

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 368-380

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__368_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1306;

PAR M. GENTY.

On donne une conique C_2 et trois points A, B, C. Par chaque point P de C_2 passe une conique circonscrite au triangle ABC et tangente à C_2 en P, et chacune de ces coniques coupe la conique fixe en deux autres points M et N.

L'enveloppe de la droite MN est de la quatrième classe, du sixième ordre; elle n'a pas de point d'inflexion; elle est doublement tangente aux côtés du triangle ABC; elle a quatre points doubles, six points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les tangentes à C_2 aux six points où les côtés du triangle ABC coupent cette conique. (E. DEWULF.)

Au lieu de chercher l'enveloppe de la droite MN, que nous appellerons Σ_4 , nous allons chercher la polaire réciproque S_4 de cette courbe par rapport à la conique donnée, c'est-à-dire le lieu du pôle de la droite MN par rapport à cette conique.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

ou

$$S = 0$$

l'équation de la conique donnée. On sait que cette équation peut aussi se mettre sous la forme

$$(1) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2FYZ + 2GZX + 2HXY = 0,$$

en posant

$$\frac{dS}{dx} = X, \quad \frac{dS}{dy} = Y, \quad \frac{dS}{dz} = Z,$$

$$A = bc - f^2, \quad B = ac - g^2, \quad C = ab - h^2;$$

$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch.$$

Cela posé, une conique tangente à C_2 au point (x', y', z') aura pour équation

$$S + (lx + my + nz)(xX' + yY' + zZ') = 0,$$

X', Y', Z' étant ce que deviennent X, Y, Z quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point de contact.

Pour que cette conique soit circonscrite au triangle ABC, il faudra qu'on ait

$$a + lX' = 0; \quad b + mY' = 0; \quad c + nZ' = 0.$$

La droite MN a donc pour équation

$$\frac{ax}{X'} + \frac{by}{Y'} + \frac{cz}{Z'} = 0.$$

Si (x'', y'', z'') est le pôle de cette droite par rapport à C_2 , on aura

$$(2) \quad X'' : Y'' : Z'' = \frac{a}{X'} : \frac{b}{Y'} : \frac{c}{Z'}$$

On a d'ailleurs, puisque le point (x', y', z') est sur C_2 ,

$$(3) \quad \begin{cases} AX'^2 + BY'^2 + CZ'^2 \\ + 2FY'Z' + 2GZ'X' + 2HX'Y' = 0. \end{cases}$$

En éliminant X', Y', Z' entre les équations qui précèdent, et supprimant les accents de X'', Y'', Z'' , il vient

$$(4) \quad \frac{Aa^2}{X^2} + \frac{Bb^2}{Y^2} + \frac{Cc^2}{Z^2} + \frac{2Fbc}{YZ} + \frac{2Gac}{ZX} + \frac{2Hab}{XY} = 0.$$

Cette forme de l'équation montre que la courbe S_4 est du quatrième ordre, et qu'elle a pour points doubles les sommets du triangle polaire du triangle donné par rapport à C_2 . Elle est, par suite, de la sixième classe; elle a six points d'inflexion, quatre tangentes doubles et pas de point de rebroussement.

Les propositions corrélatives fournissent la solution de la question 1306, moins toutefois la dernière partie relative aux tangentes de rebroussement, qui nous paraît inexacte. En effet, la courbe S_4 rencontre C_2 en huit points, qui sont les points de contact des coniques doublement tangentes à C_2 menées par les points A, B et C . Les tangentes en ces huit points sont évidemment des tangentes à Σ_4 . Or cette courbe, étant de la quatrième classe, ne peut avoir plus de huit tangentes communes avec une conique : il en résulte que les droites indiquées comme étant les tangentes de rebroussement de l'enveloppe ne peuvent pas être des tangentes à cette courbe.

On peut encore traiter la question de la manière suivante.

Le nombre des droites MN qui passent par un point donné (x_1, y_1, z_1) (c'est-à-dire la classe de la courbe Σ_1) est égal à celui des points correspondants P. Or ceux-ci sont donnés par les équations

$$S = 0, \\ \frac{ax_1}{X} + \frac{by_1}{Y} + \frac{cz_1}{Z} = 0,$$

dont la seconde représente une conique Γ_2 circonscrite au triangle $A_1 B_1 C_1$, polaire du triangle donné par rapport à C_2 . Les coniques Γ_2 et C_2 se coupent en quatre points : donc la courbe Σ_1 est de la quatrième classe.

