de chaque terme sera réduit à moitié, et le résultat sera du degré 2^{n-2}.

C'est du reste la méthode indiquée par M. Desboves, Ouvrage cité, p. 319. CH. B.

Note. — La même question a été résolue par M. Brocard.

Question 1195

(voir 2^e série, t. XV, p. 111)

PAR M. MORET-BLANC.

Une pile de boulets à base carrée ou à base triangulaire ne contient jamais un nombre de boulets égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier. (E. LUCAS.)

On sait que la somme ou la différence de deux cubes inégaux ne peut être égale à un cube, ni au double d'un cube. De même, la somme ou la différence des cinquièmes puissances de deux nombres inégaux ne peut être égale à une cinquième puissance, ni au double d'une cinquième puissance. 1 étant un cube, il en résulte que deux nombres entiers consécutifs ne peuvent être simultanément un cube et le double d'un cube, ou bien une cinquième puissance et le double d'une cinquième puissance, en exceptant 0 et 1.

Cela posé, considérons d'abord la pile à base triangulaire.

Je dis qu'on ne peut avoir en nombres entiers

$$n(n+1)(n+2) = 6m^3,$$

sauf le cas de $n = 1$.

En effet, les trois nombres $n, n+1, n+2$, n'ayant pas de facteur commun, sauf 2 si n est pair, devraient être l'un un cube, un autre le double d'un cube, et l'autre le triple d'un cube.

Or, d'après la remarque précédente, $n+1$ ne peut être un cube ou le double d'un cube; reste donc à supposer que $n+1$ soit le triple d'un cube. $n+1$ sera alors de l'une des formes $9k$, $9k+3$, $9k-3$, et l'on aura une des trois combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} n &= 9k-1,\ 9k+2,\ 9k-4, \\ n+1 &= 9k,\ 9k+3,\ 9k-3, \\ n+2 &= 9k+1,\ 9k+4,\ 9k-2. \end{aligned}$$

n et $n+2$ ne pourront être simultanément l'un un cube, l'autre le double d'un cube.

Donc, dans aucun cas, le nombre des boulets de la pile ne sera un cube, sauf le cas de $n=1$.

Il ne sera pas non plus une cinquième puissance.

Il faudrait, en effet, que $n+1$ fût le triple d'une cinquième puissance, et, en remarquant qu'une cinquième puissance est de l'une des formes $25k$, $25k\pm 1$, $25k\pm 7$, on aurait une des combinaisons

$$\begin{aligned} n+1 &= 25k,\ 25k+3,\ 25k-3,\ 25k+4,\ 25k-4, \\ n &= 25k-1,\ 25k+2,\ 25k-4,\ 25k+3,\ 25k-5, \\ n+2 &= 25k+1,\ 25k+4,\ 25k-2,\ 25k+5,\ 25k-3; \end{aligned}$$

n et $n+2$ ne seraient pas simultanément un cube et le double d'un cube.

Donc le nombre des boulets d'une pile à base triangulaire ne peut être un cube ni une cinquième puissance que si $n=1$.

Considérons maintenant une pile à base carrée, et voyons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1)=6m^3.$$

Si $2n+1$ est le triple d'un cube, on tombe dans un cas d'impossibilité déjà signalé.

Si $2n+1$ est un cube, il est de l'une des formes $9k$, $9k+1$, $9k-1$, et l'on a une des combinaisons

$$\begin{array}{llll} 2n+1 = 9k, & 9k+1, & 9k-1, \\ n = 9k+4, & 9k, & 9k-1, \\ n+1 = 9k+5, & 9k+1, & 9k. \end{array}$$

Les deux autres nombres ne seront pas simultanément le triple et le double d'nn cube.

Examinons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1)=6m^5.$$

Si $2n+1$ est le triple d'une cinquième puissance, n et $n+1$ devraient être une cinquième puissance et le double d'une cinquième puissance, ce qui est impossible. Si $2n+1$ est une cinquième puissance, on aura l'une des combinaisons suivantes

$$\begin{array}{llllll} 2n+1 = 25k, & 25k+1, & 25k-1, & 25k+7, & 25k-7, \\ n = 25k+12, & 25k, & 25k-1, & 25k+3, & 25k-4, \\ n+1 = 25k+13, & 25k+1, & 25k, & 25k+4, & 25k-3, \end{array}$$

et l'on voit que n et $n+1$ ne seront pas simultanément le double et le triple d'une cinquième puissance.

Donc le nombre des boulets d'une pile à base carrée ne peut être une cinquième puissance ni le double d'une cinquième puissanee, sauf le cas d'un seul boulet.

Question 1328

(voir 2e série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant données les équations

(1) $$5x^2+5y^2-z^2+60x-24z=0,$$

(2) $$25x^2+25y^2+z^2-15xz=0,$$

(3) $$75x^2+75y^2+2z^2+5yz-45xz=0,$$

représentant des surfaces rapportées à un même système d'axes rectangulaires, on demande : 1° de trouver le genre de chaque surface; 2° de trouver l'intersection des surfaces (1) *et* (2); 3° *de trouver les projections sur les plans coordonnés de l'intersection des surfaces* (1) *et* (3). (ERNEST LEBON.)

