

ED. DEWULF

Exercices de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 20
(1881), p. 391-401

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__391_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ;

PAR M. ED. DEWULF,
Lieutenant-Colonel du Génie.

I. *Notations.* — 1. Nous employons les notations suivantes :

$$(1, 2, 3, 4) [5, 6, 7, 8, \dots]$$

représente un faisceau de coniques, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4 et dont les courbes sont déterminées par les points 5, 6, 7, 8, ... ;

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) [9, 10, 11, \dots]$$

représente un faisceau de cubiques, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et dont les courbes sont déterminées par les points 9, 10, 11, ... ;

$$(1^2, 2, 3, 4, 5, 6) [7, 8, 9, \dots]$$

représente un faisceau de cubiques, dont la base est formée par le point double 1 et les points simples 2, 3, 4, 5, 6, et dont les courbes sont déterminées par les points 7, 8, 9, ... ; et ainsi de suite.

Cette Notation est empruntée au Mémoire de M. l'amiral de Jonquières, intitulé : *Essai sur la génération*

des courbes géométriques (t. XVI des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*).

2. $[x - y]^n$ représente une transformation birationnelle de l'ordre n entre les points x et y ; la théorie générale de ces transformations, exposée d'après les Mémoires de M. Cremona, se trouve dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (année 1872, p. 206 et suiv.)

3. Si l'on a sur une droite une série de couples de points formant une involution i , et si l'on joint ces couples de points à point O d'un cercle M, chaque couple de points conjugués détermine une corde de M, toutes ces cordes concourent en un point p (CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 490). Nous disons que ce point p représente l'involution i , par rapport au cercle M et à un de ses points O.

II. *Étudier la relation qui existe entre les systèmes de points x et y qui rendent projectifs le faisceau de coniques $(1, 2, 3, x)$ $[4, 5, 6, 7]$ et le faisceau de droites y $[4', 5', 6', 7']$.*

1. A un point déterminé x correspondent tous les points d'une conique C_x^2 circonscrite au quadrilatère $4'5'6'7'$ et capable du rapport anharmonique des tangentes au point 1 des coniques

$$1.2.3.x.4, \quad 1.2.3.x.5, \quad 1.2.3.x.6, \quad 1.2.3.x.7.$$

Pour déterminer les points x qui correspondent à un point donné y , nous désignons par i'_4, i'_5, i'_6, i'_7 les involutions déterminées sur une droite quelconque l par les quatre faisceaux de coniques $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 3, 5)$, $(1, 2, 3, 6)$, $(1, 2, 3, 7)$, et par p_4, p_5, p_6, p_7 , les quatre

points qui représentent respectivement ces involutions par rapport à un cercle M et à un de ses points O . Décrivons sur $p_4 p_5 p_6 p_7$ une conique C_2^p capable du rapport anharmonique du faisceau $\gamma[4', 5', 6', 7']$, et soit p un point quelconque de cette conique. Chaque point p détermine quatre cordes pp_4, pp_5, pp_6, pp_7 de M , et ces cordes, projetées de O sur l , déterminent sur cette droite quatre couples de points en involution $s_4 t_4, s_5 t_5, s_6 t_6, s_7 t_7$. Les coniques $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$, $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5)$, $(1, 2, 3, 6, s_6, t_6)$, $(1, 2, 3, 7, s_7, t_7)$ se coupent en un même point x . Donc, à un point p correspond un seul point x , et pour le déterminer il suffit de deux des coniques ci-dessus, $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$ et $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5)$, par exemple.

Supposons maintenant que le point p parcourt la conique C_2^p ; les droites pp_4, pp_5 engendrent deux faisceaux projectifs, dont les rayons correspondants déterminent sur l deux involutions projectives $s_4 t_4', s_4' t_4'', s_4'' t_4''', \dots$, $s_5 t_5', s_5' t_5'', s_5'' t_5''', \dots$, et les coniques $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$, $(1, 2, 3, 4, s_4', t_4')$, $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5)$, $(1, 2, 3, 5, s_5', t_5')$, \dots forment deux faisceaux projectifs dont les courbes correspondantes engendrent une courbe du quatrième ordre C_4 , ayant trois points doubles en 1, 2, 3 et passant par les points simples 4, 5 et aussi par les points simples 6 et 7. Quand le point p parcourt la conique C_2^p , le point x décrit la courbe C_4 ; et, comme à tous les points γ d'une conique circonscrite à $4' 5' 6' 7'$ correspondent tous les points p de C_2^p , on peut dire qu'à tous les points γ d'une conique circonscrite à $4' 5' 6' 7'$ correspondent tous les points x d'une courbe C_4 , ayant des points doubles en 1, 2, 3 et passant par les points simples 4, 5, 6, 7.