Réciproquement, une conique circonscrite au triangle $A_1 B_1 C_1$ et qui a pour équation

$$\frac{l}{X} + \frac{m}{Y} + \frac{n}{Z} = 0$$

coupe C_2 en quatre points P, qui sont tels que les droites correspondantes LM se rencontrent en un même point ayant pour coordonnées

$$\frac{l}{a}, \quad \frac{m}{b} \quad \text{et} \quad \frac{n}{c}.$$

Si le point (x_1, y_1, z_1) est sur Σ_1 , deux des tangentes menées par ce point se réunissent en une seule; il en est de même, par suite, de deux des points d'intersection de C_2 avec la conique correspondante Γ_2 : donc ces deux courbes sont tangentes. Et réciproquement, si ces deux courbes sont tangentes, le point correspondant (x_1, y_1, z_1) est situé sur Σ_1 . Or, la condition qui exprime que les deux coniques C_2 et Γ_2 sont tangentes peut s'écrire de la manière suivante :

$$(5) \quad (\theta\theta' - 9\Delta\Delta')^2 = 4(\theta^2 - 3\Delta\theta')(\theta'^2 - 3\Delta'\theta).$$

$\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ étant les invariants des deux coniques (SALMON, *Sections coniques*, n° 372). Telle est, par suite, l'équation de la courbe Σ_4 . On reconnaît sans peine que cette équation est du sixième ordre par rapport aux coefficients des deux courbes, et, par suite, par rapport à x_1, y_1 et z_1 .

La courbe Σ_4 a quatre points doubles qui correspondent aux coniques Γ_2 doublement tangentes à C_2 , et six points de rebroussement qui correspondent aux coniques Γ_2 qui ont avec C_2 un contact du second ordre.

Question 1331

(voir 2^e série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une conique (S) et un point fixe A sur cette conique, une droite (D) et un point fixe a sur cette droite.

Une conique osculatrice à (S) au point A et passant au point a coupe de nouveau la conique (S) et la droite (D) en des points b et c : démontrer que la droite bc coupe (S) en un point fixe f. (GENTY.)

Soit m un des points où la droite (D) coupe la conique (S). Deux coniques osculatrices en un point A peuvent être considérées comme ayant en A trois points communs infiniment voisins. Cela posé, la conique osculatrice à S au point A et passant par le point a est complètement déterminée par un cinquième point b ou c ; par conséquent, à un point b ne correspond qu'un point c et réciproquement; les points b et c forment donc sur la conique (S) et sur la droite (D) deux divisions homographiques ayant deux points homologues coïncidents en m , et qui sont déterminées par trois couples de points

homologues. En effet, les faisceaux Ab, Ab', \dots et Ac, Ac', \dots sont homographiques et déterminés par trois couples de rayons homologues $A_m A_m; Ab, Ac; Ab', Ac'$: ils forment sur la conique et sur la droite les deux divisions homographiques considérées.

Cela posé, tirons bc et $b'c'$ qui se coupent en f ; le faisceau $(fm, fb, fb', fb'', \dots)$ détermine sur la conique (S) et sur la droite (D) deux divisions homographiques, qui sont précisément les deux divisions considérées, puisqu'elles sont déterminées par les trois mêmes couples de points : donc les droites $b''c'', b'''c''', \dots$ vont concourir au point f ; en d'autres termes, toutes les droites bc passent par un même point f .

Les deux faisceaux (Ab, Ab', Ab'', \dots) et (fc, fc', fc'', \dots) sont homographiques; les rayons homologues se coupent sur une conique passant par A et par f et qui n'est autre que la conique (S) : donc le point f est sur la conique (S). C. Q. F. D.

Note. — Au moyen de la Géométrie analytique, la même question a été résolue par MM. Lez; Leinekugel; Arnaud, élève au lycée de Nice.

Question 1338

(voir 2^e série, t. XVIII, p. 288);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

Démontrer que les solutions entières et positives de l'équation $x^2 + 1 = 2y^2$, dont les deux premières sont $x = 1, y = 1$ et $x = 7, y = 5$, se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de x ou de y de six fois la dernière pour obtenir la suivante. (LIONNET.)

Il est bien connu que les solutions entières et positives

de l'équation $x^2 + 1 = 2y^2$ sont données par les termes des fractions réduites d'ordre pair, la première étant $\frac{1}{0}$, de la fraction continue périodique dont le premier quotient incomplet est l'unité suivie de la période 2.