1° L'équation (1) peut s'écrire

$$5(x+6)^2+5y^2-(z+12)^2=36;$$

elle représente un hyperboloïde à une nappe, de révolution autour d'un axe parallèle à Oz, et ayant son centre au point $x=-6$, $y=0$, $z=-12$; le rayon du cercle de gorge est égal à $\frac{6}{\sqrt{5}}$ et les génératrices font avec l'axe un angle dont la tangente est égale à $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Les équations homogènes (2) et (3) représentent des cônes du second degré ayant leurs sommets à l'origine.

Les trois surfaces passent par l'origine des coordonnées et sont coupées suivant des cercles par des plans parallèles au plan des xy.

2° En éliminant y entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation

$$(z-20)(2z-5x)=0;$$

elle représente le système de deux plans perpendiculaires au plan des xz et passant par l'intersection des deux surfaces. Le premier, parallèle au plan des xy, coupe les deux surfaces suivant un cercle,

$$z = -20, \quad (x+6)^2 + y^2 = 20;$$

le second les coupe suivant deux génératrices dont les projections sur le plan des xz se confondent,

$$z = \frac{5}{2}x,$$

et dont les projections sur le plan des xy ont pour équation

$$4y^2 - 5x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

3° Si, entre les équations (1) et (3), on élimine successivement y, x et z, on obtient les équations

$$\begin{aligned}
&5z^2(5x^2 - z^2 + 60x + 24z) \\
&\quad + (17z^2 + 360z - 45xz - 960x)^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z^2(17z + 5y + 360)^2 \\
&\quad + 108z(z + 20)(17z + 5y + 360) \\
&\quad + 405(z + 20)^2(5y^2 - z^2 - 24z) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(x^2 + y^2 + 12x)(45x - 5y + 48)^2 \\
&\quad - 5(17x^2 + 17y^2 + 24x)^2 \\
&\quad + 24(17x^2 + 17y^2 + 24x)(45x - 5y + 48) = 0,
\end{aligned}$$

qui représentent les projections de l'intersection des surfaces (1) et (3) sur les plans xOz, yOz et xOy.

Les deux premières ne renferment x et y respectivement qu'au second degré; on peut donc les résoudre par rapport à ces variables. La troisième ne renferme ni terme indépendant, ni terme du premier degré; en la transformant en coordonnées polaires, on aura une équation du second degré en ρ. La discussion et la construction de ces trois courbes ne présente d'autre difficulté que la longueur des calculs, résultant de la grandeur des coefficients; je ne m'y arrêterai pas.

Question 1330

(voir 2e serie, t. XVIII, p. 478),

PAR M. S. REALIS.

Les nombres x, y, z étant exprimés par les formules

$$x = 2(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)+2\alpha(2\beta+3\gamma+4\delta),$$
$$y = 2(-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2)+2\beta(2\alpha+3\gamma+4\delta),$$
$$z = 3(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+4\gamma(\alpha+\beta+2\delta),$$

on peut énoncer les propriétés suivantes :

1° *L'expression*

$$x^2+y^2+z^2$$

se réduit à une somme de deux carrés.

2° *Pour des valeurs entières convenables de α, β, γ, δ, tout nombre N, qui est égal à la somme de deux carrés entiers et à la somme de trois carrés entiers, peut être représenté par l'expression ci-dessus, dont les termes ont été préalablement débarrassés des facteurs communs inutiles.*

La proposition se relie à celles qui font l'objet d'un précédent article des *Nouvelles Annales* (¹) et se démontre de la même manière.

Les indéterminées x, y, z étant exprimées en α, β, γ, δ, comme il est dit dans l'énoncé, posons en outre

$$t = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2,$$
$$u = 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+2\delta(2\alpha+2\beta+3\gamma).$$

(¹) *Développements sur quelques théorèmes d'Arithmétique* (voir 2e série, t. XVIII, p. 500).

On aura, par identité, la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2,$$

c'est-à-dire une équation indéterminée dont toutes les solutions entières peuvent s'obtenir par les formules ci-dessus, moyennant des valeurs entières convenables attribuées à α, β, γ, δ. De là la proposition énoncée.

Voici quelques exemples :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 11, \quad \beta = 10, \quad \gamma = 14, \quad \delta = -15; \\ \quad 3^2 + 2^2 + 2^2 = 4^2 + 1^2 = 17; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 10, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 10, \quad \delta = -9; \\ \quad 4^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 = 18; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 14, \quad \beta = 13, \quad \gamma = 16, \quad \delta = -19; \\ \quad 4^2 + 3^2 + 1^2 = 5^2 + 1^2 = 26; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 2, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 7, \quad \delta = -8; \\ \quad 6^2 + 2^2 + 1^2 = 5^2 + 4^2 = 41; \end{array}\right.$$

. . . .

La question proposée est ainsi résolue, puisque l'on a la solution complète de l'équation indéterminée d'où elle dépend. Quant aux preuves de la généralité absolue de la solution précédente, elles tiennent aux mêmes considérations qui se rapportent aux équations résolues dans l'article mentionné. Il en est de même quant aux moyens de déterminer les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ d'après des valeurs préalablement données de t, u, x, y, z. Nous n'insisterons donc pas ici sur ce sujet.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; Moret-Blanc; Marcello Rocchetti.