2. Les coniques $(4', 5', 6', 7')$ et les quartiques C_4 se

correspondent une à une et forment deux faisceaux projectifs; le lieu géométrique C_6 des intersections des courbes correspondantes de ces faisceaux est aussi *le lieu géométrique des points x qui rendent projectifs les deux faisceaux*

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7] \quad \text{et} \quad x[4', 5', 6', 7'].$$

Cette sextique a des points doubles aux points 1, 2, 3 et passe aux points simples 4, 5, 6, 7, 4', 5', 6', 7'.

3. Supposons que les points 4', 5', 6', 7' se confondent respectivement avec 4, 5, 6, 7; la courbe C_6 est le lieu des points x qui rendent projectifs les deux faisceaux $(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7]$ et $x[4, 5, 6, 7]$.

A chaque point x de cette courbe correspond une cubique du réseau, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et cette courbe a un point double en x ; en d'autres termes, le lieu géométrique des points x est le lieu géométrique des points doubles des cubiques du réseau (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Ce lieu géométrique ne doit pas changer si, au lieu de prendre les trois points 1, 2, 3, on prend trois quelconques des sept points donnés pour former la base du faisceau générateur de coniques. Nous avons donc démontré le théorème suivante :

Le lieu géométrique des points doubles des courbes du réseau de cubiques (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), c'est-à-dire la jacobienne de ce réseau, est une courbe du sixième ordre qui a un point double en chacun des sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On peut voir directement que cette jacobienne a des points doubles en chacun des sept points donnés; on peut, en effet, construire une cubique ayant un point

double en un des sept points donnés et passant par les six autres.

On peut encore déterminer directement vingt et un couples de points de cette jacobienne, car le réseau de cubiques (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) renferme les vingt et une courbes composées, formées de la conique déterminée par cinq des sept points donnés et par la droite qui joint les deux points restants, et les points d'intersection de cette conique et de cette droite appartiennent à la jacobienne. Ces quarante-deux points peuvent être imaginaires par couples et se construisent au moyen de la règle et du compas.

Ajoutons encore qu'on peut tracer directement les tangentes à la jacobienne en chacun de ces points doubles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Pour le faire voir, il suffit de démontrer que ces tangentes sont celles des sept cubiques qui ont respectivement chacun de ces sept points pour point double.

Cela résulte du théorème général suivant, démontré géométriquement par M. Cremona dans son *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (96, d, p. 75) :

Étant donné un réseau de courbes, passant par un même point O, la hessienne du réseau passe deux fois par le point O, et ses deux tangentes en ce point sont celles de la courbe du réseau pour laquelle O est un point double.

On sait que, dans le cas où l'ordre des courbes qui constituent le réseau est le même pour toutes ces courbes, la hessienne se confond avec la jacobienne, et c'est ce qui a lieu dans la question dont nous nous occupons.

Nommons 8, 9, 10, 11, 12, 13 six quelconques des

quarante-deux points dont il a été question plus haut. La jacobienne du réseau pourra être engendrée par les deux faisceaux projectifs de cubiques

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, z) [9, 10, 11, 12, 13]$$

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) [9, 10, 11, 12, 13].$$

Le point z sera déterminé par l'une des deux méthodes indiquées par M. de Jonquières dans son *Essai sur la génération, etc.*, § 43. Les cubiques correspondantes de ces faisceaux ont toutes sept points communs connus à l'avance ; les deux autres points d'intersection de ces couples de courbes pourront donc être construits au moyen de la règle et du compas, en employant les méthodes développées par M. Chasles aux §§ VI et X de sa *Note sur les courbes du troisième ordre*, insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* 1855 (décembre, p. 1190 et suiv.)

