NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur la question 393

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 20 (1881), p. 403-405

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20__403_0>

NOTE SUR LA QUESTION 393 [1];

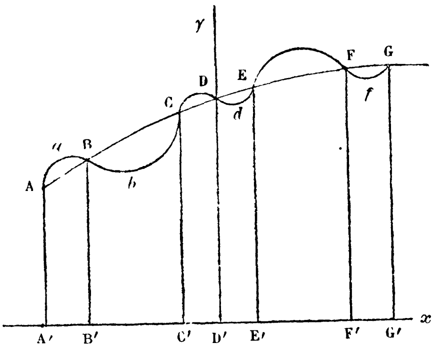
PAR M. E. CATALAN.

Rappelons d'abord la première partie de l'énoncé :

THÉORÈME. — *Étant donnée une parabole* ABCDE, *du troisième ordre, représentée par*

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

on fait passer, par les extrémités A, C, E *de trois or-*



données équidistantes, la parabole du second ordre, dont l'équation aurait la forme

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Ces courbes déterminent deux segments curvilignes ABCA, CDEC, *équivalents entre eux.*

---

(1) *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVII, p. 5, 205 et 207. On peut consulter, sur le même sujet : *Association française pour l'avancement des Sciences*, sessions de 1879 et 1880; *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (1880, Collignon); *Mémoires de l'Académie de Belgique*, t. XLIII; etc.

Cette proposition peut être ainsi modifiée et généralisée.

Soit ABC ... EFG *une parabole, d'ordre impair, représentée par*

$$Y = Ax^{2n+1} + Bx^{2n} + \ldots + Gx + H;$$

et soit AaBb ... FfG *la parabole, d'ordre pair, déterminée par les* $2n+1$ *points* A, B, ..., F, G *ayant, deux à deux, leurs abscisses égales et de signes contraires* (¹).

Cela posé, les trapèzes paraboliques A'AB...FGG', A'AaBb ..FfGG' *sont équivalents.*

Appelons $a, b, \ldots, h$ les abscisses des points F, G, ...; et posons

$$f(x) = Ax(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)\ldots(x^2 - h^2).$$

Il est visible que l'équation de la seconde parabole est

$$y = Y - f(x) \quad (^2).$$

Soient P, p les aires des deux trapèzes. On a

$$P = \int_{-a}^{+a} Y\,dx, \quad p = \int_{-a}^{+a} y\,dx;$$

puis

$$P - p = \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

D'après la forme de $f(x)$, les éléments de la dernière intégrale sont, deux à deux, égaux et de signes contraires; donc *cette intégrale est nulle* (³), et

$$P = p.$$

(¹) Le point D, situé sur l'ordonnée moyenne, fait exception.

(²) En outre, *toutes les paraboles d'ordre* $2n-1$, *passant aux points* A', B', ..., E', F', sont représentées par

$$y = f(x).$$

(³) Elle représente l'aire *commune* de toutes les paraboles dont il est question dans la Note précédente.

Corollaire I. — *Les segments curvilignes correspondants,* AaB, FfG, BbC, EeF, ... *sont équivalents deux à deux.*

Corollaire II. — *Les trapèzes paraboliques* B′BFF′, B′BbCc ... eFF′, ... *sont équivalents deux à deux.*

Remarque sur les courbes paraboliques. — La parabole d'ordre n, déterminée par $n+1$ points (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) a pour équation, comme l'on sait,

$$y = f(x)\left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \frac{y_1}{(x-x_1)f'(x_1)} + \ldots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)}\right],$$

en supposant

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \quad (^1).$$

Cela posé :

Toutes les paraboles d'ordre $n+1$, passant en ces $n+1$ points, sont représentées par

$$y = f(x)\left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \ldots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)} + A\right].$$

2° *Toutes les paraboles d'ordre $n+2$, passant en ces mêmes points, sont représentées par*

$$y = f(x)\left[\frac{y_0}{(x-x_0)f'(x_0)} + \ldots + \frac{y_n}{(x-x_n)f'(x_n)} + Ax + B\right].$$

Liège, 21 mai 1881.

---

(1) D'après la *formule d'interpolation de Lagrange*, ou plutôt, par la *théorie de la décomposition des fractions rationnelles*.