

CH. BIEHLER

**Théorie des points singuliers dans les  
courbes algébriques**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 20  
(1881), p. 97-110

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1881\\_2\\_20\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1881_2_20_97_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>



Supposons

$$\varphi_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+2}(a) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{p+q-1}(a) = 0,$$

et soit  $\varphi_{p+q}(a)$  la première des quantités de la forme  $\varphi_r(a)$ , qui ne s'annule pas; l'équation (3) prendra la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon \left[ \varphi'_p(a) + \dots + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p!} \varphi_p^{(p)}(a) + z \varphi'_{p+1}(a) + \dots \right] \\ + z^q [\varphi_{p+q}(a) + \varepsilon' \varphi'_{p+q}(a) + \dots] = 0. \end{aligned} \right.$$

$a$  étant une racine simple de l'équation

$$\varphi_p(x) = 0.$$

on a

$$\varphi'_p(a) \gtrless 0,$$

et les termes qui suivent  $\varphi'_p(a)$  dans les premières parenthèses renferment tous soit  $\varepsilon$ , soit  $z$  en facteur; il en est de même pour les termes renfermés dans les secondes parenthèses, à l'exception du premier.

Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, l'équation (4) acquiert  $q$  racines nulles, et on pourra l'écrire sous la forme

$$(5) \quad \varepsilon [\varphi'_p(a) + \alpha] + z^q [\varphi_{p+q}(a) + \beta] = 0,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des quantités qui sont aussi voisines de zéro que l'on veut lorsqu'on substitue à  $z$ , dans les parenthèses, l'une des  $q$  racines voisines de zéro qu'acquiert l'équation (4) pour de petites valeurs de  $\varepsilon$ . On pourra donc, en raisonnant comme nous l'avons fait dans la première Partie (1), représenter par la formule

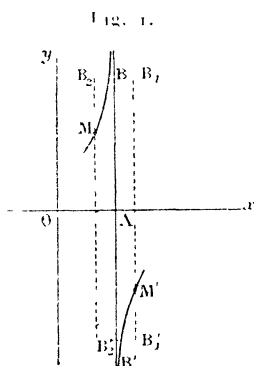
$$(6) \quad z^q = - \frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)} \varepsilon$$

---

(1) Voir le numéro de novembre 1880 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

les valeurs approchées des  $q$  racines infiniment petites de l'équation (4). Si  $q$  est impair, l'équation (6) n'a qu'une seule racine réelle, et cette racine est de signe contraire à celui de  $\frac{\varphi'_p(\alpha)}{\varphi'_{p+q}(\alpha)}$ .

Soit  $OA = a$  (fig. 1) et supposons le rapport  $\frac{\varphi'_p(\alpha)}{\varphi'_{p+q}(\alpha)}$  positif; pour une valeur positive de  $\varepsilon$ , la racine réelle de l'équation (6) est négative; on obtient donc un point  $M'$

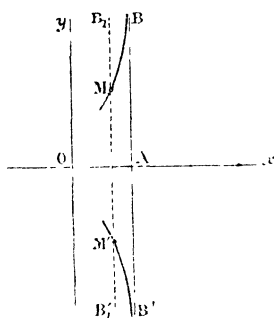


du côté des  $y$  négatifs sur la droite  $B_1 B_1'$ , dont l'équation est  $x = a + \varepsilon$ ; quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, cette racine engendre la branche  $B' M'$ ; pour des valeurs négatives de  $\varepsilon$ , on obtient la branche  $B M$ ; ces deux branches sont asymptotes à  $AB$  de part et d'autre de cette droite, et le signe du rapport  $\frac{\varphi'_p(\alpha)}{\varphi'_{p+q}(\alpha)}$  donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Supposons maintenant  $q$  pair et  $\frac{\varphi'_p(\alpha)}{\varphi'_{p+q}(\alpha)}$  positif; pour des valeurs positives de  $\varepsilon$ , toutes les racines infiniment petites de l'équation (5) sont imaginaires; si, au contraire, on donne à  $\varepsilon$  des valeurs négatives, deux des racines infiniment petites de l'équation (5) sont réelles;

l'une d'elles est positive et l'autre négative. On obtient donc, sur la droite  $B_1 B'_1$  (*fig. 2*), deux points situés l'un dans la région des  $\gamma$  positifs, l'autre dans la région des  $\gamma$  négatifs. Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, les deux racines

Fig. 2.



considérées engendrent les branches  $MB, M'B'$  situées d'un même côté de l'asymptote.