Il résulte de tout ce qui précède que la jacobienne d'un réseau de courbes du troisième ordre déterminé par sept points peut être tracée au moyen de la règle et du compas.

4. Le tracé de la jacobienne d'un réseau de cubiques nous conduit immédiatement à la détermination des points doubles d'un faisceau $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ de cubiques. Considérons, en effet, les deux réseaux de cubiques $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ et $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8)$. Les jacobiniennes de ces deux réseaux sont une courbe C_6 du sixième ordre, ayant des points doubles en $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, et une autre courbe C'_6 , ayant des points doubles en $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$. Ces deux courbes ont, en commun, les points doubles $1, 2, 3, 4, 5, 6$, et y ont, en général, des tangentes différentes; elles se coupent donc en

$$36 - 4 \times 6 = 12$$

autres points. Donc, les courbes d'un faisceau de cubiques $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ ont douze points doubles qui peuvent se construire au moyen de la règle et du compas.

III. Étudier la relation qui existe entre les systèmes de points qui rendent projectifs les deux faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad \gamma[4', 5', 6', 7', 8'].$$

1. A un point x donné correspond un seul point γ que l'on détermine en décrivant sur $4'5'6'7'$ une conique capable du rapport anharmonique des coniques

$$(1, 2, 3, x), [4, 5, 6, 7],$$

puis, sur $4'5'6'8'$ une seconde conique capable du rapport anharmonique des coniques

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 8].$$

Ces coniques ont en commun les points $4', 5', 6'$ et se coupent en un quatrième point qui est le point γ cherché.

Supposons que l'on donne un point γ , et soit x un point correspondant à γ , que nous allons déterminer en le supposant d'abord connu, pour établir notre raisonnement. Chacune des coniques

$$(1, 2, 3, x, 4), (1, 2, 3, x, 5), (1, 2, 3, x, 6), \\ (1, 2, 3, x, 7), (1, 2, 3, x, 8)$$

marque sur une droite quelconque l un couple de points et ces cinq couples de points sont en involution, puisqu'ils sont déterminés par des coniques du faisceau $(1, 2, 3, x)$; de plus, cette involution est projective au faisceau

$$\gamma[4', 5', 6', 7', 8'];$$

par hypothèse, chacun de ces couples de points appartient respectivement aux cinq involutions i_4, i_5, i_6, i_7, i_8 , déterminées sur l par les cinq faisceaux

$$(1, 2, 3)[4, 5, 6, 7, 8].$$

Pour trouver le point x , il faut donc déterminer, dans chacune des involutions i_4, i_5, i_6, i_7, i_8 un couple de points tel que les cinq couples forment une involution projective au faisceau $\gamma[4', 5', 6', 7', 8']$.

Soient p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 les cinq points représentatifs des cinq involutions par rapport à un cercle M et à un de ses points O . Si l'on admet que l'on connaisse un point p tel que les deux faisceaux $p[p_4, p_5, p_6, p_7, p_8]$ et $\gamma[4', 5', 6', 7', 8']$ soient projectifs, les cinq rayons pp_i ($i = 4, 5, 6, 7, 8$) déterminent sur M cinq cordes qui, projetées du point O sur l , donnent les cinq couples de points cherchés.

Or, nous savons que les points p et γ forment une transformation birationnelle $[p - \gamma]^5$ du cinquième ordre, dont les points fondamentaux pour la figure (p) sont $p_4^2, p_5^2, p_6^2, p_7^2, p_8^2$, et p_0^2, p_0 étant le point adjoint au groupe $(p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ ou le point qui correspond à tous ceux de la conique $(4', 5', 6', 7', 8')$, et pour la figure (γ) les points $4'^2, 5'^2, 6'^2, 7'^2, 8'^2$ et o'^2, o' étant le point adjoint au groupe $(4', 5', 6', 7', 8')$ (1).