En désignant par

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{a_3}{b_3}$$

cinq réduites consécutives dont la première $\frac{a_1}{b_1}$ est d'ordre pair, on aura

$$(1) \quad a_3 = 2m_2 + a_2, \quad b_3 = 2n_2 + b_2,$$

$$(2) \quad m_2 = 2a_2 + m_1, \quad n_2 = 2b_2 + n_1,$$

$$(3) \quad a_2 = 2m_1 + a_1, \quad b_2 = 2n_1 + b_1.$$

En multipliant les équations (2) par 2, les ajoutant aux équations (1), et de leurs sommes retranchant les équations (3), on a

$$a_3 = 6a_2 - a_1, \quad b_3 = 6b_2 - b_1.$$

D'après cela $\frac{1}{1}, \frac{7}{5}$ donnent

$$x = 6.7 - 1 = 41, \quad y = 6.5 - 1 = 29;$$

$\frac{7}{5}, \frac{41}{29}$ donnent

$$x = 6.41 - 7 = 239, \quad y = 6.29 - 5 = 169.$$

Etc.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; J. Lissençon; A. Leinekugel; Rochetti, qui a résolu également la question 1339.

Question 1350

(voir 2^e série, t. XIX, p. 480).

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver un nombre positif ayant la triple propriété d'être, ainsi que sa moitié, égal au produit de deux entiers consécutifs, le plus petit des facteurs de cette moitié étant lui-même égal au produit de deux entiers consécutifs. (LIONNET.)

Soit x le plus petit des deux nombres entiers consécutifs dont le produit $x^2 + x$ est le plus petit facteur de la moitié du nombre demandé : cette moitié est

$$(x^2 + x)(x^2 + x + 1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x,$$

et le nombre demandé sera exprimé par

$$2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x.$$

Il faut que ce nombre soit le produit de deux nombres entiers consécutifs

$$2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x = y^2 + y,$$

d'où, en multipliant par 4 et ajoutant 1,

$$8x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 8x + 1 = (2y + 1)^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution $x = 1$, d'où $y = 3$, ce qui donne le nombre

$$3 \times 4 = 12,$$

dont la moitié $6 = 2 \times 3$, le facteur $2 = 1 \times 2$.

Le procédé d'Euler pour déduire d'autres solutions de celle-là ne donne que des nombres fractionnaires ou la solution illusoire $x = 0$.

On trouve une infinité de nombres satisfaisant aux deux premières conditions. J'ai vérifié que, jusqu'à 10^{25} , 12 est le seul de ces nombres dont le plus petit facteur de sa moitié soit le produit de deux nombres entiers consécutifs.

Question 1354

voir 2^e série, t. XIX, p. 565);

PAR M. É. PECQUERY,

Élève au lycée du Havre.

L'équation

$$(1) \quad x^4 - (k - b + c)x^2 + (b - 2c)ax - ck = 0,$$

dans laquelle a, b, c, k sont des entiers positifs, et satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} a^2 &> k > (a - 1)^2, \\ (a - 1)b &\geq (a^2 - k - 1)c, \end{aligned}$$

ou bien aux conditions

$$\begin{aligned} (a + 1)^2 &> k > a^2, \\ (a + 1)b &\geq (k - a^2 + 1)c, \end{aligned}$$

ne peut avoir trois racines entières. Si deux racines sont imaginaires, l'une au moins des racines réelles est incommensurable.

La même proposition subsiste à l'égard de l'équation

$$(2) \quad x^4 - (k - b - c)x^2 + (b + 2c)ax + ck = 0,$$

dans laquelle les entiers a, b, c, k, tous plus grands que 0, satisfont à l'un quelconque des quatre systèmes de

conditions qui suivent, savoir :

$$1^{\circ} \quad a^2 > c, \quad a^2 > k \geq (a-1)^2,$$

$$2^{\circ} \quad c > a^2 > k, \quad (a+1)b > (a^2 - k - 1)c,$$

$$3^{\circ} \quad (a+1)^2 > k > a^2 > c,$$

$$4^{\circ} \quad c > a^2, \quad k > a^2, \quad (a-1)b \geq (k - a^2 + 1)c.$$

Dans chacun de ces cas, l'équation (2) a deux racines réelles, dont l'une, au moins, est incommensurable.

(S. RÉALIS.)

La somme des racines de l'équation (1) étant nulle, si trois de ses racines sont entières, la quatrième le sera aussi.

Inversement, si l'une des racines n'est pas entière, les trois autres ne pourront être toutes trois entières.

Il suffit donc de démontrer que l'équation (1), satisfaisant à l'un des deux premiers systèmes de conditions, admet toujours une racine non entière.

De plus, le coefficient de la plus haute puissance de x étant l'unité, cette racine non entière sera incommensurable.