On voit que l'équation (5) a une forme analogue à celle que présente l'équation (7) de la première Partie ; ce dernier cas correspond à celui où le point est d'inflexion.

Ce que l'on vient de dire de la racine simple  $a$  de l'équation  $\varphi_p(x) = 0$  s'applique à toutes les autres racines simples de cette équation ; on construira donc de la même manière toutes les branches infinies fournies par les autres racines.

2. Considérons maintenant le cas où  $\varphi_p(x) = 0$  admet une racine double  $a$  ; dans ce cas,

$$\varphi'_p(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''_p(a) > 0;$$

l'équation (3) pourra donc s'écrire

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi_p''(\alpha) + \dots + \frac{\varepsilon^p}{p!} \varphi_p^{(p)}(\alpha) \\ + z[\varphi_{p+1}(\alpha) + \varepsilon \varphi_{p+1}'(\alpha) + \dots] + \dots \\ + z^{m-p} \left[ \varphi_m(\alpha) + \varepsilon \varphi_m'(\alpha) + \dots + \frac{\varepsilon^m}{m!} \varphi_m^{(m)}(\alpha) \right]. \end{array} \right.$$

Supposons que  $\alpha$  n'annule pas la fonction  $\varphi_{p+1}(x)$ ; dans ce cas, l'équation (7) pourra s'écrire

$$(8) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} [\varphi_p''(\alpha) + \alpha] + z[\varphi_{p+1}(\alpha) + \varepsilon] = 0,$$

analogue à l'équation (11) de la première Partie.

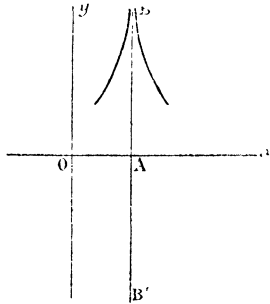
Les quantités  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont aussi petites que l'on veut lorsque  $z$  désigne la racine infiniment petite de l'équation (8).

La valeur approchée de  $z$  est l'expression

$$z = - \frac{\varphi_p''(\alpha)}{\varphi_{p+1}(\alpha)} \frac{\varepsilon^2}{1.2}.$$

On voit aisément qu'à cette racine correspondent deux

Fig. 3.



branches de courbe analogues à celles de la *fig. 3*, construite dans l'hypothèse  $\frac{-\varphi_p''(\alpha)}{\varphi_{p+1}(\alpha)} > 0$ .

Ces considérations s'appliquent à toutes les racines doubles de l'équation  $\varphi_p(x) = 0$  qui n'annulent pas  $\varphi_{p+1}(x)$ .

3. Considérons maintenant le cas où  $\varphi_{p+1}(a) = 0$  et  $\varphi'_{p+1}(a) \geq 0$ , ainsi que  $\varphi_{p+2}(a) \geq 0$ ,  $a$  étant toujours une racine double de  $\varphi_p(x) = 0$ .

L'équation (3) prendra alors la forme

$$(9) \quad \frac{\varepsilon^2}{1,2} \varphi''_p(a) + z\varepsilon \varphi'_{p+1}(a) + z^2 \varphi_{p+2}(a) + \gamma = 0,$$

$\gamma$  étant une somme de termes qui sont tous infiniment petits devant les trois premiers pour des valeurs infiniment petites de  $\varepsilon$  et de  $z$ .

Posons

$$z = \zeta\varepsilon;$$

l'équation (9), après cette substitution, renferme dans son premier membre  $\varepsilon^2$  en facteur; si l'on débarrasse le premier membre de ce facteur, il vient

$$(10) \quad \frac{1}{1,2} \varphi''_p(a) + \zeta \varphi'_{p+1}(a) + \zeta^2 \varphi_{p+2}(a) + \gamma' = 0,$$

$\gamma'$  étant une somme de termes qui renferment tous  $\varepsilon$  en facteur.