Nous savons aussi que les points p et x forment une transformation birationnelle $[p - x]^2$ du second ordre, dont les points fondamentaux sont pour la figure (x) les points 1, 2, 3, et pour la figure (p) les points $e_{2,3}, e_{1,3}, e_{1,2}$, projections du point O sur M des points

(1) RUDOLPH STURM, *Das Problem der Projectivität (Mathematische Annalen, t. I)*, ou DEWULF et SCHOUTE, *Construire une courbe unicusale du quatrième ordre, etc. (Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 1879; 2^e semestre)*.

d'intersection des droites 2 - 3, 1 - 3, 1 - 2 avec la transversale l (¹).

Donc à un point x correspond un seul point y .

Quand le point x décrit une droite quelconque, le point p correspondant de $[p - x]^2$ décrit une conique C passant par les points $e_{2,3}, e_{1,3}, e_{1,2}$, et ne passant généralement par aucun des points fondamentaux de la figure (3) dans $[p - x]^5$. Par suite, à la conique C , considérée comme appartenant à la figure (p) dans $[p - x]^5$, correspond, dans la figure (y) de cette même transformation, une courbe C_{10} du dixième ordre, ayant des points quadruples en $o^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4$, et des points simples aux points $l'_{2,3}, l'_{1,3}, l'_{1,2}$ qui correspondent aux points e de la figure (p) dans la transformation $[p - x]^5$.

Il résulte de là que *les points x et y qui satisfont à la question forment une transformation birationnelle du dixième ordre dont les points fondamentaux sont : pour la figure (y), $o^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, e'_{2,3}, e'_{1,3}, e'_{1,2}$, et pour la figure (x), les points quintuples $1^5, 2^5, 3^5$ et les points doubles $p_0^2, p_4^2, p_5^2, p_6^2, p_7^2, p_8^2$, qui, dans la figure (x), correspondent aux points $p_0, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ de la figure (p) de cette dernière transformation.*

2. La transformation du dixième ordre $[x - y]^{10}$ a douze points doubles. Donc :

Il y a douze points x qui rendent projectifs les faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad x[4', 5', 6', 7', 8'].$$

3. Supposons maintenant que les points $4', 5', 6', 7', 8'$ se confondent respectivement avec les points 4, 5, 6, 7, 8.

(¹) DEWULF et SCHOOTE, *loc. cit.* (*Bulletin*, 1879).

Les deux faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad y[4, 5, 6, 7, 8],$$

quand on prend pour x et y des points correspondants de la transformation $[x - y]^{10}$, engendrent toutes les cubiques du faisceau de ces courbes déterminé par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Cette transformation $[x - y]^{10}$ ayant douze points doubles, il existe douze points x qui rendent projectifs les deux faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad x[4, 5, 6, 7, 8].$$

Chacun de ces douze points détermine une cubique du faisceau (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) et est un point double de ce faisceau. Donc :

Dans un faisceau de cubiques, il y a douze courbes qui ont un point double.

4. Pour construire ces douze points, remarquons qu'à un faisceau de droites passant par $e_{1,2}$ de la figure (p) de $[p - x]^2$ correspond, dans la figure (x) de cette transformation, un faisceau de droites passant par le point 3, et dans la transformation $[p - \gamma]^5$ un faisceau de courbes du cinquième ordre C_5 , ayant toutes des points doubles aux points 0, 4, 5, 6, 7, 8. Ces deux faisceaux de droites $e_{1,2}$ et de quintiques sont projectifs et engendrent une courbe C_6 du sixième ordre, qui a des points doubles aux points $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$ et qui renferme les points cherchés.

De même un faisceau de droites passant par $e_{1,3}$ conduit à une courbe C'_6 ayant des points doubles en $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$ et renfermant les points cherchés.

Ces courbes C_6 et C'_6 ont en commun les points doubles $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$, qui sont étrangers à la

question; leurs $6 \times 6 - 4 \times 6 = 12$ autres points d'intersection sont donc les douze points cherchés.

On peut tracer les courbes C_6 et C'_6 comme nous l'avons indiqué ailleurs (1).

La construction des points doubles des courbes d'un faisceau de cubiques offre de l'intérêt, parce que les courbes déterminées par ces douze points servent de limite ou de transition entre des groupes de courbes du faisceau qui ont des formes différentes.