Substituons à x dans l'équation les trois valeurs successives $-(a-1)$, $-a$, $-(a+1)$ et désignons par A, B, C les valeurs que prend le premier membre, on aura, toutes réductions faites,

$$A = (a-1)^2[(a-1)^2 - k] - b(a-1) + c(a^2 - k - 1),$$

$$B = (a^2 - k)(a^2 + c).$$

$$C = (a+1)^2[(a+1)^2 - k] + b(a+1) - c(k - a^2 + 1).$$

Si l'on tient compte du premier système de conditions, on voit que A et B sont de signes contraires ; si l'on tient compte du second, on voit de même que B et C sont de signes contraires. Donc, dans ces deux cas, l'équation (1)

admet toujours une racine non entière comprise entre $-(a-1)$ et $-a$ dans le premier cas, et entre $-a$ et $-(a+1)$ dans le second.

Ce qui précède comprend le cas où deux des racines sont imaginaires ; la racine réelle incommensurable trouvée subsiste toujours.

Considérons maintenant l'équation (2), qui n'est autre que l'équation (1) dans laquelle on a changé le signe de c . Si l'on y fait les mêmes substitutions que dans (1), les polynômes A, B, C deviennent

$$A = (a-1)^2[(a-1)^2 - k] - b(a-1) - c(a^2 - k - 1),$$

$$B = (a^2 - k)(a^2 - c),$$

$$C = (a+1)^2[(a+1)^2 - k] + b(a+1) + c(k - a^2 + 1).$$

En tenant compte successivement des quatre systèmes de conditions, les polynômes A, B, C, considérés seulement deux à deux, prennent les signes indiqués par le Tableau suivant :

	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o
A	-			-
B	+	-	-	+
C		+	+	

On voit donc que, dans chaque cas, il y a une racine comprise entre deux entiers consécutifs, c'est-à-dire une racine non entière.

Donc la proposition énoncée pour l'équation (1) subsiste pour l'équation (2).

Question 1358

(Voir même Tome, p 96);

PAR M. H. DU MONTEL,

Élève du lycée Saint-Louis.

Les droites rectangulaires OX, OY ⁽¹⁾ sont les axes d'une ellipse, M un point de la courbe; N le point où la normale en M rencontre l'axe OX ; MQ la perpendiculaire abaissée du point M sur OY ; MNP un triangle dont les côtés MP, NP sont respectivement égaux à MQ, NO : si l'on prend sur la bissectrice de l'angle MPN , et de chaque côté du point P , des longueurs PD, PD' égales entre elles et telles que $PD^2 = MP \cdot PN$, la circonférence passant par D et D' et ayant son centre sur OY coupera l'axe OX aux deux foyers de l'ellipse.

(A. BOILLEAU.)

Soient F, F' les foyers de l'ellipse, et C le point où la normale MN , prolongée, rencontre l'axe OY .

On a

$$\frac{CN}{CM} = \frac{ON}{QM}, \quad \text{ou} \quad \frac{CN}{CM} = \frac{PN}{PM},$$

puisque $ON = PN$ et $QM = PM$. Il s'ensuit que le point C appartient à la bissectrice de l'angle extérieur en P du triangle MPN , c'est-à-dire à la perpendiculaire à la droite DD' élevée au milieu P de cette droite. Donc le point C est le centre du cercle que l'on considère.

Cherchons la valeur du rayon CD de ce cercle.

Le triangle rectangle CPD donne

$$CD^2 = CP^2 + PD^2 = CP^2 + MP \cdot PN.$$

Mais, d'après une propriété connue, relative aux bissec-

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

trices des angles d'un triangle, on a

$$MP \cdot PN = CM \cdot CN - CP^2,$$

d'où

$$CD^2 = CM \cdot CN.$$

Considérons actuellement la circonférence circonscrite au triangle FMF' : elle coupe la perpendiculaire OY , élevée au milieu de FF' , au point où la normale MN , qui est bissectrice de l'angle FMF' , rencontre la droite OY . Donc le point C appartient à cette circonférence; il en résulte que l'angle $NFC = NMF' = NMF$, et la similitude des triangles CFN , CFM donne

$$CF^2 = CM \cdot CN = CD^2, \quad \text{d'où} \quad CF = CD.$$

Cette dernière égalité démontre le théorème énoncé.

Note. — Au moyen des calculs de la Géométrie analytique, la même question a été résolue par MM. Pisani; Lez; Moret-Blanc; Josse (Ferdinand), élève en Mathématiques spéciales au lycée de Nancy (classe de M. Lacour); Élie Perrin, élève à la Faculté de Paris.

M. Pisani fait observer que le théorème énoncé existe de même pour l'hyperbole.