Quand  $\varepsilon$  est très petit, la fonction  $\zeta$  a une valeur aussi voisine que l'on veut de l'une des racines de l'équation du second degré

$$(11) \quad \frac{1}{1,2} \varphi''_p(a) + \zeta \varphi'_{p+1}(a) + \zeta^2 \varphi_{p+2}(a) = 0.$$

Soient  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  les racines de cette dernière équation; supposons  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  réelles et inégales; les deux racines de l'équation en  $z$  qui tendent vers zéro auront pour valeurs approchées

$$z = \zeta_0 \varepsilon, \quad z = \zeta_1 \varepsilon,$$

par suite, si  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont de même signe, la courbe présentera une disposition analogue à celle de la *fig. 4* ( $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont supposés positifs), et si  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont de signes

Fig. 4.

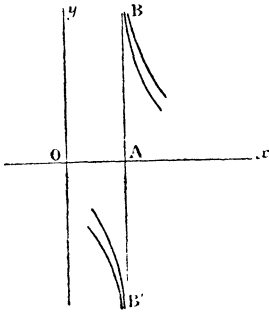
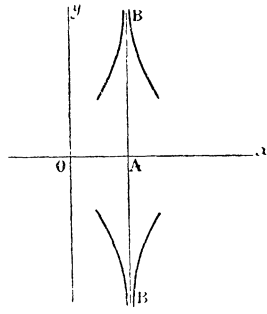


Fig. 5.



contraires, la courbe présentera une disposition analogue à celle de la *fig. 5*.

Si les racines de l'équation (11) sont imaginaires, il n'y a pas de branches réelles asymptotes à la droite  $BB'$ . Enfin si les racines de l'équation (11) sont égales, elle prendra la forme

$$(12) \quad \varphi_{p+2}(\alpha)(\zeta - \zeta_0)^2 + A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\varepsilon^3 + \dots = 0,$$

et, par suite,

$$\zeta - \zeta_0 = \pm \sqrt{-\frac{A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \dots}{\varphi_{p+2}(\alpha)}};$$

les deux valeurs de  $\zeta$  qui ont pour limite  $\zeta_0$  ont donc pour valeurs approchées

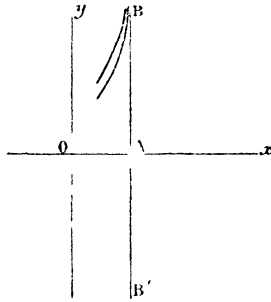
$$\zeta = \zeta_0 \pm \sqrt{-\frac{A}{\varphi_{p+2}(\alpha)}\varepsilon}$$

et nous donnent une disposition de la courbe analogue à



celle de la *fig.* 6, qui correspond au rebroussement de seconde espèce.

Fig. 6.



4. Nous avons actuellement à examiner le cas où

$$\varphi_{j+1}(\alpha) = 0, \quad \varphi_{p+2}(\alpha) = 0, \quad \varphi_{j+\lambda-1}(\alpha) = 0, \quad \varphi_{p+N}(\alpha) \geq 0, \\ \varphi'_{p+1}(\alpha) = 0, \quad \varphi'_{j+2}(\alpha) = 0, \quad \varphi'_{p+n-1}(\alpha) = 0, \quad \varphi'_{p+n}(\alpha) \geq 0.$$

En introduisant ces hypothèses dans l'équation (3'), elle prend la forme

$$(13) \quad \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon} \varphi'_p(\alpha) + \varepsilon z^n \varphi'_{p+n}(\alpha) + z^N \varphi_{p+\lambda}(\alpha) + \delta = 0,$$

$\delta$  étant une somme d'un nombre fini de termes qui sont infiniment petits devant l'un des trois termes mis en évidence.

Les développements dans lesquels nous sommes entrés pour traiter complètement ce qui se rapporte à l'équation (17) de la première Partie nous dispensent d'insister sur l'étude de l'équation (13). Nous nous bornerons donc à énoncer les résultats suivants :

1° Si  $n \geq N$ , les branches qui accompagnent  $BB'$  offrent la disposition de la *fig.* 3, dans le cas de  $N$  impair ; et dans le cas de  $N$  pair il n'y a pas de branches accompagnant la droite  $x = a$ , ou bien elles offrent la disposition de la *fig.* 5.



Dans cette équation,  $f_{\mu}(x, y)$  désigne d'une manière générale l'ensemble homogène des termes du degré  $\mu$ .

Cette équation peut s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} x^m f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots \\ + x f_1\left(1, \frac{y}{x}\right) + f_0 = 0, \end{cases}$$

ou bien, en posant  $f_{\mu}\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi_{\mu}\left(\frac{y}{x}\right)$ ,

$$(3) \quad x^m \varphi_m\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} \varphi_{m-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \dots + x \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_0 = 0.$$

Si l'on fait, en outre,

$$\frac{y}{x} = a + y', \quad x = \frac{1}{x'},$$

$a$  étant une racine de l'équation

$$\varphi_m(a) = 0,$$

l'équation (3) deviendra, après en avoir multiplié les deux membres par  $x'^m$ ,

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_m(a + y') + x' \varphi_{m-1}(a + y') + \dots \\ + x'^{m-1} \varphi_1(a + y') + x'^m \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Si l'on développe les expressions  $\varphi_{\mu}(a + y')$  et si l'on remarque que

$$\varphi_m(a) = 0,$$

l'équation (4) deviendra

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & y' \varphi'_m(a) + x' \varphi_{m-1}(a) \\ & + \frac{y'^2}{1.2} \varphi''_m(a) + x' y' \varphi'_{m-1}(a) + x'^2 \varphi_{m-2}(a) + \dots \\ & + \frac{y'^m}{m!} \varphi_m^{(m)}(a) + \frac{x' y'^{m-1}}{(m-1)!} \varphi_{m-1}^{(m-1)}(a) + \dots \\ & + x'^m \varphi_0 = \Phi(x', y') = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$y' = \lambda x',$$

l'équation (5) prendra la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' [\lambda \varphi'_m(\alpha) + \varphi_{m-1}(\alpha)] \\ + x'^2 \left[ \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \varphi''_m(\alpha) + \lambda \varphi'_{m-1}(\alpha) + \varphi_{m-2}(\alpha) \right] + \dots \\ + x'^m \left[ \frac{\lambda^m}{m!} \varphi^{(m)}_m(\alpha) \right. \\ \left. + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}_m(\alpha) + \dots + \varphi_0 \right] = 0 \end{array} \right.$$

ou, après la suppression du facteur  $x'$ ,

$$(7) \quad \psi_1(\lambda) + x' \psi_2(\lambda) + \dots + x'^{m-1} \psi_m(\lambda) = 0.$$

en posant, pour abrégé,

$$\psi_\mu(\lambda) = \frac{\lambda^\mu}{\mu!} \varphi^{(\mu)}_m(\alpha) + \frac{\lambda^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \varphi^{(\mu-1)}_m(\alpha) + \dots + \varphi_{m-\mu}(\alpha).$$

Dans le cas le plus général où un certain nombre de fonctions  $\psi_p(\lambda)$  sont identiquement nulles, par exemple dans le cas où  $\psi_1(\lambda)$ ,  $\psi_2(\lambda)$ , ...,  $\psi_{p-1}(\lambda)$  sont identiquement nulles, l'équation (7) prend la forme

$$(8) \quad x'^{p-1} \psi_p(\lambda) + x'^p \psi_{p+1}(\lambda) + \dots + x'^{m-1} \psi_m(\lambda) = 0$$

ou, après la suppression du facteur  $x'^{p-1}$ ,

$$(9) \quad \psi_p(\lambda) + x' \psi_{p+1}(\lambda) + \dots + x'^{m-p} \psi_m(\lambda) = 0.$$

Cette équation est de même forme que l'équation (3) de la première Partie.

6. On voit aisément que si l'on construit, dans le voisinage de l'origine, la courbe représentée par l'équation (5),  $\Phi(x', y') = 0$ , cela équivaudra à la construction de la courbe (1) à l'infini dans la direction fournie par la racine  $\alpha$  de l'équation  $\varphi_m(u) = 0$ .

En effet, nous avons posé

$$\frac{y}{x} = a + y', \quad x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \lambda x';$$

on en tire

$$y = ax + \lambda.$$

Si nous faisons ensuite

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon,$$

cela reviendra évidemment à couper la courbe par une droite parallèle à la droite  $y = ax + \lambda_0$ .

Cette droite  $y = ax + \lambda_0$  est asymptote à la courbe si  $\lambda_0$  a été déterminé de manière que l'équation en  $x'$  acquière une nouvelle racine nulle; par suite, l'équation en  $x$  acquerra une nouvelle racine infinie. L'équation  $y = ax + \lambda_0 + \varepsilon$  sera alors celle d'une parallèle à l'asymptote  $y = ax + \lambda_0$  et aussi voisine que l'on voudra de cette droite pour des valeurs suffisamment petites de  $\varepsilon$ .

Les équations (7) ou (9) entre les quantités  $x'$  et  $\lambda$  deviennent, en posant  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ , des équations entre les infiniment petits  $x'$  et  $\varepsilon$ ; elles nous donneront, par des raisonnements identiques à ceux de la première Partie, les valeurs approchées infiniment petites de  $x'$  pour des valeurs très petites de  $\varepsilon$ , et, par suite, le signe de ces valeurs de  $x'$  pour des valeurs soit positives, soit négatives de  $\varepsilon$ . Donner à  $\varepsilon$  des valeurs positives, c'est couper la courbe par des parallèles à l'asymptote  $y = ax + \lambda_0$  situées au-dessus de cette droite; les valeurs négatives de  $\varepsilon$  donnent des parallèles à l'asymptote situées au-dessous de cette droite.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point, la discussion étant identique à celle que nous avons développée précédemment. Nous allons, en terminant, rappeler

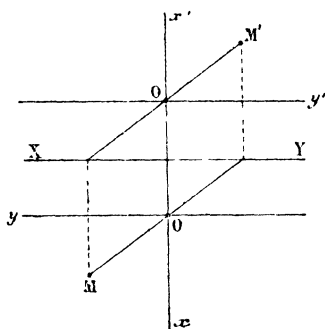
une propriété remarquable de la courbe représentée par l'équation (5) en  $x', y'$ , que nous avons désignée par

$$\Phi(x', y') = 0.$$

La courbe  $\Phi(x', y') = 0$  peut être considérée comme une transformée par perspective de la courbe représentée par  $F(x, y) = 0$ .

Si l'on conçoit, en effet, un système de deux plans rectangulaires (fig. 9) qui se coupent suivant la droite XY,

Fig. 9.



et un point  $o$  dont les distances aux deux plans soient égales entre elles et à l'unité : soient  $O, O'$  les projections de  $o$  sur les deux plans. Si l'on unit un point quelconque  $M$  du premier plan au point  $o$  par une droite, cette droite vient percer le second plan en un point  $M'$ , qui est la perspective du point  $M$ . Si l'on rapporte les positions de  $M$  et de  $M'$  respectivement aux axes  $xOy, x'O'y'$ , on a, entre les coordonnées  $x, y, x', y'$  des points  $M$  et  $M'$ , les relations

$$\frac{y}{x} = y', \quad x = \frac{1}{x'};$$

par suite, si le point  $M$  décrit dans le premier plan la courbe  $F(x, y) = 0$ , le point  $M'$  décrira dans le second

plan la courbe  $\Phi(x', y' - a) = 0$ . Cette équation prend la forme  $\Phi(x', y') = 0$  par une translation de l'axe des  $y'$ .

La courbe  $\Phi(x', y') = 0$  peut donc être considérée comme une perspective de la première.